3

ΟΙ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΡΟΗΣ ΚΑΙ Η ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΑ ΑΝΑΛΥΣΗΣ ΤΩΝ ΣΤΡΟΒΙΛΟΜΗΧΑΝΩΝ

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΟΙ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΤΗΣ ΡΟΗΣ ΚΑΙ Η ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΑ ΑΝΑΛΥΣΗΣ ΤΩΝ ΣΤΡΟΒΙΛΟΜΗΧΑΝΩΝ

3.1 ΟΙ ΒΑΣΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΤΗΣ ΡΟΗΣ

(Stodola (1945), Hawthorne and Olson (1960), Horlock (1973), Dixon (1978))

Ο σχεδιασμός των στροβιλομηχανών γίνεται με τη βοήθεια των εξισώσεων της ροής του εργαζόμενου ρευστού πολλές φορές κατόπιν σειράς υποθέσεων που απλοποιούν το όλο σύστημα.

Το σύστημα των εξισώσεων αυτών απαρτίζεται από τις παρακάτω εξισώσεις (Horlock (1973), Dixon (1978)):

(i) Την εξίσωση Συνέχειας : Η μαζική παροχή προς έναν όγκο ελέγχου ισούται με τη μαζική παροχή έξω από τον όγκο.

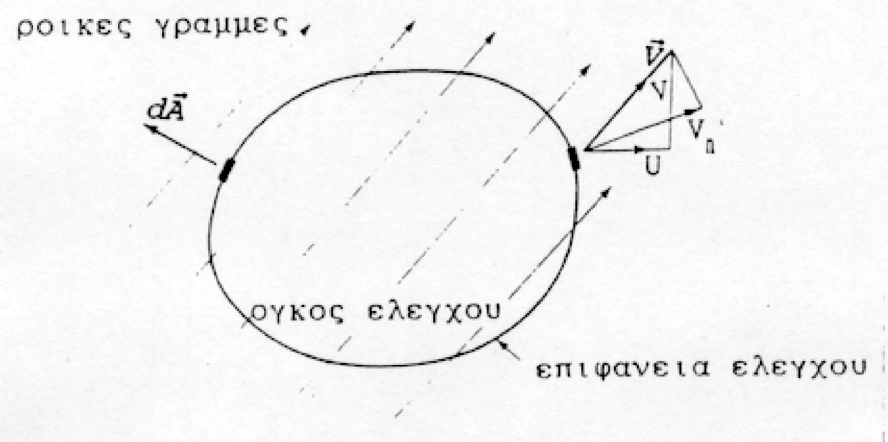
(ii) Την εξίσωση (γραμμικής) Ορμής: Το σύνολο των εξωτερικών δυνάμεων (πιέσεις, επιφανειακές και εσωτερικά διανεμόμενες τάσεις) που ασκούνται στον όγκο ελέγχου ισούται με το ρυθμό μεταβολής της ορμής του ρευστού που διέρχεται από τον όγκο ελέγχου.

(iii) Την εξίσωση γωνιακής Ορμής (Στροφορμής): Το άθροισμα των εξωτερικά εφαρμοζόμενων ροπών στον όγκο ελέγχου ισούται με το ρυθμό μεταβολής της στροφορμής του ρευστού που διέρχεται από τον όγκο ελέγχου.

(iv) Την εξίσωση Ενέργειας: Ο ρυθμός μεταφοράς θερμότητας προς τον όγκο ελέγχου μείον τη μηχανική ισχύ από τον όγκο ελέγχου ισούται με το ρυθμό μεταβολής της ολικής ενθαλπίας του ρευστού που διέρχεται από τον όγκο ελέγχου.

(v) Την εξίσωση Εντροπίας: Ο συνολικός ρυθμός του λόγου [μεταφερόμενη θερμότητα/τοπική θερμοκρασία] στα όρια του όγκου ελέγχου είναι μικρότερος (για μη αντιστρεπτές διεργασίες) ή ίσος (για αντιστρεπτές διεργασίες) με την καθαρή εκροή εντροπίας από τον όγκο ελέγχου.

Το παραπάνω σύστημα εξισώσεων παρατίθεται στον παρακάτω πίνακα σε δυο μορφές. Η πρώτη αφορά την περίπτωση που εξετάζουμε τις μεταβολές σε μια ορισμένη μάζα (οπως κάνουμε στη μηχανική του στερεού σωματιδίου η του στερεού σώματος) και η δεύτερη αφορά την περίπτωση που εξετάζουμε τη ροή γύρω από την εξωτερική επιφάνεια κάποιου όγκου ελέγχου (control volume) οπως φαίνεται στο σχήμα 3.1.



Σχημα 3.1 Ορισμος ογκου ελεγχου

Στον όγκο αυτό, ορίζουμε το διάνυσμα $d\vec{A}$ σαν το (τοπικά) κάθετο προς την εξωτερικά κάθετη κατεύθυνση του απειροελάχιστου εμβαδού $d\vec{A}$ και το διάνυσμα $\vec{V}$ σαν το διάνυσμα ροής με συνιστώσες U, V για ορθογώνιο σύστημα (καρτεσιανών) συντεταγμένων η για σύστημα αξόνων που είναι κάθετοι-εφαπτόμενοι του κάθε σημείου της εξωτερικής επιφάνειας του όγκου ελέγχου.

