

## 2. Εξισώσεις Κίνησης

### 2.1 Εισαγωγή

Η ανάλυση και προσομοίωση της κίνησης αεροσκάφους που μεταβάλλεται στον χρόνο βασίζεται σε ένα μαθηματικό μοντέλο που περιγράφει επαρκώς το ιδιαίτερα περίπλοκο δυναμικό σύστημα του αεροσκάφους. Το χαρακτηριστικό γνώρισμα της δυναμικής του αεροσκάφους, το οποίο το κάνει να ξεχωρίζει από πολλά άλλα μηχανολογικά δυναμικά συστήματα, είναι η περιπλοκότητα των αεροδυναμικών φορτίων. Κάθε αεροσκάφος περιλαμβάνει στοιχεία που μπορεί να θεωρηθούν ως απόλυτα στερεά ή ελαστικά και είναι συνδεδεμένα μεταξύ τους. Επίσης περιλαμβάνει περιστρεφόμενα μέρη, όπως αυτά που περιέχονται στο προωθητικό σύστημα, και άλλα κινούμενα μέρη, όπως οι επιφάνειες ελέγχου κ.λ.π. Τα δομικά στοιχεία του αεροσκάφους βρίσκονται υπό την επίδραση των αεροδυναμικών φορτίων και του βάρους. Στην γενική περίπτωση, τα αεροδυναμικά φορτία έχουν μη γραμμική εξάρτηση από το σχήμα του αεροσκάφους και από την μορφή της κίνησης που εκτελεί. Σε πολλές περιπτώσεις σύνθετης κίνησης αεροσκάφους, παρατηρούνται συζεύξεις αεροδυναμικές ή και αεροελαστικές, που περιπλέκουν σημαντικά την περιγραφή του συστήματος, και που σε συνδυασμό με τις μεγάλες παραμορφώσεις ελαστικών κατασκευών καθιστού πολύ δύσκολη και πολλές φορές αδύνατη την μαθηματική περιγραφή με απλοποιημένα μοντέλα και θεωρίες. Είναι λοιπόν αναγκαίο να εισάγουμε απλουστευτικές παραδοχές που θα καταστήσουν εφικτή και εύχρηστη την περιγραφή του δυναμικού συστήματος του αεροσκάφους και θα επιτρέψουν την περιγραφή της πτητικής του κατάστασης και τον προσδιορισμό της τροχιάς του στις πλέον γενικές συνθήκες.

Στο κεφάλαιο αυτό θεωρούμε ότι το αεροσκάφος είναι μη-ελαστικό και μη-παραμόρφωσιμο σώμα με έξι βαθμούς ελευθερίας κίνησης που κινείται στην ατμόσφαιρα κάτω από την επίδραση της βαρύτητας και των αεροδυναμικών φορτίων. Τα αεροδυναμικά φορτία ενεργούν στο κέντρο βάρους του αεροσκάφους σε μορφή συνισταμένων δυνάμεων και ροπών που βρίσκουμε από την αεροδυναμική ανάλυση που όπως και στα προηγούμενα κεφάλαια βασίζεται στην γραμμική θεωρία.

### 2.2 Εξισώσεις στερεού σώματος

Οι εξισώσεις στερεού σώματος με την εφαρμογή των νόμων του Newton σε μία στοιχειώδη μάζα,  $dm$ , του αεροσκάφους όπως απεικονίζεται στο Σχ. 2.2.1. Οι ταχύτητες και επιταχύνσεις θεωρούνται ως προς ένα αδρανειακό σύστημα αναφοράς  $F_E$ , όπως είναι το προσαρτημένο στην γη σύστημα αναφοράς. Υποθέτουμε ότι η ταχύτητα του ανέμου είναι μηδενική,  $\vec{W} = 0$ , και η ταχύτητα ως προς το σύστημα  $F_E$  είναι  $\vec{V}_E$  ενώ η ταχύτητα ως προς το σύστημα που είναι προσαρμοσμένο στο αεροσκάφος και συμβολίζεται με  $F_B$  είναι  $\vec{V}_B$  και έχει συνιστώσες

$$\vec{V}_B = [u, v, w]^T \quad 2.2.1$$

Το διάνυσμα θέσης της στοιχειώδους μάζας  $dm$  από την αρχή του συστήματος  $F_E$  είναι  $\vec{r}_c + \vec{r}$  όπως φαίνεται στο Σχ. 2.2.1, όπου οι συντεταγμένες του διανύσματος

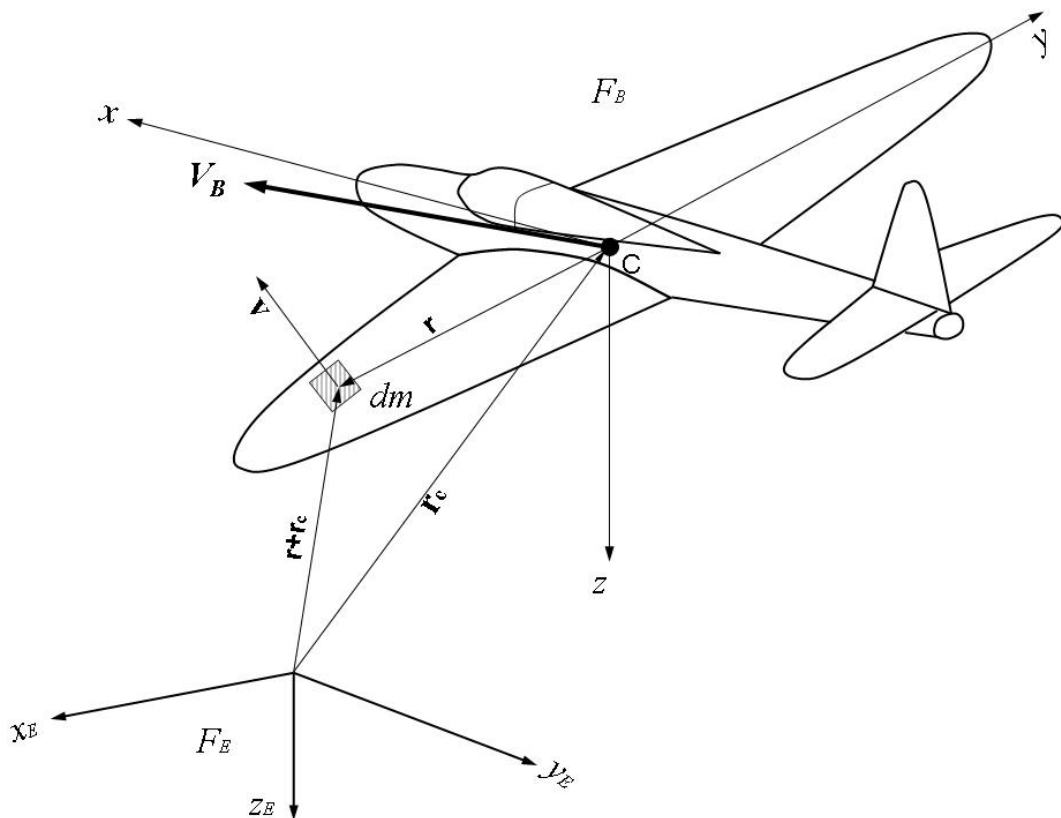
θέσης του κέντρου βάρους (KB), στο σύστημα  $F_E$  είναι  $\vec{r}_{Ec}$  και στο σύστημα συντεταγμένων  $F_B$  είναι  $\vec{r}_B$  και δίνονται από

$$\vec{r}_{CE} = [x_E, y_E, z_E]^T \quad 2.2.2$$

$$\vec{r}_B = [x, y, z]^T \quad 2.2.3$$

Η αδρανειακή ταχύτητα της στοιχειώδους μάζας  $dm$  είναι

$$\vec{v}_E = \dot{\vec{r}}_{CE} + \dot{\vec{r}}_E = \vec{V}_E + \dot{\vec{r}}_E \quad 2.2.4$$



**Σχήμα 2.2.1** Ταχύτητες ως προς το αδρανειακό σύστημα αναφοράς  $F_E$  και ως προς το σύστημα αναφοράς  $F_B$  που είναι προσαρτημένο στο αεροσκάφος

Η ορμή της στοιχειώδους μάζας  $dm$  είναι  $\vec{v}_E dm$  ενώ η ορμή για ολόκληρο το αεροσκάφος βρίσκεται από ολοκλήρωση ως

$$\int \vec{v}_E dm = \int (\vec{V}_E + \dot{\vec{r}}_E) dm = \vec{V}_E \int dm + \int \dot{\vec{r}}_E dm \quad 2.2.5$$

επειδή  $C$  είναι το κέντρο μάζας  $\int \vec{r}_E dm = 0$  και η παραπάνω σχέση απλοποιείται ως

$$\int \vec{v}_E dm = \vec{V}_E m \quad 2.2.6$$

όπου  $m$  είναι η ολική μάζα του αεροσκάφους.

Ο δεύτερος νόμος του Newton στο σύστημα συντεταγμένων  $F_E$  εκφράζεται από την παρακάτω σχέση.

$$d\vec{\mathbf{f}}_E = \dot{\vec{\mathbf{v}}}_E dm \quad 2.2.7$$

που μετά από ολοκλήρωση και εφαρμογή της Εξ. (2.2.6) είναι

$$\vec{\mathbf{f}}_E = \int d\vec{\mathbf{f}}_E = \int \dot{\vec{\mathbf{v}}}_E dm$$

ή

$$\vec{\mathbf{f}}_E = m\dot{\vec{\mathbf{V}}}_E \quad 2.2.8$$

όπου η δύναμη  $\vec{\mathbf{f}}_E$  είναι η συνισταμένη των εξωτερικών δυνάμεων που εξασκούνται στο αεροσκάφος. Η Εξ. (2.2.8) συνδέει τις εξωτερικές δυνάμεις με την κίνηση του ΚΒ. Η εξίσωση που συνδέει τις εξωτερικές ροπές με την περιστροφή του αεροσκάφους βρίσκεται από την αρχή της διατήρησης της στροφορμής (moment of momentum)  $d\vec{\mathbf{h}} = \vec{\mathbf{r}} \times (\vec{\mathbf{v}} dm) = \tilde{\vec{\mathbf{r}}} (\vec{\mathbf{v}} dm)$  οπότε η μεταβολή της στροφορμής είναι

$$\frac{d}{dt}(d\vec{\mathbf{h}}_E) = \dot{\tilde{\vec{\mathbf{r}}}}_E \vec{\mathbf{v}}_E dm + \tilde{\vec{\mathbf{r}}}_E \dot{\vec{\mathbf{v}}}_E dm \quad 2.2.9$$

όπου σύμφωνα με την Εξ. (2.2.4) ο όρος  $\dot{\tilde{\vec{\mathbf{r}}}}_E$  είναι

$$\dot{\tilde{\vec{\mathbf{r}}}}_E = \tilde{\vec{\mathbf{v}}}_E - \tilde{\vec{\mathbf{V}}}_E, \quad \dot{\tilde{\vec{\mathbf{r}}}}_E = \begin{bmatrix} 0 & -\dot{z}_E & \dot{y}_E \\ \dot{z}_E & 0 & -\dot{x}_E \\ -\dot{y}_E & \dot{x}_E & 0 \end{bmatrix}$$

Η ροπή των εξωτερικών φορτίων γύρω από το ΚΒ είναι

$$d\vec{\mathbf{M}} = \vec{\mathbf{r}} \times d\vec{\mathbf{f}}$$

και η ροπή που παράγεται από την στοιχειώδη δύναμη  $d\vec{\mathbf{f}}$  είναι

$$d\vec{\mathbf{M}}_E = \tilde{\vec{\mathbf{r}}}_E d\vec{\mathbf{f}} = \tilde{\vec{\mathbf{r}}}_E (\dot{\vec{\mathbf{v}}}_E dm) \quad 2.2.10$$

οπότε η Εξ. (2.2.9) γίνεται

$$\begin{aligned} d\vec{\mathbf{M}}_E &= \frac{d}{dt}(d\vec{\mathbf{h}}_E) - \dot{\tilde{\vec{\mathbf{r}}}}_E \vec{\mathbf{v}}_E dm = \\ &= \frac{d}{dt}(d\vec{\mathbf{h}}_E) - (\tilde{\vec{\mathbf{v}}}_E - \tilde{\vec{\mathbf{V}}}_E) \vec{\mathbf{v}}_E dm \end{aligned} \quad 2.2.11$$

και επειδή  $\vec{v} \times \vec{v} = 0$  η παραπάνω σχέση γίνεται

$$d\vec{M}_E = \frac{d}{dt}(d\vec{h}_E) - \tilde{V}_E \vec{v}_E dm \quad 2.2.12$$

Με ολοκλήρωση της παραπάνω σχέσης βρίσκουμε ότι η συνολική ροπή στο σύστημα συντεταγμένων  $F_E$  είναι

$$\int d\vec{M}_E = \frac{d}{dt} \int d\vec{h}_E - \tilde{V}_E \int \vec{v}_E dm \quad 2.2.13$$

όπου τα ολοκληρώματα  $\int d\vec{f}_E$  και  $\int d\vec{M}_E$  εκφράζουν την συνολική δύναμη και την συνολική ροπή γύρω από το κέντρο βάρους, αντίστοιχα. Επι πλέον, λαμβάνοντας υπ' όψη ότι  $\vec{v} \times \vec{v} = 0$ , η Εξ. (2.2.13) με την Εξ. (2.2.6) δίνει την συνολική ροπή ως

$$\vec{M}_E = \dot{\vec{h}}_E = \int \tilde{r}_E \vec{v}_E dm \quad 2.2.14$$

Πρέπει να σημειωθεί ότι η παραπάνω σχέση ισχύει μόνο για το ΚΒ και πως όπως και η Εξ. (2.2.8) ισχύει ακόμα και όταν υπάρχει σχετική κίνηση των διαφόρων μερών του αεροσκάφους.

