## Κλάσμα κενού

$$S = \frac{u_G}{u_L} = \frac{\dfrac{Q_G}{A \cdot \varepsilon_G}}{\dfrac{Q_L}{A \cdot (1-\varepsilon_G)}} = \frac{Q_G \cdot (1-\varepsilon_G)}{Q_L \cdot \varepsilon_G}$$

$$S = \frac{u_G}{u_L} = \frac{\dfrac{U_G}{\varepsilon_G}}{\dfrac{U_L}{(1-\varepsilon_G)}} = \frac{U_G \cdot (1-\varepsilon_G)}{U_L \cdot \varepsilon_G}$$

$$S = \frac{u_G}{u_L} = \frac{\dfrac{\dot{m} \cdot x}{A \cdot \varepsilon_G \cdot \rho_G}}{\dfrac{\dot{m} \cdot (1-x)}{A \cdot (1-\varepsilon_G) \cdot \rho_L}} = \frac{\rho_L \cdot x \cdot (1-\varepsilon_G)}{\rho_G \cdot (1-x) \cdot \varepsilon_G}$$

$$\varepsilon_G = \frac{Q_G}{S \cdot Q_L + Q_G}$$

$$\varepsilon_G = \frac{U_G}{S \cdot U_L + U_G}$$

$$\varepsilon_G = \frac{x}{x + S \cdot (1-x) \cdot \dfrac{\rho_G}{\rho_L}}$$

$$\varepsilon_G = \frac{\rho_L \cdot x}{\rho_L \cdot x + \rho_G \cdot (1-x)}$$

$$\varepsilon_G = \beta = \frac{Q_G}{Q_L + Q_G}$$

## *Premoli model*

$$y = \frac{\beta}{1-\beta} \qquad \beta = \frac{Q_G}{Q_L+Q_G}$$

$$E_1 = 1.578\ Re^{-0.19}\left(\frac{\rho_L}{\rho_G}\right)^{0.22}$$

$$E_2 = 0.0273 \cdot We \cdot Re^{-0.51} \cdot \left(\frac{\rho_L}{\rho_G}\right)^{-0.08}$$

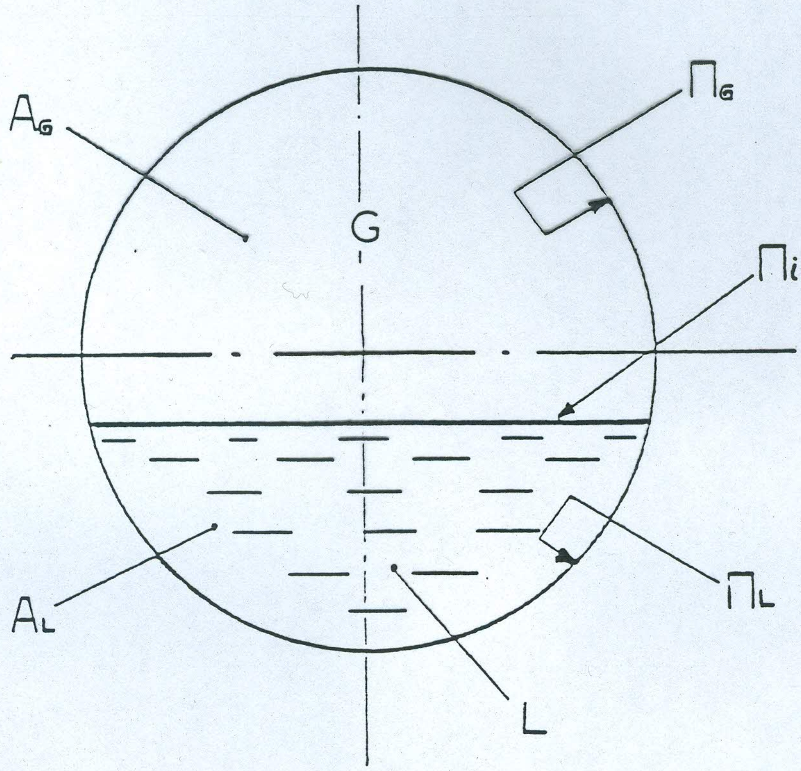
$$S = 1+E_1\left(\frac{y}{1+yE_2}-yE_2\right)^{1/2}$$