Πίνακες των βασικών εξισώσεων της ροής ((Horlock, 1973)):

1. Διατήρηση μάζας (εξ. συνέχειας) :

m = constant	[3.1]	$\left(\frac{\partial m}{\partial t}\right)_{cv} = \int dm_{in} - \int dm_{out}$ $\frac{\partial}{\partial t}\int_{cv} \rho dV = \int_{cv} \frac{\partial \rho}{\partial t} dV$ $= \int \rho V_n dA_{in} - \int \rho V_n dA_{out} = -\int_{cs} \rho \vec{V} d\vec{A}$	[3.2]

2. Διατήρηση Γραμμικής Ορμής :

$\sum \vec{F} = \frac{d}{dt}\int \vec{V} dm = \int \frac{dV}{dt} dm$ $\rightarrow \sum F_x = \int \frac{dU}{dt} dm$	[3.3]	$\sum \vec{F} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\int_{cv} \vec{V} dm\right) + \int \vec{V} dm_{out} - \int \vec{V} dm_{in} =$ $\int_{cv} \left(\rho \vec{V}\right) dV + \int_{cs} \vec{V}\left(\rho \vec{V} \cdot d\vec{A}\right)$ $\sum \vec{F}_x = \frac{\partial}{\partial t}\left(\int_{cv} U dm\right) + \int U dm_{out} - \int U dm_{in} =$ $\int_{cv} \frac{\partial}{\partial t}(\rho U) dV + \int \left(\rho U V_n \cdot dA_{out}\right) - \int \left(\rho U V_n \cdot dA_{in}\right)$	[3.4]

3. Διατήρηση Γωνιακής Ορμής (Στροφορμής) :

$\sum \vec{F} \times \vec{r} = \frac{d}{dt}\int \left(\vec{V} \times \vec{r}\right) dm =$ $= \int \frac{d}{dt}\left(\vec{V} \times \vec{r}\right) dm$ $\sum r F_\theta = \int \frac{d}{dt}(rW) dm$	[3.5]	$\sum \vec{F} \times \vec{r} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\int_{cv} \left(\vec{V} \times \vec{r}\right) dm\right) + \int \left(\vec{V} \times \vec{r}\right) dm_{out} - \int \left(\vec{V} \times \vec{r}\right) dm_{in} =$ $\int_{cv} \frac{\partial}{\partial t}\left(\rho \vec{V} \times \vec{r}\right) dV + \int_{cs} \left(\vec{V} \times \vec{r}\right)\left(\rho \vec{V} \cdot d\vec{A}\right)$ $\sum r F_\theta = \frac{\partial}{\partial t}\left(\int_{cv} (rW) dm\right) + \int rW dm_{out} - \int rW dm_{in} =$ $\int_{cv} \frac{\partial}{\partial t}(\rho r W) dV + \int \rho r W V_n \cdot dA_{out} - \int \rho r W V_n \cdot dA_{in}$ [3.6]

4. Διατηρηση Ενέργειας (1ο αξίωμα θερμοδυναμικής) :

$\mathrm{Q-W}=\Delta\left(\int \mathrm{edm}\right)$ [3.7]	$\dot{Q}-\dot{W}_s=\frac{\partial}{\partial t}\left(\int_{cv} edm\right)+\int h_0 dm_{out}-\int h_0 dm_{in}=$ $\int_{cv}\frac{\partial}{\partial t}(\rho e)dV+\int_{cs}\rho h_0 \vec{\mathrm{V}}\cdot d\vec{A}$ [3.8]

5. Εξίσωση Εντροπίας (2ο αξίωμα θερμοδυναμικής) :

$\frac{\mathrm{dQ}}{\mathrm{T}}\leq \mathrm{ds}$ [3.9]	$\int_{cs}\frac{dQ}{T}\leq\frac{\partial}{\partial t}\left(\int_{cv} sdm\right)+\int sdm_{out}-\int sdm_{in}\leq$ $\left(\int_{cv}\frac{\partial}{\partial t}(\rho s)dV\right)+\int_{cs}\rho s\vec{V}\cdot d\vec{A}$ [3.10]

Όπου,

m: παροχή μάζας,

h_0: ολική ενθαλπία,

e, s: ειδική εσωτερική ενέργεια και εντροπία.

Παρακάτω οι εξισώσεις ορμής και ενέργειας δίδονται και στη διαφορική μορφή τους για ροή χωρίς χημικές αντιδράσεις.