Η κίνηση του αεροσκάφους περιγράφεται από τις παρακάτω διανυσματικές εξισώσεις

$$\begin{aligned} \vec{f}_E &= m\dot{\vec{V}}_E \\ \vec{M}_E &= \dot{\vec{h}}_E \end{aligned}$$

που είναι ισοδύναμες με έξι εξισώσεις για τις επί μέρους συνιστώσες και που θα δείξουμε πιο αναλυτικά στα παρακάτω κεφάλαια.

Όταν η ταχύτητα του ανέμου  $\vec{W}$  δεν είναι μηδενική η ταχύτητα  $\vec{V}_E$  στην Εξ. (2.2.5) είναι η ταχύτητα  $\vec{V}_E^E$  του ΚΒ σχετικά με το αδρανειακό σύστημα  $F_E$ , η γωνιακή ορμή όμως είναι η ίδια οπότε στην γενική περίπτωση όπου  $\vec{W} \neq 0$  οι εξισώσεις κίνησης είναι

$$\begin{aligned} \vec{f}_E &= m\dot{\vec{V}}_E^E \\ \vec{M}_E &= \dot{\vec{h}}_E \end{aligned} \quad 2.2.13$$

### 2.3 Προσδιορισμός της γωνιακής ορμής $\vec{h}_E$

Οι συνιστώσες της γωνιακής ορμής  $\vec{h}_B$  στο σύστημα συντεταγμένων  $F_B$  δίνονται από

$$\vec{h}_B = \int d\vec{h}_B = \int \tilde{r}_B \times \vec{v}_B dm = \int \tilde{r}_B \vec{v}_B dm \quad 2.3.1$$

όπου

$$\tilde{\vec{r}} = \begin{bmatrix} 0 & -z & y \\ z & 0 & -x \\ -y & x & 0 \end{bmatrix}$$

Η γωνιακή ταχύτητα του αεροσκάφους ως προς το κινούμενο με το αεροσκάφος σύστημα συντεταγμένων,  $F_B$ , συμβολίζεται με  $\tilde{\vec{\omega}}_B$  και έχει συνιστώσες  $\tilde{\vec{\omega}}_B = [p, q, r]^T$ , όπου  $p, q, r$  είναι ο ρυθμός περιστροφής (roll), ο ρυθμός κλίσης (pitch), και ο ρυθμός πλάγιας κίνησης (yaw), αντίστοιχα. Τότε η ταχύτητα της στοιχειώδους μάζας  $dm$  είναι

$$\vec{v}_B = \vec{V}_B + \tilde{\vec{\omega}}_B \vec{r}_B \quad 2.3.2$$

όπου

$$\tilde{\vec{\omega}}_B = \begin{bmatrix} 0 & -r & q \\ r & 0 & -p \\ -q & p & 0 \end{bmatrix}$$

οπότε η γωνιακή ορμή στο σύστημα συντεταγμένων  $F_B$

$$\begin{aligned} \vec{h}_B &= \int \tilde{\vec{r}}_B (\vec{V}_B + \tilde{\vec{\omega}}_B \vec{r}_B) dm \\ &= \int \tilde{\vec{r}}_B \vec{V}_B dm + \int \tilde{\vec{r}}_B \tilde{\vec{\omega}}_B \vec{r}_B dm \\ &= \vec{V}_B \int \tilde{\vec{r}}_B dm + \int \tilde{\vec{r}}_B \tilde{\vec{\omega}}_B \vec{r}_B dm \end{aligned} \quad 2.3.3$$

όπου το πρώτο ολοκλήρωμα είναι μηδέν επειδή η αρχή του συστήματος συντεταγμένων βρίσκεται στο KB. Ο όρος  $\int \tilde{\vec{r}}_B \tilde{\vec{\omega}}_B \vec{r}_B dm$  στο δεύτερο ολοκλήρωμα είναι  $\int \tilde{\vec{r}}_B \tilde{\vec{\omega}}_B \vec{r}_B dm = \tilde{I}_B \tilde{\vec{\omega}}_B$  όπου  $\tilde{I}_B$  είναι το μητρώο αδράνειας και η Εξ. (2.3.3) γίνεται

$$\vec{h}_B = \tilde{I}_B \tilde{\vec{\omega}}_B \quad 2.3.4$$

$$\tilde{I}_B = \begin{bmatrix} I_x & -I_{xy} & -I_{xz} \\ -I_{yx} & I_y & -I_{yz} \\ -I_{zx} & -I_{zy} & I_z \end{bmatrix} \quad 2.3.5$$

όπου οι ροπές αδράνειας δίνονται από τις σχέσεις

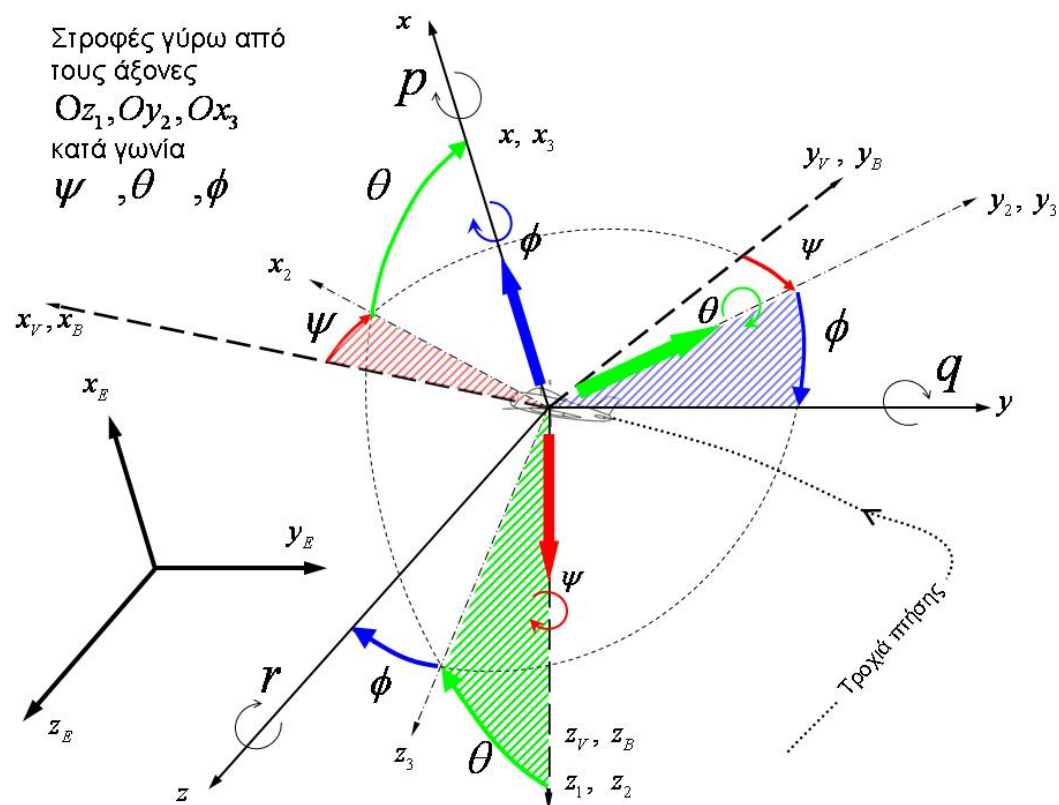
$$\begin{aligned} I_x &= \int (y^2 + z^2) dm, & I_y &= \int (x^2 + z^2) dm, & I_z &= \int (x^2 + y^2) dm \\ I_{xy} &= I_{yx} = \int xy dm, & I_{xz} &= I_{zx} = \int xz dm, & I_{yz} &= I_{zy} = \int yz dm \end{aligned} \quad 2.3.6$$

Όταν το επίπεδο  $(x,z)$  είναι επίπεδο συμμετρίας  $I_{xy} = I_{yz} = 0$ . Επί πλέον, όταν η κατεύθυνση του άξονα  $x$  εκλεγεί έτσι ώστε η ροπή αδράνειας να είναι και αυτή μηδέν,  $I_{zx} = 0$ , (κύριος άξονας) τότε το μητρώο αδράνειας έχει απλή διαγώνια μορφή.

#### 2.4 Προσανατολισμός και θέση αεροσκάφους

Η θέση και ο προσανατολισμός του αεροσκάφους προσδιορίζονται σχετικά με το αδρανειακό σύστημα συντεταγμένων  $F_E$  που είναι προσαρημένο στο έδαφος. Το διάνυσμα θέσης του κέντρου βάρους (KB) είναι  $\vec{r}_C$  και οι συντεταγμένες του είναι  $x_E, y_E, z_E$ . Ο προσανατολισμός του αεροσκάφους ως προς το σύστημα  $F_E$  επιτυγχάνεται με διαδοχικές περιστροφές γύρω από τους άξονες συντεταγμένων. Η σειρά περιστροφής είναι καθορισμένη και οι γωνίες περιστροφής ονομάζονται γωνίες Euler. Η καθορισμένη σειρά περιστροφής είναι:

1. Περιστροφή κατά γωνία  $\psi$  γύρω από τον άξονα  $Oz_1$  στο νέο σύστημα  $Cx_2y_2z_2$
2. Περιστροφή κατά γωνία  $\theta$  γύρω από τον άξονα  $Oy_2$  στο νέο σύστημα  $Cx_3y_3z_3$
3. Περιστροφή κατά γωνία  $\phi$  γύρω από τον άξονα  $Ox_3$  ώστε να προκύψει το τελικό σύστημα που έχει τον ίδιο προσανατολισμό με το αδρανειακό σύστημα συντεταγμένων  $F_E$



Σχήμα 2.4.1

Το εύρος των γωνιών Euler. είναι

$$\begin{array}{lll} -\pi \leq \psi < \pi & \dot{\eta} & 0 \leq \psi \leq 2\pi \\ -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} & & \\ -\pi \leq \phi < \pi & \dot{\eta} & 0 \leq \phi \leq 2\pi \end{array}$$

Οι γωνίες Euler.Είναι μοναδικές για τους περισσότερους προσανατολισμούς αεροσκαφών υπάρχουν όμως και εξαιρέσεις, όπως για παράδειγμα η κάθετη άνοδος ή κάθοδος όπου  $\theta = \pm\pi/2$  οπότε η περιστροφή  $(\psi, \theta, \phi) = (\psi + \alpha, \pm\pi/2, -\alpha)$  δίνει πάντα τον ίδιο προσανατολισμό ανεξάρτητα από την τιμή της γωνίας  $\alpha$ . Η παραπάνω δυσκολία αποφεύγεται με την χρήση των συνημίτονων κατεύθυνσης ή quaternions αντί για τις γωνίες Euler.

### Τροχιά πτήσης

Ο προσδιορισμός της τροχιάς πτήσης σχετικά με το σύστημα  $F_E$  απαιτεί να γνώση των συνιστωσών της ταχύτητας κατά μήκος των αξόνων του συστήματος  $F_E$ . Οι συνιστώσες της ταχύτητας στο σύστημα συντεταγμένων  $F_E$  προκύπτουν από τις γνωστές συνιστώσες της ταχύτητας  $\vec{V}_B^E$  στο σύστημα συντεταγμένων  $F_B$  που είναι προσαρμοσμένο στο αεροσκάφος με τον παρακάτω μετασχηματισμό συντεταγμένων

$$\vec{V}_E^E = \tilde{L}_{EB} \vec{V}_B^E \quad 2.4.1$$

όπου  $\tilde{L}_{EB}$  είναι το μητρώο των συνημίτονων κατεύθυνσης που αντιστοιχεί στην ανάστροφη σειρά περιστροφών από το αδρανειακό σύστημα  $F_E$  στο σύστημα  $F_B$  που είναι προσαρμοσμένο στο αεροσκάφος. Το μητρώο των συνημίτονων κατεύθυνσης  $\tilde{L}_{EB}$  δίνεται από

$$\tilde{L}_{EB} = \tilde{L}_z(-\psi)\tilde{L}_y(-\theta)\tilde{L}_x(-\phi) \quad 2.4.2$$

όπου τα μητρώα  $\tilde{L}_z(-\psi)$ ,  $\tilde{L}_y(-\theta)$ , και  $\tilde{L}_x(-\phi)$  είναι τα μητρώα περιστροφής  $\tilde{L}_1$ ,  $\tilde{L}_2$ , και  $\tilde{L}_3$  του παραρτήματος Α. Οπότε το μητρώο περιστροφής  $\tilde{L}_{EB}$  είναι

$$\tilde{L}_{EB} = \begin{bmatrix} \cos \theta \cos \psi & \sin \phi \sin \theta \cos \psi - \cos \phi \sin \psi & \cos \phi \sin \theta \cos \psi + \sin \phi \sin \psi \\ \cos \theta \sin \psi & \sin \phi \sin \theta \sin \psi + \cos \phi \cos \psi & \cos \phi \sin \theta \sin \psi - \sin \phi \cos \psi \\ -\sin \theta & \sin \phi \cos \theta & \cos \phi \cos \theta \end{bmatrix} \quad 2.4.3$$

και οι συντεταγμένες της τροχιάς βρίσκονται από την λύση της παρακάτω διαφορικής εξίσωσης.