$$Re = \frac{\dot{m}D}{\mu_L} \qquad We = \frac{\dot{m}^2 D}{\sigma\rho_L}$$

$$\epsilon_G = \frac{Q_G}{SQ_L+Q_G}$$

$$H_L = 1-\epsilon_G$$

**Κλάσμα κενού για stratified τύπο ροής**




Από απλή γεωμετρική θεώρηση του σχήματος 5.4 προκύπτουν οι περίμετροι $\Pi_G$ του αερίου, $\Pi_L$ του υγρού και $\Pi_i$ της διεπιφάνειας ως εξής :

$$\Pi_L = D \cdot \left(\pi - \frac{\theta}{2}\right) \qquad \Pi_G = D \cdot \frac{\theta}{2} \qquad (5.15) \qquad (5.16)$$

$$\Pi_i = D \cdot \sin\frac{\theta}{2} \qquad (5.17)$$

Οι υδραυλικές διάμετροι για την αέρια και την υγρή φάση δίνονται (βιβλιογραφία) :

$$D_G = \frac{4 \cdot A_G}{\Pi_i + \Pi_G} = \frac{\pi \cdot R_G \cdot D^2}{\Pi_i + \Pi_G} \qquad (5.18)$$

$$D_L = \frac{4 \cdot A_L}{\Pi_L} = \frac{\pi \cdot R_L \cdot D^2}{\Pi_L} \qquad (5.19)$$

Αντικαθιστώντας τις σχ.(5.15)-(5.17) στις σχ.(5.18) και (5.19) προκύπτει :

$$D_G = \frac{\pi \cdot R_G \cdot D}{\frac{\theta}{2} + \sin\frac{\theta}{2}} \quad (5.20)$$

$$D_L = \frac{\pi \cdot R_L \cdot D}{\pi - \frac{\theta}{2}} \quad (5.21)$$

Επίσης οι επιφάνειες $A_G$ και $A_L$ που καταλαμβάνουν η αέρια και η υγρή φάση δίνονται από τις σχέσεις :

$$A_G = \frac{\pi \cdot D^2}{4} \cdot R_G \quad (5.22)$$

$$A_L = \frac{\pi \cdot D^2}{4} \cdot (1 - R_L) \quad (5.23)$$

όπου $R_G = A_G / A_L = 1 - R_L$ είναι το holdup αερίου, και $R_L$ το holdup υγρού. Το μέγεθος αυτό δηλώνει το ποσοστό της επιφάνειας του αγωγού που καταλαμβάνει η κάθε φάση. Επίσης από θεώρηση του σχ.5.4 τα μεγέθη $R_G$ και $R_L$ μπορούν να εκφραστούν σαν συνάρτηση της γωνίας θ ως εξής :

$$R_G = \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot (\theta - \sin\theta) \quad (5.24)$$

$$R_L = 1 - \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot (\theta - \sin\theta) \quad (5.25)$$

Εισάγοντας τους διφασικούς πολλαπλασιαστές τριβής $\Phi_G$ και $\Phi_L$ των Lockhart-Martinelli είναι :

$$\Phi_G^2 = \frac{\left(\frac{dP}{dz}\right)_{TP}}{\left(\frac{dP}{dz}\right)_{SG}} \quad (5.26)$$

$$\Phi_L^2 = \frac{\left(\frac{dP}{dz}\right)_{TP}}{\left(\frac{dP}{dz}\right)_{SL}} \tag{5.27}$$

όπου δίνονται :

- Για δύο φάσεις :

$$\left(\frac{dP}{dz}\right)_{TP} = \frac{2 \cdot f_G \cdot \rho_G \cdot V_G^2}{D_G} \tag{5.28}$$

$$f_G = C_G \cdot \left(\frac{\rho_G \cdot V_G \cdot D_G}{\mu_G}\right)^{-m} \tag{5.29}$$

$$V_G = 4 \cdot Q_G \cdot \left(\pi \cdot \beta \cdot D_G^2\right)^{-1} \tag{5.30}$$