Α. Ιξώδης Ροή (Viscous Flow)

Εξίσωση συνέχειας:

$$\frac{\mathrm{D}\rho}{\mathrm{Dt}}+\rho\nabla\cdot\mathrm{V}=0 \quad [3.11]$$

$$\text{όπου}: \frac{\mathrm{D}\Phi}{\mathrm{Dt}}=\underbrace{\frac{\partial\Phi}{\partial \mathrm{t}}}_{\text{local derivative}}+\underbrace{\left(\vec{\mathrm{V}}\nabla\right)\Phi}_{\text{convective derivative}}=\frac{\partial\Phi}{\partial\mathrm{t}}+\mathrm{U}\frac{\partial\Phi}{\partial\mathrm{x}}+\mathrm{V}\frac{\partial\Phi}{\partial\mathrm{y}}+\mathrm{W}\frac{\partial\Phi}{\partial\mathrm{z}} \quad [3.12]$$

$$\nabla\cdot\vec{\mathrm{V}}=\frac{\partial\mathrm{U}}{\partial\mathrm{x}}+\frac{\partial\mathrm{V}}{\partial\mathrm{y}}+\frac{\partial\mathrm{W}}{\partial\mathrm{z}} \quad [3.13]$$

και

$$\vec{\mathrm{V}}\cdot\nabla=\mathrm{U}\frac{\partial}{\partial\mathrm{x}}+\mathrm{V}\frac{\partial}{\partial\mathrm{y}}+\mathrm{W}\frac{\partial}{\partial\mathrm{z}} \quad [3.14]$$

Ορμής :

x-συνιστώσα: $\rho\frac{DU}{Dt} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + \rho f_x$ [3.15]

y-συνιστώσα: $\rho\frac{DV}{Dt} = -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} + \rho f_y$ [3.16]

z-συνιστώσα: $\rho\frac{DW}{Dt} = -\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z} + \rho f_z$ [3.17]

και αναλύοντας τον τανυστή των τάσεων ως:

$$\tau_{xx} = \lambda\nabla\cdot\vec{V} + 2\mu\frac{\partial U}{\partial x} \qquad \tau_{yy} = \lambda\nabla\cdot\vec{V} + 2\mu\frac{\partial V}{\partial y} \qquad \tau_{zz} = \lambda\nabla\cdot\vec{V} + 2\mu\frac{\partial W}{\partial z}$$

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} = \mu\left(\frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial y}\right) \quad \tau_{xz} = \tau_{zx} = \mu\left(\frac{\partial W}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial z}\right) \quad \tau_{zy} = \tau_{yz} = \mu\left(\frac{\partial W}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial z}\right)$$

όπου μ το μοριακό ιξώδες και λ ο συντελεστής ολικού ιξώδους:

λ = - 2 / 3 μ   λαμβάνουμε :

$$\frac{\partial(\rho U)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho U^2)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho UV)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho UW)}{\partial z} =$$
$$-\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda\nabla\cdot\vec{V} + 2\mu\frac{\partial U}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\mu\left(\frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial y}\right)\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\mu\left(\frac{\partial W}{\partial y} + \frac{\partial U}{\partial z}\right)\right) + \rho f_x \quad [3.18]$$

$$\frac{\partial(\rho V)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho UV)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho V^2)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho VW)}{\partial z} =$$
$$-\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial x}\left(\mu\left(\frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial y}\right)\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\lambda\nabla\cdot\vec{V} + 2\mu\frac{\partial V}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\mu\left(\frac{\partial W}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial z}\right)\right) + \rho f_y \quad [3.19]$$

$$\frac{\partial(\rho W)}{\partial t}+\frac{\partial(\rho UW)}{\partial x}+\frac{\partial(\rho VW)}{\partial y}+\frac{\partial(\rho W^2)}{\partial z}=$$
$$-\frac{\partial p}{\partial z}+\frac{\partial}{\partial x}\left(\mu\left(\frac{\partial U}{\partial z}+\frac{\partial W}{\partial x}\right)\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\mu\left(\frac{\partial W}{\partial y}+\frac{\partial V}{\partial z}\right)\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\lambda\nabla\cdot\vec{V}+2\mu\frac{\partial W}{\partial z}\right)+\rho f_z \qquad [3.20]$$

όπου $f_{x,y,z}$ πεδιακή δύναμη.

Ενέργειας :

$$\rho\frac{D}{Dt}\left(e+\frac{V^2}{2}\right)=\rho q+\frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial T}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(k\frac{\partial T}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(k\frac{\partial T}{\partial z}\right)-$$
$$\frac{\partial(Up)}{\partial x}-\frac{\partial(Vp)}{\partial y}-\frac{\partial(Wp)}{\partial z}+\frac{\partial(U\tau_{xx})}{\partial x}+\frac{\partial(U\tau_{yx})}{\partial y}+\frac{\partial(U\tau_{zx})}{\partial z}+ \qquad [3.21]$$
$$\frac{\partial(U\tau_{xy})}{\partial x}+\frac{\partial(U\tau_{yy})}{\partial y}+\frac{\partial(U\tau_{zy})}{\partial z}+\frac{\partial(U\tau_{xz})}{\partial x}+\frac{\partial(U\tau_{yz})}{\partial y}+\frac{\partial(U\tau_{zz})}{\partial z}+\rho\vec{f}\cdot\vec{V}$$