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_E \\ \dot{y}_E \\ \dot{z}_E \end{bmatrix} = \dot{\tilde{X}}_E = \tilde{L}_{EB} \tilde{V}_B^E \quad 2.4.4$$

### Προσανατολισμός αεροσκάφους

Ο προσανατολισμός του αεροσκάφους βρίσκεται από την λύση μίας διαφορικής εξίσωσης που δίνει τις τιμές των γωνιών Euler. Υποθέτουμε ότι το αεροσκάφος υπόκειται σε μικρή μεταβολή τού προσανατολισμού κατά  $(\psi + \Delta\psi)$ ,  $(\theta + \Delta\theta)$ ,  $(\phi + \Delta\phi)$  σε χρόνο  $\Delta t$ . Τα μοναδιαία διανύσματα κατά μήκος των αξόνων  $x_1, y_2, z_3$  είναι  $\vec{i}_3, \vec{j}_2, \vec{k}_1$  οπότε το διάνυσμα περιστροφής δίνεται από

$$\Delta\vec{n} = \vec{i}_3 \Delta\phi + \vec{j}_2 \Delta\theta + \vec{k}_1 \Delta\psi \quad 2.4.4$$

όπου τα μοναδιαία διάνυσμα στο σύστημα  $F_B$  που είναι προσαρμοσμένο στο αεροσκάφος είναι

$$\vec{i}_{3B} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \vec{j}_{2B} = \begin{bmatrix} 0 \\ \cos\phi \\ -\sin\phi \end{bmatrix}, \quad \vec{k}_{1B} = \begin{bmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \sin\phi \\ \cos\theta \cos\phi \end{bmatrix}$$

και η γωνιακή ταχύτητα βρίσκεται από την Εξ. (2.4.4)

$$\vec{\omega} = \frac{\Delta\vec{n}}{\Delta t} = \vec{i}_3 \dot{\phi} + \vec{j}_2 \dot{\theta} + \vec{k}_1 \dot{\psi} \quad 2.4.5$$

αλλά  $\vec{\omega}_B = [p, q, r]^T$  δηλαδή

$$\vec{\omega}_B = \vec{i}_{3B} \dot{\phi} + \vec{j}_{2B} \dot{\theta} + \vec{k}_{1B} \dot{\psi}$$

ή

$$\begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\sin\phi \\ 1 & \cos\phi & \cos\theta \cos\phi \\ 1 & -\sin\phi & \cos\theta \cos\phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} = \tilde{R} \begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} \quad 2.4.6$$

δηλαδή

$$\begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \sin\phi \tan\theta & \cos\phi \tan\theta \\ 1 & \cos\phi & -\sin\phi \\ 1 & \sin\phi \sec\theta & \cos\phi \sec\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} = \tilde{T} \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} \quad 2.4.7$$



## 2.5 Εξισώσεις κίνησης Euler

Η Εξ. (2.2.15) δείχνει ότι για τον προσδιορισμό της ροπής απαιτείται να υπολογίσουμε την παράγωγο της γωνιακής ορμής ή στροφορμής,  $\vec{h}$ . Η παράγωγος του διανύσματος  $\vec{h}$  περιέχει τις ροπές αδράνειας γύρω από τους άξονες που χρησιμοποιούνται για την περιγραφή της κίνησης του αεροσκάφους. Όταν οι άξονες αυτοί είναι σταθεροί σε σχέση με το αδρανειακό σύστημα συντεταγμένων, τότε τα ολοκληρώματα που απαιτούνται για τον υπολογισμό των ροπών αδράνειας είναι μεταβλητές στις εξισώσεις κίνησης. Η χρήση των εξισώσεων κίνησης σε αυτή την μορφή δεν είναι εύκολη και προτιμάμε να εκφράσουμε τις εξισώσεις κίνησης στο σύστημα συντεταγμένων  $F_B$  για το οποίο οι ροπές αδράνειας είναι σταθερές.

Η εξίσωση ισορροπίας δυνάμεων στο σύστημα  $F_E$  είναι

$$\vec{f}_E = m\dot{\vec{V}}_E \quad 2.5.1$$

Η παραπάνω σχέση στο σύστημα  $F_B$  που είναι προσαρμοσμένο στο κινούμενο αεροσκάφος βρίσκεται με μετασχηματισμό συντεταγμένων πολλαπλασιάζοντας με το μητρώο  $\tilde{L}_{EB}$

$$\tilde{L}_{EB}\vec{f}_B = m\frac{d}{dt}(\tilde{L}_{EB}\vec{V}_B^E) = m\left(\dot{\tilde{L}}_{EB}\vec{V}_B^E + \tilde{L}_{EB}\dot{\vec{V}}_B^E\right) \quad 2.5.2$$

Οι σχέσεις μετασχηματισμού παραγώγου διανύσματος και μητρώου δίνονται αναλυτικά στο παράρτημα Α, όπου αποδεικνύεται ότι

$$\dot{\tilde{L}}_{EB} = \tilde{L}_{EB}\tilde{\omega}_B \quad 2.5.3$$

Με την παραπάνω σχέση μετασχηματισμού η Εξ. (2.5.2) γίνεται

$$\tilde{L}_{EB}\vec{f}_B = m\left(\tilde{L}_{EB}\tilde{\omega}_B\vec{V}_B^E + \tilde{L}_{EB}\dot{\vec{V}}_B^E\right)$$

και πολλαπλασιάζοντας την παραπάνω σχέση εξ' αριστερών με το αντίστροφο βρίσκουμε

$$\vec{f}_B = m\left(\tilde{\omega}_B\vec{V}_B^E + \dot{\vec{V}}_B^E\right) \quad 2.5.4$$

Επαναλαμβάνοντας την παραπάνω διαδικασία για την εξίσωση της ροπής βρίσκουμε ότι η ροπή στο σύστημα συντεταγμένων  $F_B$  που είναι προσαρμοσμένο στο κινούμενο αεροσκάφος δίνεται από

$$\vec{M}_B = \dot{\vec{h}}_B + \tilde{\omega}_B\vec{h}_B \quad 2.5.5$$

Η συνολική δύναμη είναι το άθροισμα των αεροδυναμικών φορτίων  $\vec{A}_B$ , και της δύναμης της βαρύτητας  $m\vec{g}_B$

$$\vec{f}_B = m\vec{g}_B + \vec{A}_B \quad 2.5.6$$

Οι συνιστώσες των αεροδυναμικών φορτίων είναι  $\vec{A}_B = [X, Y, Z]^T$  και το διάνυσμα της βαρύτητας στο σύστημα  $F_B$  είναι

$$m\vec{g}_B = m\tilde{L}_{BE}\vec{g}_E = m\tilde{L}_{BE} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ g \end{bmatrix} \quad 2.5.7$$

Οι συνιστώσες του διανύσματος ταχύτητας του αεροσκάφους  $\vec{V}_B$  εκπεφρασμένες στο αδρανειακό  $F_E$  είναι  $\vec{V}_B^E = [u_E, v_E, w_E]$ . Το διάνυσμα της γωνιακής ορμής στο σύστημα  $F_B$  είναι  $\vec{h}_B = I_B\vec{\omega}_B$ , και το μητρώο περιστροφής στην Εξ. (2.5.5) είναι

$$\tilde{\omega}_B = \begin{bmatrix} 0 & -r & q \\ r & 0 & -p \\ -q & p & 0 \end{bmatrix}$$

Οι συνιστώσες του διανύσματος της ροπής  $\vec{M}_B$  στο σύστημα  $F_B$  συμβολίζονται ως  $\vec{M}_B = [L, M, N]^T$ . Το αεροσκάφος θεωρείται σαν ένα απόλυτα στερεό σώμα, δηλαδή  $\dot{I}_B = 0$ . Με του παραπάνω συμβολισμούς και οι εξισώσεις κίνησης του αεροσκάφους που εκφράζονται σε διανυσματική μορφή από τις Εξ. (2.5.4) και (2.5.5) δίνονται σε μορφή συντεταγμένων από τις παρακάτω σχέσεις.

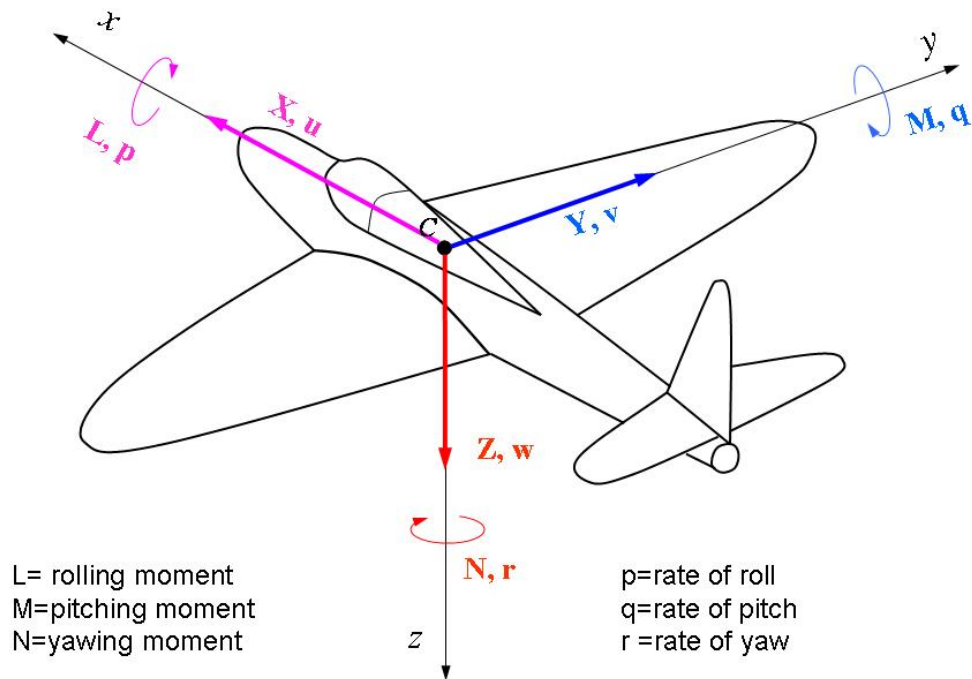
$$\begin{aligned} X - mg \sin \theta &= m(\dot{u}^E - r\dot{v}^E + q\dot{w}^E) \\ Y - mg \cos \theta \sin \phi &= m(r\dot{u}^E + \dot{v}^E - p\dot{w}^E) \\ Z - mg \cos \theta \cos \phi &= m(-q\dot{u}^E + p\dot{v}^E + \dot{w}^E) \end{aligned} \quad 2.5.8$$

$$\begin{aligned} L &= I_x\dot{p} - I_{yz}(q^2 + r^2) - I_{zx}(\dot{r} + pq) - I_{xy}(\dot{q} - rp) - (I_y - I_z)qr \\ M &= I_y\dot{q} - I_{zx}(r^2 - p^2) - I_{xy}(\dot{p} + qr) - I_{yz}(\dot{r} - pq) - (I_z - I_x)rp \\ N &= I_z\dot{r} - I_{xy}(p^2 - q^2) - I_{yz}(\dot{q} + rp) - I_{zx}(\dot{p} - qr) - (I_x - I_y)pq \end{aligned} \quad 2.5.9$$

Οι εξισώσεις κίνησης (2.5.8) και (2.5.9) ισχύουν για οποιοδήποτε ορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων που είναι προσαρτημένο στο αεροσκάφος (δες Σχ. 2.5.1) και έχει αρχή στο σημείο  $C$  που είναι το ΚΒ του αεροσκάφους. Επειδή τα αεροσκάφη είναι περίπου συμμετρικά, υποθέτουμε τέλεια συμμετρία ως προς το επίπεδο  $Cxz$  και θεωρούμε η φορά του άξονα  $Cx$  είναι στην κατεύθυνση κίνησης, η φορά του άξονα  $Cy$  κατά μήκος της δεξιάς πτέρυγας, και η φορά του άξονα  $Cz$  με

κατεύθυνση προς το έδαφος. Με τις παραπάνω υποθέσεις  $I_{xy} = I_{yz} = 0$  και οι εξισώσεις ισορροπίας ροπών γίνονται

$$\begin{aligned} L &= I_x \dot{p} - I_{zx} (\dot{r} + pq) - (I_y - I_z) qr \\ M &= I_y \dot{q} - I_{zx} (r^2 - p^2) - (I_z - I_x) rp \\ N &= I_z \dot{r} - I_{zx} (\dot{p} + qr) - (I_x - I_y) pq \end{aligned} \quad 2.5.10$$



**Σχήμα 2.5.1** Συμβολισμοί δυνάμεων και ροπών

### Κύριοι άξονες

Όταν οι άξονες συντεταγμένων εκλέγονται στην κατεύθυνση των κυρίων αξόνων η ροπή αδράνειας  $I_{xz} = 0$  και οι εξισώσεις κίνησης ισορροπίας ροπών περαιτέρω απλοποιούνται ως

$$\begin{aligned} L &= I_x \dot{p} - (I_y - I_z) qr \\ M &= I_y \dot{q} - (I_z - I_x) rp \\ N &= I_z \dot{r} - (I_x - I_y) pq \end{aligned} \quad 2.5.11$$