- Για μια φάση :

$$\left(\frac{dP}{dz}\right)_{SG} = \frac{2 \cdot f_{SG} \cdot \rho_G \cdot V_{SG}^2}{D} \tag{5.31}$$

$$f_{SG} = C_G \cdot \left(\frac{\rho_G \cdot V_{SG} \cdot D}{\mu_G}\right)^{-m} \tag{5.32}$$

$$V_{SG} = 4 \cdot Q_G \cdot \left(\pi \cdot D_G^2\right)^{-1} \tag{5.33}$$

όπου $C_G$ είναι ο συντελεστής Blasius (16 για στρωτή ροή και 0.046 για τυρβώδη ροή), m είναι ο δείκτης Blasius (1 για στρωτή ροή και 0.2 για τυρβώδη ροή αέρα). Τα σύμβολα :

$$\alpha = R_L \cdot \left(\frac{D}{D_L}\right)^2 \tag{5.34}$$

$$\beta = R_G \cdot \left(\frac{D}{D_G}\right)^2 \tag{5.35}$$

είναι οι λόγοι των πραγματικών επιφανειών ροής των αντίστοιχων φάσεων προς αυτές ενός κύκλου των αντίστοιχων υδραυλικών διαμέτρων $D_L$ και $D_G$ .

Αντικαθιστώντας τις (5.28)-(5.35) και (5.20), (5.21) στην (5.26) προκύπτει μια σχέση του $\Phi_G$ σε συνάρτηση της γωνίας θ :

$$\Phi_G = R_G^{-3} \cdot \left[\frac{\frac{\theta}{2} + \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}{\pi}\right]^{m+1} \tag{5.36}$$

και αντίστοιχα, για το $\Phi_L$ προκύπτει :

$$\Phi_L = R_L^{-3} \cdot \left[\frac{\pi - \left(\frac{\theta}{2}\right)}{\pi}\right]^{n+1} \tag{5.37}$$

όπου m=n=1 για στρωτή και m=n=0.2 για τυρβώδη ροή.
Επίσης υπολογίζεται η παράμετρος X των Lockhart-Martinelli από την σχέση :

$$X^2 = \frac{(dP/dz)_L}{(dP/dz)_G} \tag{5.38}$$

αφού $(dP/dz)_L$ και $(dP/dz)_G$ είναι γνωστές βαθμίδες πίεσης της μονοφασικής ροής υγρού και αερίου αντίστοιχα και οι οποίες δίνονται από τις σχέσεις :

$$\left(\frac{dP}{dz}\right)_L = \frac{2 \cdot f_L \cdot \dot{m}^2 \cdot (1-x)^2}{D \cdot \rho_L} \tag{5.39}$$

$$\left(\frac{dP}{dz}\right)_G = \frac{2 \cdot f_G \cdot \dot{m}^2 \cdot x^2}{D \cdot \rho_G} \tag{5.40}$$

Έτσι έχοντας γνωστό ότι :

$$X = \frac{\Phi_G}{\Phi_L} \tag{5.41}$$

και από τις σχέσεις (5.36) και (5.37) προκύπτει μια πολύπλοκη εξίσωση με άγνωστο μόνο τη γωνία θ, η οποία είναι :

$$F = \frac{\left[1 - \frac{1}{2\cdot\pi}\cdot(\theta - \sin\theta)\right]^3 \cdot \left[\frac{(\theta/2) + \sin(\theta/2)}{\pi}\right]^{1.2}}{\left[\frac{1}{2\cdot\pi}\cdot(\theta - \sin\theta)\right]^3 \cdot \left[\frac{\pi - (\theta/2)}{\pi}\right]^{n+1}} - X^2 \tag{5.42}$$

όπου $X^2$ είναι γνωστό από τη σχέση (5.38). Η σχέση αυτή επιλύεται με τη μέθοδο Newton-Raphson για αρχική γωνία θ=20, k=50 επαναλήψεις και με $10^{-5}$ προσέγγιση. Έτσι με γνωστή τη γωνία θ υπολογίζεται η περίμετρος $\Pi_G$ του αερίου και από τη σχέση :

$$\Pi_G = D \cdot \cos^{-1}\left(2 \cdot \bar{h}_L - 1\right) \tag{5.43}$$

λύνοντας ως προς το αδιάστατο ύψος υγρού $\bar{h}_L = \frac{h_L}{D}$ προκύπτει :

$$\bar{h}_L = \frac{1}{2} \cdot \left[\cos\left(\frac{\Pi_G}{D}\right) + 1\right] \tag{5.44}$$