B. Άτριβη Ροή (Inviscid Flow, Εξισώσεις Euler)

Συνέχειας:

$$\frac{D\rho}{Dt}+\rho\nabla\cdot\vec{V}=0 \qquad [3.22]$$

Ορμής :

x-συνιστώσα: $\rho\frac{DU}{Dt}=-\frac{\partial p}{\partial x}+\rho f_x$ [3.23]

y-συνιστώσα: $\rho\frac{DV}{Dt}=-\frac{\partial p}{\partial y}+\rho f_y$ [3.24]

z-συνιστώσα: $\rho\frac{DW}{Dt}=-\frac{\partial p}{\partial z}+\rho f_z$ [3.25]

Ενέργειας :

$$\rho\frac{D}{Dt}\left(e+\frac{V^2}{2}\right)=\rho q-\frac{\partial(Up)}{\partial x}-\frac{\partial(Vp)}{\partial y}-\frac{\partial(Wp)}{\partial z}+\rho\vec{f}\cdot\vec{V} \qquad [3.26]$$

3.2 Η ΜΗ ΣΥΝΕΚΤΙΚΗ ΡΟΗ ΣΕ ΔΥΟ ΔΙΑΣΤΑΣΕΙΣ

Η πιο χρήσιμη εξίσωση στην ανάλυση των στροβιλομηχανών είναι αυτή της ορμής. Η εξίσωση αυτη συνήθως, σε πρώτο στάδιο, χρησιμοποιείται στην έκδοση της άτριβης μη συνεκτικής ροής, όπου η επίδραση του μοριακού ιξώδους θεωρείται αμελητέα (μ=0). Αυτό επιτρέπεται γιατί συνήθως ο αριθμός Reynolds της ροής είναι μεγάλος, οπότε οι ζώνες που κυρίως επηρεάζονται από το ιξώδες είναι πολύ λεπτές (δηλαδή είναι τα οριακά στρώματα) (Horlock (1973), Dixon (1978), AFAPL-TR-78-52)

Το όλο πεδίο της ροής, συνήθως, αναλύεται σαν ένα άθροισμα διδιάστατων πεδίων είτε σε καρτεσιανές (x-y) είτε σε κυλινδρικές συντεταγμένες (r-θ).

Για κάθε μια από τις περιπτώσεις αυτές, η εξίσωση ορμής (της μη συνεκτικής ροής) έχει την παρακάτω μορφή:

(i) Καρτεσιανό επίπεδο (x-y)

Εδώ υποθέτουμε οτι όλες οι μεταβολές στην τρίτη κατεύθυνση είναι μηδενικές, δηλ.:

$$\frac{\partial}{\partial z} = 0 \tag{3.27}$$

Οι εξισώσεις ορμής, στις διευθύνσεις x και y είναι (για μόνιμη ροή):

x-διεύθυνση: $$-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} = U\frac{\partial U}{\partial x} + V\frac{\partial U}{\partial y} \tag{3.28}$$

y-διεύθυνση: $$-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} = U\frac{\partial V}{\partial x} + V\frac{\partial V}{\partial y} \tag{3.29}$$

όπου U, V είναι οι συνιστώσες της ταχύτητας $\vec{U}$, και p είναι η στατική πίεση.

Η εξίσωση συνέχειας είναι:

$$\frac{\partial(\rho U)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho V)}{\partial y} = 0 \tag{3.30}$$

ή

$$\rho\left(\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y}\right) + U\frac{\partial \rho}{\partial x} + V\frac{\partial \rho}{\partial y} = 0 \tag{3.31}$$

Η συνάρτηση των ροϊκών γραμμών ψ ορίζεται ως:

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} = \rho U \quad \text{και} \quad \frac{\partial \psi}{\partial x} = -\rho V \tag{3.32}$$

ενώ η στροβιλότητα (στην κατεύθυνση z) μας δίνεται από τη σχέση:

$$\zeta = \frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial y} \qquad [3.33]$$

Το διάνυσμα στροβιλότητας $\omega = \nabla \times \vec{V}$, έχει τις συνιστώσες (ξ, η, ζ) στις συντεταγμένες (x, y, z).

Αν ζ=0 το πεδίο είναι αστρόβιλο (irrotational), οπότε υφίσταται μια συνάρτηση δυναμικού (potentional function) φ, όπου:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = U \quad \text{και} \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = V \qquad [3.34]$$

Όταν η ροή είναι ισεντροπική και αστρόβιλη, οι δυο παραπάνω εξισώσεις ορμής μετασχηματίζονται (συναρτήσει των μεταβλητών **Ψ** (ή **ψ**) και **Φ** (ή **φ**)) στη μορφή :

$$\left(1 - M^2{}_x\right)\Psi_{xx} + \left(1 - M^2{}_y\right)\Psi_{yy} + 2M_x M_y \Psi_{xy} = 0 \qquad [3.35]$$

$$\left(1 - M^2{}_x\right)\Phi_{xx} + \left(1 - M^2{}_y\right)\Phi_{yy} + 2M_x M_y \Phi_{xy} = 0 \qquad [3.36]$$