ενώ

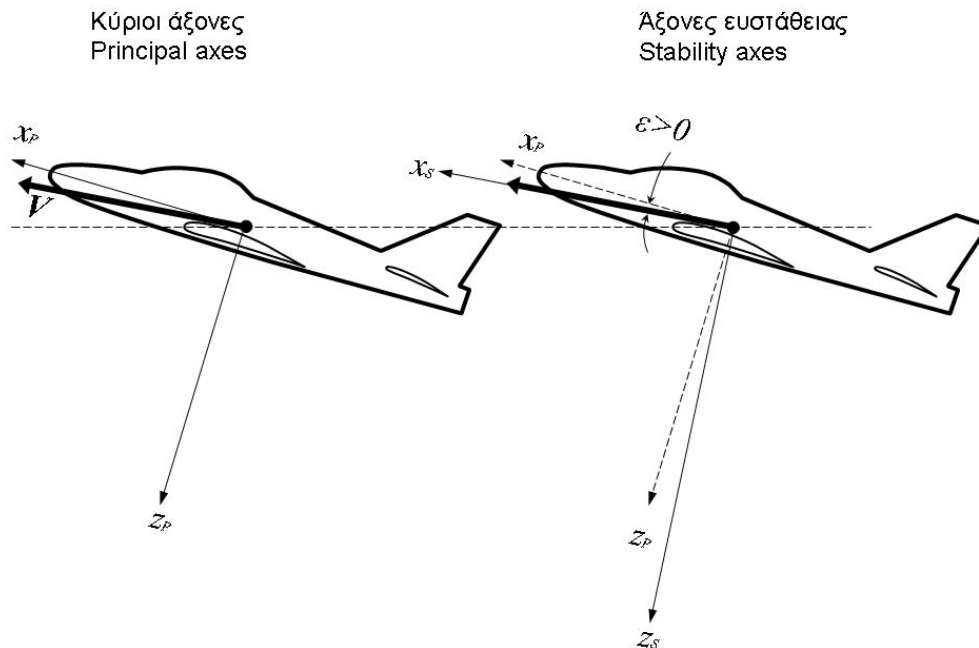
$$\begin{bmatrix} h_x \\ h_y \\ h_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_x & 0 & 0 \\ 0 & I_y & 0 \\ 0 & 0 & I_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix}$$

### Άξονες ευστάθειας

Οι άξονες ευστάθειας  $x_S, y_S, z_S$  (δες Σχ. 2.5.2) είναι το σύστημα αξόνων που προκύπτει όταν ο άξονας  $Cx$  είναι στην κατεύθυνση κίνησης, δηλαδή ευθυγραμμισμένος με το διάνυσμα της ταχύτητας  $\vec{V}_B$  του αεροσκάφους που εκτελεί συμμετρική πτήση, δηλαδή έχει τροχιά χωρίς πλάγια κίνηση (yaw). Στην περίπτωση αυτή έχουμε  $v=w=0$  και οι εξισώσεις κίνησης απλοποιούνται σημαντικά. Οι ροπές αδράνειας  $I_x, I_z, I_{xz}$  στο σύστημα συντεταγμένων ευστάθειας εκφράζονται σαν συνάρτηση των ροπών αδράνειας  $I_{x_p}, I_{z_p}$  ως προς τους κύριους άξονες  $x_p, z_p$  από τις παρακάτω σχέσεις

$$\begin{aligned} I_x &= I_{x_p} \cos^2 \varepsilon + I_{z_p} \sin^2 \varepsilon \\ I_z &= I_{x_p} \sin^2 \varepsilon + I_{z_p} \cos^2 \varepsilon \\ I_{xz} &= 0.5(I_{z_p} - I_{x_p}) \sin 2\varepsilon \end{aligned} \quad 2.5.12$$

όπου  $\varepsilon$  είναι η γωνία μεταξύ των κυρίων αξόνων  $x_p, z_p$  και των αξόνων ευστάθειας  $x_S, y_S$ . Όταν οι άξονες του συστήματος συντεταγμένων δεν συμπίπτουν με τους άξονες ευστάθειας  $Ox_S y_S z_S$  ή τους κύριους άξονες  $Ox_p y_p z_p$  τότε ο άξονας  $Ox_B$  εκλέγεται κατά μήκος της γραμμής αναφοράς του αεροσκάφους.



Σχήμα 2.5.2 Άξονες ευστάθειας και κύριοι άξονες.

## 2.6 Επίδραση περιστροφής στις εξισώσεις κίνησης

Η γωνιακή ορμή,  $\vec{h}$ , στα προηγούμενα κεφάλαια υπολογίστηκε για απόλυτα στερεό σώμα και αμελώντας την ροπή που προέρχεται από περιστρεφόμενα μέρη όπως αυτά που περιέχονται στο προωθητικό σύστημα. Οι επιπρόσθετες γωνιακές ορμές από τα περιστρεφόμενα μέρη του αεροσκάφους, όπως οι προπέλες και ο στόβιλος των μηχανών turbojet, ως προς τους άξονες του αεροσκάφους  $Ox_B y_B z_B$  πρέπει λοιπόν να προστεθούν στις εξισώσεις κίνησης που βρήκαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο. Η γωνιακή ορμή των περιστρεφόμενων μερών συμβολίζεται με,  $\vec{h}'$ , και έχει συνιστώσες  $\vec{h}' = (h'_x, h'_y, h'_z)$ , στο σύστημα  $F_B$ . Τότε η συνολική γωνιακή ορμή είναι

$$\vec{h}_B = \tilde{I}_B \vec{\omega}_B + \vec{h}'_B \quad 2.6.1$$

Δηλαδή σαν αποτέλεσμα της περιστροφής προπέλας η στροβίλου έχουμε τους παρακάτω επιπρόσθετους όρους στις εξισώσεις κίνησης

$$\begin{aligned} L \text{ εξίσωση} & \quad q h'_z - r h'_y \\ M \text{ εξίσωση} & \quad r h'_x - p h'_z \\ N \text{ εξίσωση} & \quad p h'_y - q h'_x \end{aligned} \quad 2.6.2$$

Οι παραπάνω όροι ονομάζονται γυροσκοπικά ζεύγη. Αν για παράδειγμα υποθέσουμε ότι έχουμε μία προπέλα που περιστρέφεται γύρω από τον άξονα  $Ox_B$  με γωνιακή ταχύτητα  $\Omega_p$  η επιπρόσθετη γωνιακή ορμή που αναπτύσσει είναι  $\vec{h}' = \vec{i} I \Omega_p$  οπότε οι γυροσκοπικοί όροι είναι  $(0, I \Omega_p r, -I \Omega_p q)$

## 2.7 Εξισώσεις κίνησης συμμετρικής πτήσης

Οι εξισώσεις που περιγράφουν συμμετρική πτήση αεροσκάφους με περιστρεφόμενα μέρη είναι.

$$\begin{aligned} X - mg \sin \theta & = m(\dot{u}_E + q \dot{w}_E - r \dot{v}_E) \\ Y + mg \cos \theta \sin \phi & = m(\dot{v}_E + r \dot{u}_E - p \dot{w}_E) \\ Z + mg \cos \theta \cos \phi & = m(\dot{w}_E + p \dot{v}_E - q \dot{u}_E) \end{aligned} \quad 2.7.1$$

$$\begin{aligned} L & = I_x \dot{p} - I_{yz}(q^2 + r^2) - I_{zx}(\dot{r} + pq) - I_{xy}(\dot{q} - rp) - (I_y - I_z)qr + [qh'_z - rh'_y] \\ M & = I_y \dot{q} - I_{zx}(r^2 - p^2) - I_{xy}(\dot{p} + qr) - I_{yz}(\dot{r} - pq) - (I_z - I_x)rp + [rh'_x - ph'_z] \\ N & = I_z \dot{r} - I_{xy}(p^2 - q^2) - I_{yz}(\dot{q} + rp) - I_{zx}(\dot{p} - qr) - (I_x - I_y)pq + [ph'_y - qh'_x] \end{aligned} \quad 2.7.2$$

$$\begin{aligned} p & = \dot{\phi} - \dot{\psi} \sin \theta \\ q & = \dot{\theta} \cos \phi + \dot{\psi} \cos \theta \sin \phi \\ r & = \dot{\psi} \cos \theta \cos \phi - \dot{\theta} \sin \phi \end{aligned} \quad 2.7.3$$

$$\begin{aligned}
\dot{\phi} &= p + (q \sin \phi + r \cos \phi) \tan \theta \\
\dot{\theta} &= q \cos \phi - r \sin \phi \\
\dot{\psi} &= (q \sin \phi + r \cos \phi) \sec \theta
\end{aligned}
\tag{2.7.4}$$

$$\begin{aligned}
\dot{x}_E &= u_E \cos \theta \cos \psi + v_E (\sin \phi \sin \theta \cos \psi - \cos \phi \sin \psi) \\
&\quad + w_E (\cos \phi \sin \theta \cos \psi + \sin \phi \sin \psi) \\
\dot{y}_E &= u_E \cos \theta \sin \psi + v_E (\sin \phi \sin \theta \sin \psi + \cos \phi \cos \psi) \\
&\quad + w_E (\cos \phi \sin \theta \sin \psi - \sin \phi \cos \psi) \\
\dot{z}_E &= -u_E \sin \theta + v_E \sin \phi \sin \theta \\
&\quad + w_E \cos \phi \cos \theta
\end{aligned}
\tag{2.7.5}$$

$$\begin{aligned}
u_E &= u + W_x \\
v_E &= v + W_y \\
w_E &= w + W_z
\end{aligned}
\tag{2.7.6}$$

Οι παραπάνω εξισώσεις είναι γενικές και ισχύουν με τις παρακάτω προϋποθέσεις:

1. Το αεροσκάφος είναι απόλυτα στερεό σώμα
2. Το επίπεδο  $Cxz$  είναι επίπεδο συμμετρίας
3. Οι άξονες περιστροφής προπελών ή μηχανών turbojet έχουν καθορισμένη κατεύθυνση σχετικά με τους προσαρτημένους στο αεροσκάφος άξονες και εκτελούν περιστροφή με σταθερή ταχύτητα.

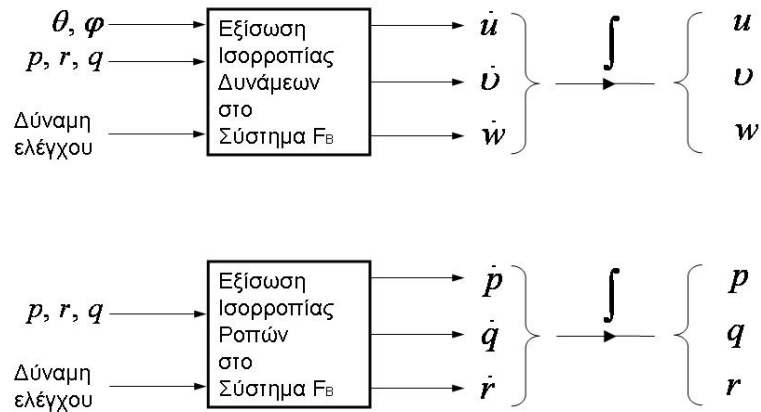
Οι εξισώσεις κίνησης αποτελούν ένα σύστημα 15 συνήθων διαφορικών εξισώσεων ως προς τον χρόνο. Οι δυνάμεις  $X, Y, Z$  και οι ροπές  $L, M, N$  στις εξισώσεις κίνησης εξαρτώνται από την σχετική ως προς το αέρα κίνηση του αεροσκάφους που περιγράφεται από το διάνυσμα της ταχύτητας  $\vec{V}$  και την γωνιακή ταχύτητα  $\vec{\omega}$ . Για δεδομένη ταχύτητα και γωνιακή ταχύτητα οι γωνίες των επιφανειών ελέγχου και το διάνυσμα της ώσης είναι δεδομένα. Συνεπώς, υποτίθεται ότι οι έξι δυνάμεις και ροπές είναι συναρτήσεις των  $u, v, w, p, q, r$  και ενός διανύσματος ελέγχου  $\vec{C}$  που εξαρτάται από τις γωνίες aileron,  $\delta a$ , elevator  $\delta e$ , rudder,  $\delta r$ , και την ρύθμιση ώσης  $\delta p$ .

$$\vec{C} = [\delta a, \delta e, \delta r, \delta p]^T$$

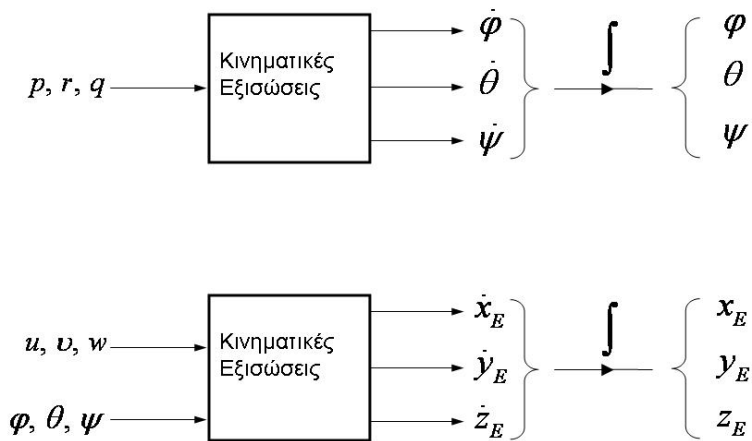
Το διάνυσμα της ταχύτητας του αέρα,  $\vec{W}_E$ , είναι γνωστό για το σύστημα  $F_E$  και στο σύστημα  $F_B$  είναι  $\vec{W}_B = \tilde{L}_{BE} \vec{W}_E$ . Οι εξαρτημένες μεταβλητές του συστήματος των 15 διαφορικών είναι οι παρακάτω δώδεκα ποσότητες:

- (3) Θέση του KB,  $X_E, Y_E, Z_E$
- (3) Γωνίες Euler  $\psi, \theta, \phi$
- (3) Συνιστώσες της ταχύτητας  $u_E, v_E, w_E$  και οι
- (3) Συνιστώσες της γωνιακής ταχύτητας  $p, q, r$

Από τις δέκα πέντε (15) εξισώσεις, μόνο οι δώδεκα (12) είναι ανεξάρτητες, διότι οι Εξ. (2.7.3) και (2.7.4) είναι ουσιαστικά ίδιες. Η κίνηση του αεροσκάφους περιγράφεται από την λύση ενός συστήματος δώδεκα (12) εξισώσεων με δώδεκα (12) αγνώστους. Ειδικές περιπτώσεις των εξισώσεων κίνησης για μηδενική ταχύτητα του αέρα παρουσιάζονται στα παρακάτω διαγράμματα των Σχ. 2.7.1 και 2.7.2



**Σχήμα 2.7.1** Ειδικές περιπτώσεις εξισώσεων κίνησης



**Σχήμα 2.7.2** Ειδικές περιπτώσεις εξισώσεων κίνησης

Τα διαγράμματα των εξισώσεων δυνάμεων και ροπών, έχουν σαν είσοδο και το διάνυσμα ελέγχου, που πρέπει να προσδιοριστεί ανάλογα με την πητική κατάσταση. Διάφορες περιπτώσεις διανυσμάτων ελέγχου που συχνά απαντώνται στην πράξη, παρουσιάζονται παρακάτω.