Οπότε τελικά το κλάσμα κενού δίνεται από τη σχέση :

$$\boxed{\varepsilon_G = \frac{1}{\pi} \cdot \left[\cos^{-1}\left(2 \cdot \bar{h}_L - 1\right) - \left(2 \cdot \bar{h}_L - 1\right) \cdot \sqrt{1 - \left(2 \cdot \bar{h}_L - 1\right)^2}\right]} \tag{5.45}$$

## *Beggs - Brill model*

$$H_L(\alpha) = H_{L_{(0)}} \cdot \psi \qquad H_{L_{(0)}} = \frac{\alpha_1 \cdot \lambda_L{}^b}{N_{FR}^C}$$

$$N_{FR} = \frac{V^2}{g \cdot D}$$

$$V = V_L + V_G \qquad \lambda_L = \frac{V_L}{V}$$

$$\Psi = 1 + C[\sin(1.8\alpha) - 0.333\sin^3(1.8\alpha)]$$

$$N_{LN} = 1.938 V_L \cdot \left(\frac{\rho_L}{\sigma}\right)^{0.25}$$

$$H_L(transition) = A \ x \ H_L(segregated) + B \ x \ H_L(intermittent)$$

$$A = \frac{L_3 - N_{FR}}{L_3 - L_2} \qquad B = 1 - A$$

$$L_2 = 0.000925\lambda_L^{-2.4684}$$

$$L_3 = 0.10\lambda_L^{-1.4516}$$

**BJA model**

$$X^2 = \frac{\left(\frac{dP}{dz}\right)_L}{\left(\frac{dP}{dz}\right)_G}$$

$$\left(\frac{dP}{dz}\right)_G = \frac{f_G \cdot \rho_G \cdot V_G^{\;2}}{2D}$$

$$\left(\frac{dP}{dz}\right)_L = \frac{f_L \cdot \rho_L \cdot V_L^2}{2D}$$

$$H_L = 1.24X^{1.058} \qquad if \quad X<0.01$$

$$Y = \frac{-(\rho_L - \rho_G)\cdot \sin\alpha}{\left(\frac{dP}{dz}\right)_G}$$

$$X^2 \cdot (\tilde{u}_L \tilde{D}_L)^{-n} \cdot \tilde{u}_L^{\;2} \frac{\tilde{P}_L}{\tilde{A}_L} - (\tilde{u}_G \cdot \tilde{D}_G)^{-m} \cdot \tilde{u}_G^2 \cdot \left( \frac{\tilde{P}_G}{\tilde{A}_G} + \frac{\tilde{P}_L}{\tilde{A}_L} + \frac{\tilde{P}_i}{\tilde{A}_G} \right) - 4Y = 0$$

$$h_x = \frac{D}{2} - h_L$$

$$H_L = \frac{\theta - \sin\theta}{2\pi}$$

$$\theta = 2\cos^{-1}(2h_x / D)$$

## *Rouhani model*

$$V = V_G + V_L$$

$$u_{GV} = u_G - V$$

$$u_{Lu} = u_L - V$$

$$u_{Gu} = 1.18\left(\sigma g \cdot \frac{\rho_L - \rho_G}{\rho_L^2}\right)^{0.25} \cdot (1-x)$$

$$e_G = \frac{V_G}{u_G}$$

## *Flanigan model*

$$A = \frac{\pi D^2}{4}$$

$$V_G = \frac{Q_G}{A}$$

$$H_L = \frac{1}{1+0.3264 V_G^{1.006}}$$

## *Eaton model*

$$N_{LV} = 1.938 V_L \cdot \left(\frac{\rho_L}{\sigma}\right)^{0.25}$$

$$N_{GV} = 1.938 V_G \cdot \left(\frac{\rho_L}{\sigma}\right)^{0.50}$$

$$N_D = 10.073 D \cdot \left(\frac{\rho_L}{\sigma}\right)^{0.5}$$

$$N_L = 0.15726 \mu_L \left(\frac{1}{\rho_L \cdot \sigma^3}\right)^{0.25}$$

$$N_E = \frac{1.84 (N_{LV})^{0.575} \cdot (P/P_b)^{0.05} \cdot N_L{}^{0.1}}{N_{GV} \cdot N_d^{0.0277}}$$

$$H_L = H_L(N_E)$$