όπου:

$$\begin{aligned} \Psi_{xx} &= \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} & \qquad \Phi_{xx} &= \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \\ \Psi_{yy} &= \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} & \text{και} \quad \Phi_{yy} &= \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \qquad [3.37] \\ \Psi_{xy} &= \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x \partial y} & \qquad \Phi_{xy} &= \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} \end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned} M_x &= \frac{U}{\alpha} = \frac{1}{\rho\alpha}\Psi_y = \frac{1}{\alpha}\Phi_x \\ M_y &= \frac{V}{\alpha} = -\frac{1}{\rho\alpha}\Psi_x = \frac{1}{\alpha}\Phi_y \end{aligned} \qquad [3.38]$$

όπου: α = ταχύτητα του ήχου:

$$\alpha = \left[\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_{\text{ισεντροπ.}}\right]^{1/2} = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)^{1/2} =$$

$$\left[\alpha_0{}^2 - \frac{\gamma-1}{2}\frac{1}{\rho^2}\left[\Psi_x{}^2 + \Psi_y{}^2\right]\right]^{1/2} = \qquad [3.39]$$

$$\left[\alpha_0{}^2 - \frac{\gamma-1}{2}\frac{1}{\rho^2}\left[\Phi_x{}^2 + \Phi_y{}^2\right]\right]^{1/2}$$

Η α_0 είναι η ταχύτητα του ήχου στις αντίστοιχες συνθήκες αναφοράς ολικής πιέσεως (P_0) και ολικής θερμοκρασίας (T_0).

Η αντίστοιχη τιμή της ρ_0 μας δίνεται από τη σχέση :

$$\frac{\rho}{\rho_0} = \left[1 - \frac{\gamma-1}{2}\frac{1}{\rho^2}\left[\Psi_x{}^2 + \Psi_y{}^2\right]\right]^{\frac{1}{\gamma-1}} = \left[1 - \frac{\gamma-1}{2}\left[\Phi_x{}^2 + \Phi_y{}^2\right]\right]^{\frac{1}{\gamma-1}} \qquad [3.40]$$

Οι γραμμές σταθερού **Ψ** είναι κάθετες στις γραμμές σταθερού **Φ** στο πεδίο ροής. Στην περίπτωση ασυμπίεστης ροής έχουμε $M_x=M_y=0$, οπότε ισχύει :

$$\nabla^2\Psi \equiv \Psi_{xx} + \Psi_{yy} = \frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Psi}{\partial y^2} \qquad [3.41]$$

και

$$\nabla^2\Phi \equiv \Phi_{xx} + \Phi_{yy} = \frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2} \qquad [3.42]$$

δηλ. οι **Ψ** και **Φ** ικανοποιούν τη μερική διαφορική εξίσωση Laplace.

Μερικές φορές το πεδίο ροής επιλύεται με βάση το πεδίο των ροϊκών γραμμών. Αν δε θεωρήσουμε τις κατευθύνσεις (s, n) ως εφαπτομενικές και κάθετες αντίστοιχα σε κάθε σημείο μιας γραμμής όπου Ψ=σταθ., οι εξισώσεις ορμής γίνονται:

$$-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial s} = V_s\frac{\partial V_s}{\partial s} \qquad [3.43]$$

και

$$-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial n} = \frac{V_s}{R} \qquad [3.44]$$

όπου: $V_s = \sqrt{U^2 + V^2}$

R είναι η ακτίνα καμπυλότητας της ροϊκής γραμμής στο θεωρούμενο σημείο. Η ακτίνα R είναι θετική όταν μετράται στην κατεύθυνση που αυξάνει το n. Στην παραπάνω περίπτωση μπορούμε να ολοκληρώσουμε την εξίσωση ορμής στην κατεύθυνση s (δηλ. κατά μήκος της ροϊκής γραμμής) οπότε έχουμε:

$$\int \frac{\partial p}{\partial \rho} + \frac{{V_s}^2}{2} = \sigma\tau\alpha\theta. \qquad [3.45]$$

Αυτη είναι η πιο βασική έκφραση του γνωστού μας νόμου του Bernoulli. Αν η ροή είναι <u>ασυμπίεστη</u> η εξίσωση αυτη γίνεται :

$$\frac{p}{\rho} + \frac{{V_s}^2}{2} = \sigma\tau\alpha\theta. = \frac{p_0}{\rho_0} \qquad [3.46]$$

για μια ορισμένη ροϊκή γραμμή, όπου P_0 είναι η ολική πίεση.

Αν η ροή είναι <u>συμπιεστή</u> αλλά η εκτόνωση/συμπίεση κατά μήκος της ροϊκής γραμμής είναι ισεντροπική (δηλ. δεν έχουμε μεταφορά θερμότητας κάθετα προς τις ρόκες γραμμές και φυσικά μ=0) η εξίσωση αυτη γράφεται:

$$\frac{\gamma}{\gamma - 1}\frac{p}{\rho} + \frac{{V_s}^2}{2} = \frac{\gamma}{\gamma - 1}\frac{p_0}{\rho_0} = \sigma\tau\alpha\theta. \qquad [3.47]$$

κατά μήκος της ροϊκής γραμμής.