### Προβλήματα ευστάθειας σταθερού ελέγχου

Θεωρείται ότι το αεροσκάφος υφίσταται μεταβολή της σταθερής πητικής κατάστασης, χωρίς μεταβολή ελέγχου (controls locked in position) οπότε το διάνυσμα ελέγχου  $\vec{C}$  είναι γνωστό ή έχει μηδενική τιμή. Για μικρές μεταβολές πητικής κατάστασης οι εξισώσεις μπορεί να γραμμικοποιηθούν.

### Προβλήματα ευστάθειας ελεύθερου ελέγχου

Η περίπτωση αυτή αφορά μόνο αεροσκάφη με χειροκίνητα συστήματα ελέγχου όπου υποτίθεται ότι ένα ή περισσότερα από τα κύρια συστήματα ελέγχου είναι ελεύθερα. Η μεταβολή των γωνιών ελέγχου στον χρόνο, είναι αποτέλεσμα αλληλεπίδρασης αεροδυναμικών φορτίων δυναμικής συμπεριφοράς αεροσκάφους και των συστημάτων ελέγχου που όπως είδαμε στα προηγούμενα κεφάλαια θεωρούνται ότι έχουν ένα βαθμό ελευθερίας στο σύστημα  $F_B$ . Κάθε ελεύθερο σύστημα ελέγχου προσθέτει μία εξίσωση και μία εξαρτημένη μεταβλητή στο σύστημα των 12 εξισώσεων κίνησης.

### Προβλήματα ευστάθειας με αυτόματα συστήματα ελέγχου

Στην περίπτωση αυτή η αποτελεσματικότητα των συστημάτων ελέγχου μελετάται εφαρμόζοντας αλλαγές κατά βήμα (step changes) στις συνιστώσες του διανύσματος ελέγχου  $\vec{C} = [\delta\alpha, \delta\epsilon, \delta r, \delta p]^T$ . Οι εξισώσεις κίνησης γίνονται τότε ένα μη ομοιογενές σύστημα συνήθων διαφορικών για τις μεταβλητές  $(u, v, w)$ ,  $(p, q, r)$ , και  $(\psi, \theta, \phi)$  ενώ οι επιβεβλημένες δυνάμεις  $X, Y, Z$  και ροπές  $L, M, N$  εξαρτώνται από τις γωνίες ελέγχου.

### Απόκριση στην ατμοσφαιρική τύρβη

Τα φορτία που εξασκούνται στο αεροσκάφος και η κίνηση του επηρεάζονται σημαντικά από την ατμοσφαιρική τύρβη, η ύπαρξη της οποίας πρέπει να λαμβάνεται σοβαρά στον σχεδιασμό και την λειτουργία του αεροσκάφους. Το γενικό μαθηματικό πρόβλημα επιλύεται με τις γενικές εξισώσεις κίνησης που αναπτύχθηκαν όπου η ταχύτητα  $u_E, v_E, w_E$  που εμφανίζεται σε αυτές μεταβάλλεται από σημείο σε σημείο ανάλογα με την ατμοσφαιρική τύρβη.

### Αντίστροφα προβλήματα

Τα προβλήματα αυτά είναι της μορφής: Δεδομένης της κατάστασης και της τροχιάς του αεροσκάφους αναζητούμε να βρούμε τι πρέπει να κάνει ο κυβερνήτης για να τις υλοποιήσει. Η επίλυση αυτών των προβλημάτων πραγματοποιείται όταν πραγματοποιήσει αν μερικές από τις 12 μεταβλητές των εξισώσεων κίνησης προδιαγράφονται σαν συναρτήσεις του χρόνου.



## 2.8 Θεωρία μικρών διαταραχών

Οι εξισώσεις κίνησης συχνά γραμμικοποιούνται για να διευκολύνουν την μελέτη και πρακτική αντιμετώπιση προβλημάτων ευστάθειας και ελέγχου πτήσης. Για την γραμμικοποίηση υποτίθεται ότι η κίνηση του αεροσκάφους συνίσταται από μικρές παρεκκλίσεις από την κατάσταση αναφοράς που θεωρείται η ευσταθής πτήση χωρίς επιτάχυνση.

Η εφαρμογή της γραμμικοποιημένης θεωρίας μικρών διαταραχών βρέθηκε ότι δίνει πολύ καλές προβλέψεις στις πρακτικές εφαρμογές. Προβλέπει για παράδειγμα με ικανοποιητική ακρίβεια την πτήση χωρίς επιτάχυνση αλλά δεν είναι κατάλληλη για την περιγραφή κινήσεων με μεγάλες αποκλίσεις των γωνιών Euler από την κατάσταση αναφοράς. Οι κύριοι λόγοι για τους οποίους η θεωρία μικρών διαταραχών έχει επιτυχημένη εφαρμογή στην πράξη είναι:

- (1) Πολλά από τα κύρια αεροδυναμικά φαινόμενα εκφράζονται από περίπου γραμμικές συναρτήσεις μικρών διαταραχών. Παραδείγματος χάριν, η μεταβολή της άντωσης και της ροπής είναι περίπου γραμμικές για μικρές παρεκκλίσεις ή διαταραχές, (perturbations or disturbances) της γωνίας πρόσπτωσης ή της ταχύτητας πτήσης.
- (2) Παρ' όλον ότι μικρές διαταραχές της γραμμικής ή της γωνιακής ταχύτητας μπορεί να προκαλέσουν σοβαρές αποκλίσεις από την κατάσταση αναφοράς, η μαθηματική περιγραφή αυτών των αποκλίσεων από τις γραμμικοποιημένες εξισώσεις κίνησης είναι επαρκής.

Στην θεωρία μικρών διαταραχών οι τιμές όλων των μεταβλητών στην κατάσταση αναφοράς συμβολίζονται με δείκτη μηδέν, π.χ. η ταχύτητα αφοράς συμβολίζεται ως  $u_o$ . Οι δε τιμές των μικρών διαταραχών ή αποκλίσεων από την κατάσταση αναφοράς συμβολίζονται με το πρόθεμα  $\Delta$ , π.χ.  $u_o + \Delta u$ . Παρόμοια με την διαδικασία που ακολουθείται στην γραμμικοποίηση των εξισώσεων της μηχανικής των ρευστών ή της δυναμικής, και για την γραμμικοποίηση των εξισώσεων κίνησης όλες οι διαταραχές και οι παράγωγοί τους υποτίθεται μικρές συνεπώς τα γινόμενά τους είναι αμελητέα. Περαιτέρω απλούστευση επιτυγχάνεται υποθέτοντας ότι η κατάσταση αναφοράς είναι συμμετρική πτήση και ότι η γωνιακή ταχύτητα είναι μηδέν, δηλαδή θεωρώντας ότι  $V_o = p_o = q_o = r_o = \phi_o = \psi_o = 0$ . Επί πλέον, για την ανάπτυξη της θεωρίας μικρών διαταραχών εκλέγουμε σαν άξονες αναφοράς τους άξονες ευστάθειας του συστήματος, δηλαδή  $W_o = 0$  και η ταχύτητα αναφοράς της πτήσης είναι  $u_o$  ενώ η γωνία αναφοράς ανόδου είναι  $\theta_o$ , όπου  $\theta_o$  δεν είναι κατ' ανάγκη μικρή γωνία. Σύμφωνα με τις παραπάνω υποθέσεις, και χρησιμοποιώντας τις παρακάτω απλοποιήσεις των τριγωνομετρικών συναρτήσεων, που ισχύουν για μικρές διαταραχές, καταλήγουμε στις πολύ απλούστερες εξισώσεις που περιγράφουν την κίνηση αεροσκάφους για μικρές διαταραχές από την κατάσταση πτήσης αναφοράς.

$$\begin{aligned} \sin(\theta_o + \Delta\theta) &= \sin \theta_o \cos \Delta\theta + \cos \theta_o \sin \Delta\theta \\ &\approx \sin \theta_o + \Delta\theta \cos \theta_o \\ \cos(\theta_o + \Delta\theta) &= \cos \theta_o \cos \Delta\theta - \sin \theta_o \sin \Delta\theta \\ &\approx \cos \theta_o - \Delta\theta \sin \theta_o \end{aligned} \tag{2.8.1}$$

Κάνοντας δύο επιπρόσθετες υποθέσεις, ότι τα περιστρεφόμενα μέρη έχουν πολύ μικρή συνεισφορά και ότι η ταχύτητα του ανέμου είναι μηδέν, που γίνονται για να απλοποιήσουν ακόμη περισσότερο το μαθηματικό μας μοντέλο, βρίσκουμε τις παρακάτω γραμμικές εξισώσεις κίνησης που περιέχουν μόνο τους όρους πρώτης τάξης για τις διαταραχές.

$$\begin{aligned} X_o + \Delta X - mg(\sin \theta_o + \Delta \theta \cos \theta_o) &= m \Delta \theta \\ Y_o + \Delta Y + mg \cos \theta_o &= m(\dot{v} + u_o r) \\ Z_o + \Delta Z + mg(\cos \theta_o - \Delta \theta \sin \theta_o) &= m(\dot{w} - u_o q) \end{aligned} \quad 2.8.2$$

$$\begin{aligned} L + \Delta L &= I_x \dot{p} - I_{xz} \dot{r} \\ M + \Delta M &= I_y \dot{q} \\ N + \Delta N &= I_z \dot{r} - I_{xz} \dot{p} \end{aligned} \quad 2.8.3$$

$$\begin{aligned} \Delta \dot{\theta} &= q \\ \dot{\phi} &= p + r \tan \theta_o \\ p &= \dot{\phi} - \dot{\psi} \sin \theta_o \\ \dot{\psi} &= r \sec \theta_o \end{aligned} \quad 2.8.4$$

$$\begin{aligned} \dot{x}_E &= (u_o + \Delta u) \cos \theta_o - u_o \Delta \theta \sin \theta_o + w \sin \theta_o \\ \dot{y}_E &= u_o \psi \cos \theta_o + v \\ \dot{z}_E &= -(u_o + \Delta u) \sin \theta_o - u_o \Delta \theta \cos \theta_o + w \cos \theta_o \end{aligned} \quad 2.8.5$$

Η κατάσταση αναφοράς πτήσης βρίσκεται από τις παραπάνω εξισώσεις όταν όλες οι τιμές των διαταραχών μηδενισθούν, όποτε βρίσκουμε

$$\begin{aligned} X_o - mg \sin \theta_o &= 0 \\ Y_o &= 0 \\ Z_o + mg \cos \theta_o &= 0 \\ L_o = M_o = N_o &= 0 \end{aligned} \quad 2.8.6$$

$$\begin{aligned} \dot{x}_{E_o} &= u_o \cos \theta_o \\ \dot{y}_{E_o} &= 0 \\ \dot{z}_{E_o} &= -u_o \sin \theta_o \end{aligned}$$

Αντικαθιστώντας την κατάσταση αναφοράς από τις παραπάνω σχέσεις στις γραμμικοποιημένες εξισώσεις κίνησης (δες Εξ. (2.8.2) – (2.8.5)) και υποθέτοντας ότι οι αποκλίσεις των επιφανειών ελέγχου (aileron, rudder) είναι μηδενικές βρίσκουμε

$$\begin{aligned}\Delta \dot{u} &= \frac{\Delta X}{m} - g \Delta \theta \cos \theta_o \\ \dot{v} &= \frac{\Delta Y}{m} + g \phi \cos \theta_o - u_o r \\ \dot{w} &= \frac{\Delta Z}{m} - g \Delta \theta \sin \theta_o + u_o q\end{aligned}\tag{2.8.7}$$

$$\begin{aligned}\dot{p} &= \frac{(I_z \Delta L + I_{xz} \Delta N)}{I_x I_z - I_{xz}^2} \\ \dot{q} &= \frac{\Delta M}{I_y} \\ \dot{r} &= \frac{(I_x \Delta L + I_{xz} \Delta N)}{I_x I_z - I_{xz}^2}\end{aligned}\tag{2.8.8}$$

$$\begin{aligned}\Delta \dot{\theta} &= q \\ \dot{\phi} &= p + r \tan \theta_o \\ p &= \dot{\phi} - \dot{\psi} \sin \theta_o \\ \dot{\psi} &= r \sec \theta_o\end{aligned}\tag{2.8.9}$$

$$\begin{aligned}\dot{x}_E &= \Delta u \cos \theta_o - u_o \Delta \theta \sin \theta_o + w \sin \theta_o \\ \dot{y}_E &= u_o \psi \cos \theta_o + v \\ \dot{z}_E &= -\Delta u \sin \theta_o - u_o \Delta \theta \cos \theta_o + w \cos \theta_o\end{aligned}\tag{2.8.10}$$