Μεταξύ δυο ροϊκών γραμμών, σε απόσταση Δn μεταξύ τους, ο νόμος της συνέχειας μας δίνει:

$$\rho V_s \Delta n = \sigma\tau\alpha\theta. \qquad [3.48]$$

κατά μήκος ενός ροϊκού σωλήνα.

Η στροβιλότητα (vorticity) ζ σε σχέση με τις κατευθύνσεις (s, n) γίνεται:

$$\zeta = -\frac{\partial V_s}{\partial n} - \frac{V_s}{R} \qquad [3.49]$$

<u>(ii) Αξονοσυμμετρικό σύστημα αξόνων (r, θ, z)</u>

Εδώ υποθέτουμε οτι η ροή δε μεταβάλλεται στην κατεύθυνση θ, δηλ. παντού έχουμε

$$\frac{\partial}{\partial \theta} = 0 \qquad [3.50]$$

Οι τρεις εξισώσεις ορμής (στις κατευθύνσεις r, θ, z αντίστοιχα) τότε γίνονται:

r-διεύθυνση: $$-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r} = U\frac{\partial V}{\partial z} + V\frac{\partial V}{\partial r} - \frac{W^2}{r} \qquad [3.51]$$

θ-διεύθυνση: $0 = U\frac{\partial W}{\partial z} + V\frac{\partial W}{\partial r} - \frac{VW}{r}$ [3.52]

z-διεύθυνση: $-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r} = U\frac{\partial U}{\partial z} + V\frac{\partial U}{\partial r}$ [3.53]

(V, W, U είναι οι τρεις συνιστώσες του διανύσματος της ταχύτητας $\vec{V}$).

Η αντίστοιχη εξίσωση συνέχειας γίνεται :

$$\frac{\partial}{\partial r}(\rho V r) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho U r) = 0 \qquad [3.54]$$

ενώ το διάνυσμα στροβιλότητας:

$$\vec{\omega} = \nabla \times \vec{V} \qquad [3.55]$$

έχει τις εξής συνιστώσες, $\vec{\omega} = \vec{\omega}(\xi, \eta, \zeta)$,

όπου $\xi = -\frac{\partial W}{\partial z}$, $\eta = \frac{\partial V}{\partial z} - \frac{\partial U}{\partial r}$, $\zeta = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rW)$ Στο σύστημα των τριών εξισώσεων της ορμής μπορούμε να κάνουμε απαλοιφή της πίεσης p, οπότε με τη βοήθεια των συνιστωσών της στροβιλότητας έχουμε το παρακάτω σύστημα εξισώσεων :

$$\xi\frac{\partial V}{\partial r} + \zeta\frac{\partial V}{\partial z} = V\frac{\partial \xi}{\partial r} + U\frac{\partial \xi}{\partial z} \qquad [3.56]$$

$$\xi\frac{\partial W}{\partial r} + \zeta\frac{\partial W}{\partial z} + n\frac{W}{r} = V\frac{\partial n}{\partial r} + U\frac{\partial n}{\partial z} + W\frac{\xi}{r} \qquad [3.57]$$

$$\xi\frac{\partial U}{\partial r} + \zeta\frac{\partial U}{\partial z} = V\frac{\partial \zeta}{\partial r} + U\frac{\partial \zeta}{\partial z} \qquad [3.58]$$

Οι εξισώσεις του συστήματος αυτού αποκαλούνται εξισώσεις του Helmholz για τη στροβιλότητα. Σε διανυσματική έκφραση το σύστημα εκπροσωπεί τη (διανυσματική) εξίσωση:

$$(\vec{\omega} \cdot \nabla)\vec{V} = (\vec{V} \cdot \nabla)\vec{\omega} \qquad [3.59]$$

Η συνάρτηση των ροϊκών γραμμών **Ψ** εδώ ορίζεται ως εξής:

$$\frac{\partial \Psi}{\partial z} \equiv \Psi_z = -\rho r V \quad \text{και} \quad \frac{\partial \Psi}{\partial r} \equiv \Psi_r = -\rho r U \qquad [3.60]$$

ενώ η αντίστοιχη μορφή των ροϊκών εξισώσεων είναι:

$$\left(1 - M_r^{\,2}\right)\Psi_{rr} + \left(1 - M_z^{\,2}\right)\Psi_{zz} - 2M_r M_z \Psi_{rz} - \frac{1}{r}\Psi_r = 0 \qquad [3.61]$$

Αν $|\vec{\omega}| = 0$, δηλ. ζ=n=ξ, τότε υφίσταται η συνάρτηση δυναμικού **Φ**, όπου

$\frac{\partial \Phi}{\partial r} = V$, $\frac{\partial \Phi}{\partial z} = U$

και η αντίστοιχη εξίσωση είναι :

$$\left(1 - M_r^{\,2}\right)\Phi_{rr} + \left(1 - M_z^{\,2}\right)\Phi_{zz} - 2M_r M_z \Phi_{rz} + \frac{1 + M_\theta^{\,2}}{r}\Phi_r = 0 \qquad [3.62]$$

Όταν V=0 παντού, τότε η εξίσωση ορμής στην κατεύθυνση r γίνεται:

$$\frac{1}{r}\frac{\partial p}{\partial r} = \frac{W^2}{r} \qquad [3.63]$$

Η εξίσωση αυτη αποκαλείται συνήθως "συνθήκη ακτινικής ισορροπίας".

<u>3.3 ΟΙ ΑΔΙΑΣΤΑΤΕΣ ΠΟΣΟΤΗΤΕΣ ΤΩΝ ΣΤΡΟΒΙΛΟΜΗΧΑΝΩΝ</u>

Οι παραπάνω εξισώσεις που διέπουν το πεδίο ροής στις στροβιλομηχανές είναι, εν γένει, μη γραμμικές και μέχρι πριν μερικά χρόνια δύσκολο να λυθούν απ' ευθείας (αριθμητικώς). Γι' αυτό, πολλές φορές η ανάλυση των στροβιλομηχανών στηριζόταν σε αδιάστατες ποσότητες που περιλαμβάνουν τις διάφορες παραμέτρους των εξισώσεων ροής σύμφωνα με το θεώρημα του Buckingham. Λόγω της μεγάλης χρησιμότητας τους (δυνατότητα πειραματικής μέτρησης και εμπειρικού συσχετισμού τους), καθιερώθηκαν σαν παράμετροι σύγκρισης διαφορετικών στροβιλομηχανών και παρουσίασης των λειτουργικών αποδόσεων των μηχανών αυτών, (Horlock !973), Dixon (1978), Cohen et al (1972)).

Στην ανάλυση, λοιπόν, των στροβιλομηχανών ενδιαφερόμαστε άμεσα για τρία μεγέθη:

(α) Για την απόδοση (η) της μηχανής,

(β) Για την παροχή της μηχανής ($\dot{m}$),

(γ) Για το έργο που προσφέρει η απορροφά η μηχανή.

Ελεύθερες μεταβλητές είναι οι αρχικές συνθήκες (στην είσοδο) της στροβιλομηχανής, η ταχύτητα (στροφές) του άξονα (N), η γεωμετρία της μηχανής (διάμετρος D κλπ), και τα χαρακτηριστικά του ρευστού (π.χ. ιξώδες μ, σταθερές του αερίου γ, R κλπ).

Επιθυμούμε, λοιπόν, να γνωρίζουμε τις συναρτήσεις:

$$\dot{m}, \eta, \Delta H = f\left(P_{01}, T_{01}, P_{02}, N, D, R, \mu, \gamma\right) \qquad [3.64]$$

(για συμπιεστή ροή) ή

$$\dot{m}, \eta, H_T = f\left(g\Delta h, N, D, \rho, \mu\right) \qquad [3.65]$$

(για ασυμπίεστη ροή)

όπου:

$H_T =$ ισχύς της μηχανής $= \eta \cdot \dot{m} \cdot g \cdot \Delta h$

$\Delta h =$ υψομετρική διαφορά πίεσης, ώστε: $\Delta p_0 = \rho \cdot g \cdot \Delta h$

Για συμπιεστή ροή (που είναι η πιο συνήθης στις στροβιλομηχανές των αεριοστροβίλων) και αντικαθιστώντας την μεταβολή σε ολική ενθαλπία (ΔΗ) από την αντίστοιχη μεταβολή σε ολική θερμοκρασία του ρευστού, έχουμε τις παρακάτω σχέσεις:

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\dot{m}\sqrt{RT_{01}}}{P_{01} \cdot D^2} \\ \eta \\ \dfrac{\Delta T_0}{T_{01}} \end{array}\right\} = f\left\{\frac{N \cdot D}{\sqrt{R \cdot T_{01}}}, \frac{P_{01}}{P_{02}}, \frac{\dot{m}}{\mu \cdot D}, \gamma\right\} \qquad [3.66]$$

Ο όρος $\left(\dot{m}/\mu \cdot D\right)$, είναι μορφή αριθμού Reynolds. Συνήθως οι στροβιλομηχανές δεν επηρεάζονται από τον αριθμό Re, όταν αυτός περάσει κάποια οριακή τιμή.

Οι παραπάνω σχέσεις χρησιμοποιούνται κατά διάφορους τρόπους, ανάλογα με τις ανάγκες της μεθόδου ανάλυσης. Οι πιο συνήθεις περιπτώσεις είναι:

(i) **Για τη λειτουργία με δοθέν ρευστό.**

Οι παράμετροι R, γ είναι πλέον σταθερές και απαλείφονται (με αποτέλεσμα βέβαια οι "αδιάστατες" ποσότητες να παύουν να είναι όντως αδιάστατες).