Τα αεροδυναμικά φορτία δεν εξαρτώνται μόνο από την πτητική κατάσταση (κατάσταση αναφοράς) αλλά και τις μεταβολές από αυτή. Παραδείγματος χάριν, όταν η γωνία πρόσπτωσης μεταβάλλεται στον χρόνο,  $\alpha = \alpha(t)$ , η μεταβολή της άντωσης πτέρυγας,  $L$ , ως προς τον χρόνο,  $L(t)$ , δεν εξαρτάται μόνο από την στιγμιαία τιμή της γωνίας αλλά και από όλες τις προηγούμενες τιμές της. Αυτό είναι προφανές διότι η πτέρυγα δημιουργεί απόρευμα και ο στροβιλισμός του απορεύματος επάγει ταχύτητες πάνω στην πτέρυγα. Η υστέρηση που υπάρχει στην επαγωγή της φορτίων από το απόρευμα στην πτέρυγα έχει σαν αποτέλεσμα την εξάρτηση της άντωσης από τις προηγούμενες τιμές της γωνίας προσβολής  $\alpha$  και εν γένει από την προηγούμενη κατάσταση κίνησης. Η εξάρτηση της άντωσης από τις προηγούμενες τιμές της γωνίας πρόσπτωσης εκφράζεται ως

$$L(t) = L(\alpha(\tau)) \quad -\infty < \tau \leq t\tag{2.8.11}$$

Αναπτύσσοντας την μεταβολή της γωνίας πρόσπτωσης  $\alpha(t)$  σε σειρά Taylor έχουμε

$$\alpha(\tau) = \alpha(t) + (\tau - t)\dot{\alpha}(t) + \frac{(\tau - t)^2}{2!}\ddot{\alpha}(t) + \frac{(\tau - t)^3}{3!}\ddot{\alpha}(t) + \dots\tag{2.8.12}$$

Με αντικατάσταση του παραπάνω αναπτύγματος στην Εξ. (2.8.11) βρίσκουμε

$$L(t_o) = L(\alpha, \dot{\alpha}, \ddot{\alpha}, \dots) \quad 2.8.13$$

όπου  $\alpha, \dot{\alpha}, \ddot{\alpha}$  είναι οι τιμές στον χρόνο  $t_o$ . Το ανάπτυγμα Taylor ως προς  $\alpha, \dot{\alpha}, \ddot{\alpha}$  για την άντωση είναι

$$\begin{aligned} \Delta L(t_o) &= L_\alpha(\Delta\alpha) + \frac{1}{2!} L_{\alpha\alpha}(\Delta\alpha)^2 + \dots \\ &+ L_{\dot{\alpha}}(\Delta\dot{\alpha}) + \frac{1}{2!} L_{\dot{\alpha}\dot{\alpha}}(\Delta\dot{\alpha})^2 + \dots \\ &+ L_{\ddot{\alpha}}(\Delta\ddot{\alpha}) + \frac{1}{2!} L_{\ddot{\alpha}\ddot{\alpha}}(\Delta\ddot{\alpha})^2 + \dots \end{aligned} \quad 2.8.14$$

Στην παραπάνω σχέση οι όροι  $L_\alpha, L_{\dot{\alpha}}, L_{\ddot{\alpha}}$  κ.λ.π. ονομάζονται αεροδυναμικές παράγωγοι ευστάθειας

$$L_\alpha = \left. \frac{\partial L}{\partial \alpha} \right|_{\alpha_o(t_o)} \quad 2.8.15$$

Η κύρια υπόθεση της γραμμικής αεροδυναμικής θεωρίας είναι ότι τα αεροδυναμικά φορτία μπορεί να περιγραφούν επαρκώς μόνο από τους γραμμικούς όρους της Εξ. (2.8.14) ακόμα και στην περίπτωση που η μεταβολή  $\Delta\alpha(t)$  δεν είναι αναλυτική συνάρτηση, δηλαδή

$$\Delta L(t_o) = L_\alpha(\Delta\alpha) + L_{\dot{\alpha}}(\Delta\dot{\alpha}) + L_{\ddot{\alpha}}(\Delta\ddot{\alpha}) + \dots \quad 2.8.16$$

Στο παρελθόν έχει καταβληθεί σημαντική προσπάθεια για να επιτευχθεί ακριβής προσδιορισμός των παραγώνων ευστάθειας, παρόμοιων με εκείνες που εμφανίζονται στην Εξ. (2.8.16). Ο προσδιορισμός των αεροδυναμικών παραγώνων σε διάφορες καταστάσεις πτήσης θα αποτελέσει το αντικείμενο μελέτης του επόμενου κεφαλαίου.

### Γραμμικές εξισώσεις κίνησης συμμετρικής πτήσης

Στην συμμετρική κατάσταση πτήσης η πλάγια δύναμη  $Y$  είναι μηδενική, δεν υπάρχει ροπή περιστροφής (rolling moment)  $L$  και πλάγια ροπή (yawing moment)  $N$ , και το επίπεδο συμμετρίας παραμένει σταθερό κατά την διάρκεια της πτήσης. Για την κατάσταση της συμμετρικής πτήσης, οι όροι  $\beta, p, r, \phi, \psi$  είναι μηδέν. Επίσης μηδενικές είναι και οι τιμές των παραγώνων των αεροδυναμικών φορτίων  $Y, L, N$  ως προς τις συμμετρικές μεταβολές τη κίνησης  $u, w, q$ .

Οι γραμμικοποιημένες μεταβολές κίνησης σε συμμετρική κατάσταση πτήσης μπορεί να γραφούν στην μορφή της Εξ. (2.8.16) ως ακολούθως

$$\begin{aligned}
\Delta X &= X_u \Delta u + X_w w && + \Delta X_c \\
\Delta Y &= Y_v v + Y_p p + Y_r r && + \Delta Y_c \\
\Delta Z &= Z_u \Delta u + Z_w w + Z_{\dot{w}} \dot{w} + Z_q q && + \Delta Z_c \\
\Delta L &= L_v v + L_p p + L_r r && + \Delta L_c \\
\Delta M &= M \Delta u + M_w w + M_{\dot{w}} \dot{w} + M_q q && + \Delta M_c \\
\Delta N &= N_v v + N_p p + N_r r && + \Delta N_c
\end{aligned} \tag{2.8.17}$$

όπου ο δείκτης  $c$  αναφέρεται στις δυνάμεις και ροπές που οφείλονται στο σύστημα ελέγχου.

Πρέπει να σημειωθεί ότι στις Εξ. (2.8.17) έχουν γίνει οι επιπρόσθετες παραδοχές:

1. Όλες οι παράγωγοι των συμμετρικών δυνάμεων και ροπών ως προς τις μη-συμμετρικές μεταβολές είναι αμελητέες
2. Αμελούνται οι παράγωγοι ως προς τον ρυθμό μεταβολής εκτός από τις παραγώγους  $Z_{\dot{w}}$  και  $M_{\dot{w}}$ .
3. Αμελείται η παράγωγος  $X_q$

Αντικατάσταση των γραμμικοποιημένων μεταβλητών κίνησης από τις Εξ. (2.8/17) στις Εξ. (2.8.7) – (2.8.10) δίνει τις παρακάτω γραμμικές εξισώσεις κίνησης για την κατά μήκος και κατά πλάτος κίνηση του αεροσκάφους σε μικρές διαταραχές από την κατάσταση αναφοράς συμμετρικής πτήσης.

### Κατά μήκος εξισώσεις

$$\begin{bmatrix} \Delta \dot{u} \\ \dot{w} \\ \dot{q} \\ \Delta \dot{\theta} \end{bmatrix} = [\mathbf{A}] \begin{bmatrix} \Delta u \\ w \\ q \\ \Delta \theta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{\Delta X_c}{m} \\ \frac{\Delta Z_c}{m - Z_{\dot{w}}} \\ \frac{\Delta M_u}{I_y} + \frac{M_{\dot{w}}}{I_y} \frac{\Delta Z_c}{(m - Z_{\dot{w}})} \\ 0 \end{bmatrix} \tag{2.8.18}$$

$$[\mathbf{A}] = \begin{bmatrix} \frac{X_u}{m} & \frac{X_w}{m} & 0 & -g \cos \theta_o \\ \frac{Z_u}{m - Z_{\dot{w}}} & \frac{Z_w}{m - Z_{\dot{w}}} & \frac{Z_q + m u_o}{m - Z_{\dot{w}}} & \frac{mg \sin \theta_o}{m - Z_{\dot{w}}} \\ \frac{1}{I_y} \left[ M_u + \frac{M_{\dot{w}} Z_u}{(m - Z_{\dot{w}})} \right] & \frac{1}{I_y} \left[ M_w + \frac{M_{\dot{w}} Z_w}{(m - Z_{\dot{w}})} \right] & \frac{1}{I_y} \left[ M_q + \frac{M_{\dot{w}} (Z_q + m u_o)}{(m - Z_{\dot{w}})} \right] & \frac{mg \sin \theta_o M_{\dot{w}}}{I_y (m - Z_{\dot{w}})} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\dot{x}_E = \Delta u \cos \theta_o - u_o \Delta \theta \sin \theta_o + w \sin \theta_o$$

$$\dot{z}_E = -\Delta u \sin \theta_o - u_o \Delta \theta \cos \theta_o + w \cos \theta_o$$

### Κατά πλάτος εξισώσεις

$$\begin{bmatrix} \dot{\nu} \\ \dot{p} \\ \dot{r} \\ \dot{\phi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{Y_v}{m} & \frac{Y_p}{m} & \frac{Y_r}{m} - u_o \\ \frac{L_v}{I_x} + I'_{zx} N_v & \frac{L_p}{I_x} + I'_{zx} N_p & \frac{L_r}{I_x} + I'_{zx} N_r \\ I'_{zx} L_v + \frac{N_v}{I_z} & I'_{zx} L_p + \frac{N_p}{I_z} & I'_{zx} L_r + \frac{N_r}{I_z} \\ 0 & 1 & \tan \theta_o \end{bmatrix} g \cos \theta_o \begin{bmatrix} \nu \\ p \\ r \\ \phi \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{\Delta Y_c}{m} \\ \frac{\Delta L_c}{I_x} + I'_{zx} N_c \\ \frac{\Delta N_c}{I_z} + I'_{zx} L_c \\ 0 \end{bmatrix} \quad 2.8.19$$

$$I'_x = (I_x I_z - I_{zx}^2) / I_z, \quad I'_z = (I_x I_z - I_{zx}^2) / I_x, \quad I'_{zx} = I_{zx} / (I_x I_z - I_{zx}^2)$$

$$\dot{\psi} = r \sec \theta_o$$

$$\Delta \dot{y}_E = u_o \psi \cos \theta_o + \nu$$

Οι παραπάνω εξισώσεις (2.8.18) και (2.8.19) είναι δύο ανεξάρτητα συστήματα γραμμικών συνήθων διαφορικών εξισώσεων πρώτης τάξης που περιγράφουν την κατά μήκος και κατά πλάτος κίνηση του αεροσκάφους

Για παράδειγμα, όταν όλες οι κατά πλάτος μεταβολές είναι μηδενικές  $\phi = \nu = p = r = \Delta Y_c = \Delta L_c = \Delta N_c = 0$ , τότε οι κατά πλάτος γραμμικές εξισώσεις κίνησης, Εξ. (2.8.19) επαληθεύονται αυτόματα. Επί πλέον, οι εναπομένουσες κατά μήκος γραμμικές εξισώσεις κίνησης Εξ. (2.8.18) αποτελούν ένα σύστημα έξι συνήθων γραμμικών διαφορικών εξισώσεων για τις έξι μεταβλητές  $\Delta u, w, q, \Delta \theta, \Delta x_E, \Delta z_E$ .

Συνοψίζοντας έχουμε ότι, η κίνηση που περιγράφεται από το σύστημα των έξι κατά μήκος εξισώσεων, Εξ. (2.8.18), είναι συμμετρική ή κατά μήκος κίνηση και εξαρτάται μόνο από τις κατά μήκος μεταβλητές  $\Delta u, w, q, \Delta \theta, \Delta x_E, \Delta z_E$ . Αντίστοιχα η κίνηση που περιγράφεται από τις έξι κατά πλάτος εξισώσεις, Εξ. (2.8.19) αφορά πλάγια κίνηση που εξαρτάται από τις κατά πλάτος μεταβλητές  $\phi, \psi, \nu, p, r, y_E$ .

Οι καθαρά κατά μήκος κίνηση περιγράφεται από τις γραμμικές εξισώσεις όταν

1. Υπάρχει επίπεδο συμμετρίας κίνησης.
2. Οι περιστροφικές κινήσεις των συστημάτων πρόωσης έχουν μικρή συνεισφορά.

Οι καθαρά πλάγιες κινήσεις περιγράφονται από τις γραμμικές εξισώσεις κίνησης όταν

1. Η περιστροφή του προωθητικού συστήματος δεν επηρεάζει σημαντικά την πλάγια κίνηση του αεροσκάφους.
2. Η σύζευξη με την κατά μήκος κίνηση είναι αμελητέα.

Οι γραμμικές εξισώσεις κίνησης είναι της μορφής

$$\dot{\tilde{\mathbf{x}}} = \tilde{\mathbf{A}}\tilde{\mathbf{x}} + \tilde{\mathbf{B}}\tilde{\mathbf{c}} \quad 2.8.20$$

Η παραπάνω μορφή είναι γνωστή και σαν μορφή διανύσματος κατάστασης (state vector form), όπου  $\vec{X}$  συμβολίζει το διάνυσμα κατάστασης,  $\vec{C}$  το διάνυσμα ελέγχου, και  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$  είναι τα μητρώα του συστήματος.