Έτσι έχουμε:

$$\frac{\dot{m}\sqrt{T_{01}}}{P_{01}\cdot D^2},\eta,\frac{\Delta T_0}{T_{01}}=f\left(\frac{N\cdot D}{\sqrt{T_{01}}},\frac{P_{01}}{P_{02}},\frac{\dot{m}}{\mu\cdot D}\right)\approx f\left(\frac{N\cdot D}{\sqrt{T_{01}}},\frac{P_{01}}{P_{02}}\right) \qquad [3.67]$$

λόγω λειτουργίας σε πολύ υψηλό αριθμό Reynolds (οπότε ανεξάρτητο του Reynolds).

(ii) **Ανάλυση λειτουργίας δοθείσας μηχανής.**

Εδώ οι γεωμετρικές παράμετροι είναι σταθερές και απαλείφονται από τους όρους (που, φυσικά, παύουν να είναι αδιάστατοι). Τότε έχουμε :

$$\frac{\dot{m}\sqrt{T_{01}}}{P_{01}\cdot D^2},\eta,\frac{\Delta T_0}{T_{01}}=f\left(\frac{N}{\sqrt{T_{01}}},\frac{P_{01}}{P_{02}}\right) \qquad [3.68]$$

Είναι φανερό ότι ισχύουν και οι παρακάτω σχέσεις:

$$\frac{P_{02}}{P_{01}}=f_1\left(\frac{\dot{m}\sqrt{\gamma RT_{01}}}{P_{01}D^2},\frac{ND}{\sqrt{\gamma RT_{01}}}\right)=f_1\left(\frac{\dot{m}\sqrt{T_{01}}}{P_{01}},\frac{N}{\sqrt{T_{01}}}\right)$$

$$\eta=f_2\left(\frac{\dot{m}\sqrt{\gamma RT_{01}}}{P_{01}D^2},\frac{ND}{\sqrt{\gamma RT_{01}}}\right)=f_2\left(\frac{\dot{m}\sqrt{T_{01}}}{P_{01}},\frac{N}{\sqrt{T_{01}}}\right)$$

Οι παραπάνω αδιάστατοι όροι μπορούν να μετατραπούν ως εξής:

(α) Διαιρούμε τους όρους $\frac{\dot{m}\sqrt{RT_{01}}}{P_{01}\cdot D^2}$ και $\frac{\Delta T_0}{T_{01}}$ με τους όρους: $\frac{N\cdot D}{\sqrt{R\cdot T_{01}}}$ και $\left(\frac{N\cdot D}{\sqrt{R\cdot T_{01}}}\right)^2$ αντίστοιχα.

(β) σχηματίζουμε τους όρους ως ακολούθως :

$$\frac{\dot{m}}{\rho_{01}\cdot N\cdot D^3},\frac{R\cdot\Delta T_0}{N^2\cdot D^2}=f\left(\frac{N\cdot D}{\sqrt{R\cdot T_{01}}}\right)$$

και αφού $R=c_p\left[1-\left(\frac{1}{\gamma}\right)\right]$, έχουμε τη γενική σχέση:

$$\frac{\Delta W}{N^2 \cdot D^2} = \frac{c_p \cdot \Delta T_0}{N^2 \cdot D^2} = f\left(\frac{\dot{m}}{\rho_{01} \cdot N \cdot D^3}, \frac{N \cdot D}{\sqrt{R \cdot T_{01}}}\right) \quad [3.69]$$

όπου ΔW = ειδικό έργο (έργο ανά μονάδα μάζας)

(γ) Επειδή η παροχή μάζας $\dot{m}$ είναι ανάλογη της αξονικής ταχύτητας (U_p), δηλαδή:

$$\dot{m} = \rho_{01} \cdot U_p \cdot D^2 \quad [3.70]$$

έχουμε:

$$\psi = \frac{\Delta W}{U_p{}^2} = \frac{\Delta W}{\pi^2 \cdot N^2 \cdot D^2} = f\left(\frac{U}{\pi \cdot N \cdot D}\right) = f(\varphi) \quad [3.71]$$

όπου : ψ = συντελεστής φόρτισης (loading coefficient)

φ = συντελεστής ροής (flow coefficient)

U_p = ταχύτητα περιστροφής πτερύγιου = πND (όπου N=στροφές (RPM), D=διάμετρος πτερυγίου)

Δηλαδή έχουμε:

$$\psi = \Delta W / U_p{}^2 \quad [3.72]$$

και

$$\varphi = U / U_p{}^2 \quad [3.73]$$

Διαγράμματα του τύπου ψ=f(φ) λέγονται και διαγράμματα λειτουργίας των στροβιλομηχανών και χρησιμοποιούνται για τον εντοπισμό των συνθηκών λειτουργίας σε κατάσταση διαφορετική από αυτή για την οποία σχεδιάστηκε η στροβιλομηχανή ή για τη σύζευξη στροβιλομηχανών συνδεδεμένων αεροδυναμικά ή μέσω άξονα.