Τα διανύσματα κατάστασης για την κατά πλάτος και κατά μήκος κινήσεις είναι

$$\text{κατά μήκος} \quad X = [\Delta u, w, q, \Delta \theta]^T \quad 2.8.21$$

$$\text{κατά πλάτος} \quad X = [v, p, r, \phi]^T$$

Οι μεταβλητές  $x_E$ ,  $y_E$ ,  $z_E$ , και  $\psi$  δεν είναι μέρος του διανύσματος κατάστασης.

## 2.9 Αδιάστατο σύστημα

Το μεγάλο πλεονέκτημα που παρέχουν οι αδιάστατες μορφές των εξισώσεων και οι αδιάστατοι συντελεστές που προκύπτουν είναι γνωστά από την μηχανική των ρευστών (εξισώσεις Navier-Stokes και αδιάστατοι αριθμοί Reynolds, Prandtl, Mach, κ.λ.π) και την αεροδυναμική (αδιάστατοι συντελεστές για τα αεροδυναμικά φορτία, όπως άντωση, οπισθέλκουσας κ.λ.π.). Η χρήση των αδιάστατων αριθμών και συντελεστών απαλείφει την εξάρτηση από την ταχύτητα, μέγεθος (χαρακτηριστικό μήκος), την πυκνότητα κ.λ.π. Κατά τον ίδιο τρόπο, είναι αναγκαίο να βρούμε αδιάστατους συντελεστές για πολλές από τις παραγώγους που εμφανίζονται στις εξισώσεις κίνησης. Στην μηχανική της πτήσης όμως, αντίθετα με την μηχανική των ρευστών και την κλασσική αεροδυναμική δεν υπάρχει ένας μοναδικός τρόπος ορισμού αδιάστατων αριθμών και μεγεθών. Στο κεφάλαιο αυτό λοιπόν θα παρουσιάσουμε το σύστημα που ορίστηκε από την NASA και χρησιμοποιήθηκε μέχρι σήμερα σε ευρεία κλίμακα.

Η παρουσίαση της αδιάστατης μορφής των εξισώσεων κίνησης γίνεται πιο κατανοητή όταν κάνουμε μία σύντομη αναδρομή της αδιάστατης ανάλυσης που αφορά το γενικό πρόβλημα της δυναμικής της πτήσης. Στην ανάλυση που θα παρουσιάσουμε θεωρούμε ένα σύνολο αεροσκαφών που είναι όμοια γεωμετρικά και εκτελούν μη επιταχυνόμενη, ανεξάρτητη από τον χρόνο κίνηση με διαφορετικές ταχύτητες. Το μέγεθος όμως των αεροσκαφών στην ανάλυσή μας δεν είναι το ίδιο. Υποθέτουμε ότι σε ένα από τα αεροσκάφη επιβάλλεται μία διαταραχή που έχει σαν αποτέλεσμα την μεταβολή ως προς τον χρόνο κάποιας αδιάστατης μεταβλητής  $\Pi$ . Η μεταβλητή  $\Pi$  μπορεί να είναι ο παράγοντας φόρτισης της πτέρυγας, η γωνία περιστροφής κ.λ.π. Η παραπάνω διαδικασία για το συγκεκριμένο αεροσκάφος του συνόλου εκφράζεται μαθηματικά από την σχέση

$$\Pi = f(t) \quad 2.9.1$$

Στην περίπτωση που η παραπάνω εξίσωση απαιτείται να εκφράζει την συμπεριφορά όλων των αεροσκαφών που θεωρήσαμε, η μεταβλητή  $\Pi$  δεν είναι συνάρτηση μόνο του χρόνου αλλά και των μεταβλητών  $u_0$ ,  $\rho$ ,  $m$ ,  $L$  (μήκος),  $g$ ,  $M$ ,  $t$ , ή πιθανώς και άλλων ακόμα μεταβλητών, δηλαδή

$$\Pi = f(u_0, \rho, m, L, g, M, t) \quad 2.9.1$$

Στην παραπάνω σχέση υπάρχουν 8 μεταβλητές  $\Pi$ ,  $u_0$ ,  $\rho$ ,  $m$ ,  $L$ ,  $g$ ,  $M$ ,  $t$  όπου  $u_0$  είναι η ταχύτητα αφοράς,  $\rho$  είναι η πυκνότητα,  $L$  κάποι χαρακτηριστικό μήκος όπως το μήκος χορδής της πτέρυγας,  $m$  είναι η μάζα,  $t$  είναι ο χρόνος, και  $M$  είναι ο αριθμός Mach.

Το Π-θεώρημα του Buckingham επιβάλλει, ότι οι παρακάτω ποσότητες στην Εξ. (2.9.2), που εξαρτώνται και περιγράφονται με τρεις βασικές διαστάσεις,  $L, M, T$ , συνδέονται με  $8-3=5$  ανεξάρτητους αδιάστατους συνδυασμούς των οκτώ ποσοτήτων. Δηλαδή, αυτές οι πέντε Π-συναρτήσεις μπορεί να θεωρηθούν και σαν οι μοναδικές μεταβλητές στην Εξ. (2.9.2) στην θέση των 8 αρχικών μεταβλητών. Επί πλέον, δυο αεροσκάφη από το σύνολο που θεωρήσαμε είναι δυναμικά όμοια όταν όλες οι Π-συναρτήσεις του ενός είναι και αριθμητικά ίσες με αυτές του άλλου. Οι αδιάστατοι συνδυασμοί που μπορούμε να σχηματίσουμε για την Εξ. (2.9.2) είναι:

$$\Pi, M, \frac{m}{\rho L^3}, \frac{u_o t}{L}, \frac{u_o^2}{Lg}$$

και με την εφαρμογή του θεωρήματος του Buckingham βρίσκουμε

$$\Pi = f\left(M, \frac{m}{\rho L^3}, \frac{u_o t}{L}, \frac{u_o^2}{Lg}\right) \quad 2.9.3$$

Στην παραπάνω σχέση  $(u_o^2/Lg)$  είναι ο γνωστός αριθμός Frude,  $(F = u_o t/L)$  είναι η ανοιγμένη συχνότητα (reduced frequency  $k = u_o t/L$ ) και ο όρος  $m/\rho L^3$  γράφεται ως  $\mu = m/\rho S L$  όπου  $S$  είναι μία χαρακτηριστική επιφάνεια. Δηλαδή, η Εξ. (2.9.3) γράφεται

$$\Pi = f(M, \mu, k, F) \quad 2.9.4$$

Η παραπάνω σχέση είναι μία συνάρτηση πέντε αντί για οκτώ μεταβλητών.

Οι ποσότητες που πρέπει να αδιαστατοποιηθούν φαίνονται στον πίνακα 2.1. Η αδιάστατη μορφή των ποσοτήτων φαίνεται στη τρίτη στήλη, ενώ στην δεύτερη στήλη δίνεται η ποσότητα με την οποία πρέπει να διαιρέσουμε για να πετύχουμε αδιαστατοποίηση.

**Πίνακας 2.1** Αδιάστατα μεγέθη των εξισώσεων κίνησης

Μέγεθος με διαστάσεις	Διαιρέτης για τις γενικές εξισώσεις	Διαιρέτης για τις εξισώσεις μικρών διαταραχών	αδιάστατο μέγεθος
$X, Y, Z$	$1/2 \rho V^2 S$	$1/2 \rho V^2 S$	$C_X, C_Y, C_Z$
$mg$	$1/2 \rho V^2 S$	$1/2 \rho V^2 S$	$C_W$
$M$	$1/2 \rho V^2 \bar{c}$	$1/2 \rho V^2 \bar{c}$	$C_m$
$L, N$	$1/2 \rho V^2 b$	$1/2 \rho V^2 b$	$C_l, C_n$
$u, v, w$	$V$	$u_o$	$\hat{u}, \hat{v}, \hat{w}$
$\dot{\alpha}, q$	$2V/\bar{c}$	$2u_o/\bar{c}$	$\hat{\alpha}, \hat{q}$
$\dot{\beta}, p, r$	$2V/b$	$2u_o/b$	$\hat{\beta}, \hat{p}, \hat{r}$
$m$	$\rho S \bar{c} / 2$	$\rho S \bar{c} / 2$	$\mu$
$I_y$	$\rho S (\bar{c} / 2)^3$	$\rho S (\bar{c} / 2)^3$	$\hat{I}_y$
$I_x, I_z, I_{zx}$	$\rho S (b / 2)^3$	$\rho S (b / 2)^3$	$\hat{I}_x, \hat{I}_z, \hat{I}_{zx}$
$t$		$t^* = \bar{c} / (2u_o)$	$\hat{t}$



### Αδιάστατες παράγωγοι ευστάθειας

Οι αδιάστατες παράγωγοι ευστάθειας είναι οι μερικές παράγωγοι του συντελεστή ροπής και δύναμης που περιλαμβάνονται στις στήλες 2 – 4 των παρακάτω πινάκων.

**Πίνακας 2.2** Κατά μήκος παράγωγοι (longitudinal derivatives)

	$C_x$	$C_z$	$C_m$
$\hat{u}$	$C_{X_u}$	$C_{Z_u}$	$C_{m_u}$
$\alpha$	$C_{X_\alpha}$	$C_{Z_\alpha}$	$C_{m_\alpha}$
$\hat{q}$	$C_{X_{\hat{q}}}$	$C_{Z_{\hat{q}}}$	$C_{m_{\hat{q}}}$
$\hat{\alpha}$	$C_{X_{\hat{\alpha}}}$	$C_{Z_{\hat{\alpha}}}$	$C_{m_{\hat{\alpha}}}$

**Πίνακας 2.3** Κατά πλάτος παράγωγοι (lateral derivatives)

	$C_Y$	$C_l$	$C_n$
$\beta$	$C_{Y_\beta}$	$C_{l_\beta}$	$C_{n_\beta}$
$\hat{p}$	$C_{Y_{\hat{p}}}$	$C_{l_{\hat{p}}}$	$C_{n_{\hat{p}}}$
$\hat{r}$	$C_{Y_{\hat{r}}}$	$C_{l_{\hat{r}}}$	$C_{n_{\hat{r}}}$
$\hat{\beta}$	$C_{Y_{\hat{\beta}}}$	$C_{l_{\hat{\beta}}}$	$C_{n_{\hat{\beta}}}$

Με τους ορισμούς των πινάκων 2.1 – 2.3 είναι δυνατόν να καταστήσουμε αδιάστατες τις εξισώσεις κίνησης. Η αριθμητική επίλυση των εξισώσεων είναι δυνατή ανεξάρτητα από την μορφή των εξισώσεων. Η συνήθης πρακτική όμως είναι να χρησιμοποιούνται οι εξισώσεις στην διαστατή τους μορφή για την αριθμητική επίλυση και κατόπιν να παρουσιάζονται τα αποτελέσματα της επίλυσης σε αδιάστατη μορφή.

## 2.10 Παράγωγοι ευστάθειας

Παραδείγματα των παραγώγων ευστάθειας δίνονται στους πίνακες 2.4 και 2.5.

**Πίνακας 2.4** Κατά μήκος αδιάστατες παράγωγοι

	X	Z	M
u	$\rho u_o S C_{w_u} \sin \theta_o + 1/2 \rho u_o S C_{x_u}$	$1/2 \rho u_o S C_{z_\mu} - \rho u_o S C_{w_o}$	$1/2 \rho u_o \bar{c} S C_{m_u}$
w	$1/2 \rho u_o S C_{x_a}$	$1/2 \rho u_o S C_{z_a}$	$1/2 \rho u_o \bar{c} S C_{m_a}$
q	$1/4 \rho u_o \bar{c} S C_{x_q}$	$1/4 \rho u_o \bar{c} S C_{z_q}$	$1/4 \rho u_o \bar{c}^2 S C_{m_q}$
$\dot{w}$	$1/4 \rho \bar{c} S C_{x_{\dot{a}}}$	$1/4 \rho \bar{c} S C_{z_{\dot{a}}}$	$1/4 \rho \bar{c}^2 S C_{m_{\dot{a}}}$

**Πίνακας 2.5** Κατά μήκος αδιάστατες παράγωγοι

	X	L	N
v	$1/2 \rho u_o S C_{y_\beta}$	$1/2 \rho u_o b S C_{l_\beta}$	$1/2 \rho u_o b S C_{n_\beta}$
p	$1/4 \rho u_o b S C_{y_p}$	$1/4 \rho u_o b^2 S C_{l_p}$	$1/4 \rho u_o b^2 S C_{n_p}$
r	$1/4 \rho u_o b S C_{y_r}$	$1/4 \rho u_o b^2 S C_{l_r}$	$1/4 \rho u_o b^2 S C_{n_r}$

Στην συνέχεια του κεφαλαίου αυτού θα παρουσιάσουμε μια πιο λεπτομερή ανάλυση ορισμένων σημαντικών παραγώγων ευστάθειας.

### Παράγωγοι ως προς z

Η δύναμη στην κατεύθυνση z (δες Πίνακα 2.1) είναι  $Z = C_z \rho V^2 S / 2$  όπου  $V^2 = u^2 + v^2 + w^2$  και για μικρές διαταραχές  $u = u_o + \Delta u$ , δηλαδή

$$Z_u = \left( \frac{\partial Z}{\partial u} \right)_o = C_{z_o} \rho u_o S \left( \frac{\partial V}{\partial u} \right)_o + \frac{1}{2} \rho u_o^2 S \left( \frac{\partial C_z}{\partial u} \right)_o \quad 2.10.1$$

Όπου ο δείκτης ο υποδηλώνει την κατάσταση πτήσης αφοράς.

Η παράγωγος  $(\partial V / \partial u)$  είναι  $(\partial V / \partial u) = 2u / 2V$ , επίσης  $(\partial V / \partial u)_o = 1$  και  $C_z = Z / 0.5 \rho V^2 S$  οπότε

$$\left( \frac{\partial C_z}{\partial u} \right)_o = \frac{1}{u_o} \left( \frac{\partial C_z}{\partial \hat{u}} \right)_o = \frac{1}{u_o} C_{z_u} \quad 2.10.2$$

αλλά από την Εξ. (2.8.6) έχουμε  $Z_o = -mg \cos \theta_o$  οπότε

$$C_{z_o} = -C_{w_o} \cos \theta_o \quad 2.10.3$$

δηλαδή η παράγωγος ευστάθειας  $Z_u = (\partial Z / \partial u)_o$  είναι

$$Z_u = -\rho u_o S C_{w_o} \cos \theta_o + \frac{1}{2} \rho u_o S C_{z_u} \quad 2.10.4$$

Η παράγωγος  $(\partial V / \partial w)_o = 0$  οπότε

$$Z_w = (\partial Z / \partial w)_o = \frac{1}{2} \rho u_o^2 S (\partial C_z / \partial w)_o \quad 2.10.5$$

αλλά  $\alpha_x = \tan^{-1}(w/u) = \tan^{-1}[w/(u + \Delta u)]$  που για μικρές αποκλίσεις από την ισορροπία είναι  $\alpha_x \approx (w/u_o)$  και η παράγωγος  $(\partial C_z / \partial w) = (\partial C_z / \partial \alpha_x) / u_o$  οπότε

$$Z_w = \frac{1}{2} \rho u_o S (\partial C_z / \partial \alpha_x)_o = \frac{1}{2} \rho u_o S C_{z_{\alpha_x}} \quad 2.10.3$$

Με τον ίδιο τρόπο βρίσκουμε

$$Z_{\dot{w}} = \left( \frac{\partial Z}{\partial \dot{w}} \right) \frac{1}{2} \rho u_o^2 S (\partial C_z / \partial \dot{w}) = \frac{1}{2} \rho u_o S \left( \frac{\partial Z}{\partial \dot{\alpha}_x} \right)_o = \frac{1}{2} \rho u_o S C_{z_{\dot{\alpha}_x}} \quad 2.10.3$$

αλλά

$$\left( \frac{\partial Z}{\partial \dot{\alpha}_x} \right)_o = \frac{\bar{c}}{2u_o} C_{z_{\dot{\alpha}_x}} \quad 2.10.3$$

και

$$Z_{\dot{w}} = \frac{1}{4} \rho \bar{c} S C_{z_{\dot{\alpha}_x}} \quad 2.10.3$$

Η παράγωγος ως προς τον ρυθμό περιστροφής  $q$  είναι

$$Z_q = \left( \frac{\partial Z}{\partial q} \right)_o = \frac{1}{2} \rho u_o^2 S \left( \frac{\partial C_Z}{\partial q} \right)_o \quad 2.10.3$$

αλλά  $q = 2u_o \hat{q} / \bar{c}$  και

$$Z_q = \frac{1}{4} \rho u_o \bar{c} S C_{Z_q} \quad 2.10.3$$

## 2.11 Ελαστικοί βαθμοί ελευθερίας

Στα προηγούμενα κεφάλαια παρουσιάστηκαν οι εξισώσεις κίνησης που διέπουν την κίνηση με έξι βαθμούς ελευθερίας. Είναι όμως γνωστό, ότι η πτητική κατάσταση των αεροσκαφών εξαρτάται από την δομική ακεραιότητα και τις ελαστικές παραμορφώσεις της δομής του αεροσκάφους, που επίσης επηρεάζουν και την ευστάθεια και τα χαρακτηριστικά ελέγχου πτήσης. Η ανάλυση των ελαστικών παραμορφώσεων και οι αλλαγές που συνεπάγονται στις εξισώσεις κίνησης είναι αντικείμενο της αεροελαστικότητας. Το κεφάλαιο αυτό όμως δεν έχει σκοπό την πλήρη μελέτη των αεροελαστικών φαινομένων, αλλά μόνο να δείξει πως μπορούν οι παραμορφώσεις να συμπεριληφθούν στο μαθηματικό μοντέλο που περιγράφει την κίνηση του αεροσκάφους.

### Τροποποιήσεις των εξισώσεων κίνησης

Υποθέτουμε ότι οι αδρανειακοί όροι στις εξισώσεις κίνησης που αναπτύξαμε στα προηγούμενα κεφάλαια παραμένουν αμετάβλητοι υπό την παρουσία των ελαστικών παραμορφώσεων. Στην πραγματικότητα όμως η κίνηση στερεού σώματος δεν είναι τελείως ανεξάρτητη από τις ελαστικές παραμορφώσεις διότι οι ελαστικές παραμορφώσεις προξενούν διαταραχές στα αεροδυναμικά φορτία. Οι διαταραχές αυτές μπορεί να ληφθούν υπ' όψη στις εξισώσεις κίνησης με την βοήθεια κατάλληλων παραγώγων. Παραδείγματος χάριν, οι όροι που πρέπει να προστεθούν στην ροπή περιστροφής (pitching moment),  $M$ , και συνδέονται με τους ελαστικούς βαθμούς ελευθερίας είναι:

$$M_{\varepsilon_n} \varepsilon_n + M_{\dot{\varepsilon}_n} \dot{\varepsilon}_n + M_{\ddot{\varepsilon}_n} \ddot{\varepsilon}_n = 0 \quad 2.11.1$$

Οι επί πλέον εξισώσεις κίνησης είναι οι εξισώσεις κίνησης Lagrange με γενικευμένες συντεταγμένες τα  $\varepsilon_n$ . Παραδείγματος χάριν, εάν  $T$  είναι η κινητική ενέργεια της μετατόπισης που συνδέεται με την ελαστική παραμόρφωση σχετικά με το σύστημα αναφοράς  $F_B$  και  $U$  είναι η ενέργεια παραμόρφωσης (strain energy) τότε η γενικευμένη εξωτερική δύναμη  $\vec{f}_n$  είναι

$$\bar{\mathbf{f}}_n = \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\varepsilon}_n} - \frac{\partial T}{\partial \varepsilon_n} + \frac{\partial U}{\partial \dot{\varepsilon}_n} \quad 2.11.2$$

Αν θεωρήσουμε ότι ο μοναδικός βαθμός ελευθερίας είναι ο  $\varepsilon_n$  τότε

$$T = \frac{1}{2} \int (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) dm \quad 2.11.3$$

Και όταν οι συντεταγμένες  $x$ ,  $y$ ,  $z$  περιγράφονται από (normal modes) όπως

$$\begin{aligned} x(t) &= \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x_o, y_o, z_o) \varepsilon_n(t) \\ y(t) &= \sum_{n=1}^{\infty} g_n(x_o, y_o, z_o) \varepsilon_n(t) \\ z(t) &= \sum_{n=1}^{\infty} h_n(x_o, y_o, z_o) \varepsilon_n(t) \end{aligned} \quad 2.11.4$$

η κινητική ενέργεια γίνεται

$$T = \frac{1}{2} \dot{\varepsilon}_n^2 \int (f_n^2 + g_n^2 + h_n^2) dm \quad 2.11.5$$

όπου το ολοκλήρωμα είναι η γενικευμένη αδράνεια του  $n$  mode και συμβολίζεται με  $I_n$

$$\begin{aligned} I_n &= \int (f_n^2 + g_n^2 + h_n^2) dm \\ T &= \frac{1}{2} I_n \dot{\varepsilon}_n^2 \end{aligned} \quad 2.11.6$$

Η ενέργεια παραμόρφωσης βρίσκεται με εφαρμογή της μεθόδου Rayleigh που επιβάλλει ότι η μέγιστη παραμόρφωση είναι ίση με την μέγιστη κινητική ενέργεια που έχουν τα στοιχεία  $dm$  όταν διέρχονται από την θέση ισορροπίας όπου η ενέργεια παραμόρφωσης είναι μηδενική. Δηλαδή, όταν υποθέσουμε ότι  $\varepsilon_n = A \sin \omega_n t$  η μέγιστη κινητική ενέργεια είναι

$$T_{\max} = \frac{1}{2} I_n A^2 \omega_n^2 \quad 2.11.7$$

Υποθέτοντας ότι η σχέση-τάσης παραμόρφωσης είναι γραμμική, βρίσκουμε ότι η ενέργεια παραμόρφωσης είναι τετραγωνική συνάρτηση του  $\varepsilon_n$  δηλαδή,  $U = 1/2 k \varepsilon_n^2$ , οπότε

$$U_{\max} = \frac{1}{2} k A^2 = T_{\max} = \frac{1}{2} I_n A^2 \omega_n^2 \quad 2.11.1$$

ή

$$k = I_n \omega_n^2 \quad 2.11.1$$

και

$$U = \frac{1}{2} I_n \omega_n^2 \varepsilon_n^2 \quad 2.11.1$$

Με αντικατάσταση των παραπάνω αποτελεσμάτων στην Εξ. (2.11.1) βρίσκουμε

$$I_n \ddot{\varepsilon}_n + I_n \omega_n^2 \varepsilon_n = \mathbf{f}_n \quad 2.11.1$$

Όπου η γενικευμένη δύναμη  $\mathbf{f}_n$  βρίσκεται από το έργο που παράγεται κατά την δυνατή μετατόπιση (virtual displacement)

$$\mathbf{f}_n = \frac{\partial W}{\partial \varepsilon_n} \quad 2.11.1$$

αλλά το έργο  $W$  οφείλεται στις εξωτερικές δυνάμεις που συμπεριλαμβάνουν και τις αδρανειακές δυνάμεις και που οφείλονται στην μη ομοιόμορφη κίνηση του συστήματος αφορά και δίνονται από

$$d\vec{\mathbf{f}}_i = -\vec{\mathbf{a}} dm \quad 2.11.1$$

Το δυνατό έργο (virtual work) που παράγεται από αυτές τις δυνάμεις κατά την διάρκεια μιας δυνατής παραμόρφωσης της δομικής κατασκευής του αεροσκάφους είναι

$$\begin{aligned} \delta W_i &= \int (\delta x df_{x_i} + \delta y df_{y_i} + \delta z df_{z_i}) = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \delta \varepsilon_n \int (f_n df_{x_i} + g_n df_{y_i} + h_n df_{z_i}) \end{aligned} \quad 2.11.1$$

οπότε

$$\mathbf{f}_{n_i} = \frac{\partial W_i}{\partial \varepsilon_n} = \int f_n df_{x_i} + g_n df_{y_i} + h_n df_{z_i} \quad 2.11.1$$

Η επιπρόσθετη συνεισφορά στην γενικευμένη δύναμη  $\mathbf{f}_n$  οφείλεται στα αεροδυναμικά φορτία που εκτελούν έργο

$$\delta W_a = -\int p \mathbf{n} \cdot (\vec{\mathbf{r}} - \vec{\mathbf{r}}_o) dS \quad 2.11.1$$

Όπου το ολοκλήρωμα αναφέρεται σε όλη την επιφάνεια του αεροσκάφους και  $(\vec{\mathbf{r}} - \vec{\mathbf{r}}_o)$  είναι το διάνυσμα μετατόπισης που δίνεται από

$$(\bar{\mathbf{r}} - \bar{\mathbf{r}}_o) = \sum_{n=1}^{\infty} (f_n \bar{\mathbf{e}}_x + g_n \bar{\mathbf{e}}_y + h_n \bar{\mathbf{e}}_z) \delta \varepsilon_n \quad 2.11.1$$

οπότε

$$\delta W_a = - \sum_{n=1}^{\infty} \delta \varepsilon_n \int \mathbf{p} (f_n \bar{\mathbf{e}}_x + g_n \bar{\mathbf{e}}_y + h_n \bar{\mathbf{e}}_z) dS \quad 2.11.1$$

$$\mathbf{f}_n = \frac{\partial W_a}{\partial \varepsilon_n} = - \int \mathbf{p} (f_n \bar{\mathbf{e}}_x + g_n \bar{\mathbf{e}}_y + h_n \bar{\mathbf{e}}_z) dS \quad 2.11.1$$

Όλες οι μεταβλητές στο παραπάνω ολοκλήρωμα είναι συναρτήσεις της θέσης στην επιφάνεια  $(x_o, y_o, z_o)$  και τα αεροδυναμικά φορτία  $\mathbf{P}$  είναι συνάρτηση των γενικευμένων συντεταγμένων και των παραγώγων αυτών όπως επίσης και της θέσης των επιφανειών ελέγχου. Δηλαδή,  $\mathbf{f}_n$  είναι μία γραμμική συνάρτηση που μπορεί να εκφρασθεί μεσω των αεροδυναμικών παραγώγων ως

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_n = & A_{nu} \Delta u + A_{n\dot{u}} \Delta \dot{u} + \dots \\ & + A_{np} \Delta p + A_{n\dot{p}} \Delta \dot{p} + \dots \\ & + A_{nr} \Delta r + A_{n\dot{r}} \Delta \dot{r} + \dots \\ & + \sum_{m=1}^{\infty} a_{nm} \varepsilon_m + \sum_{m=1}^{\infty} b_{nm} \dot{\varepsilon}_m + \sum_{m=1}^{\infty} c_{nm} \ddot{\varepsilon}_m \end{aligned} \quad 2.11.1$$

Στις περισσότερες εφαρμογές πολλές από τις αεροδυναμικές παραγώγους παραμένουν αμετάβλητες και παραλείπονται οπότε διατηρούνται μόνο οι πιο σημαντικές.

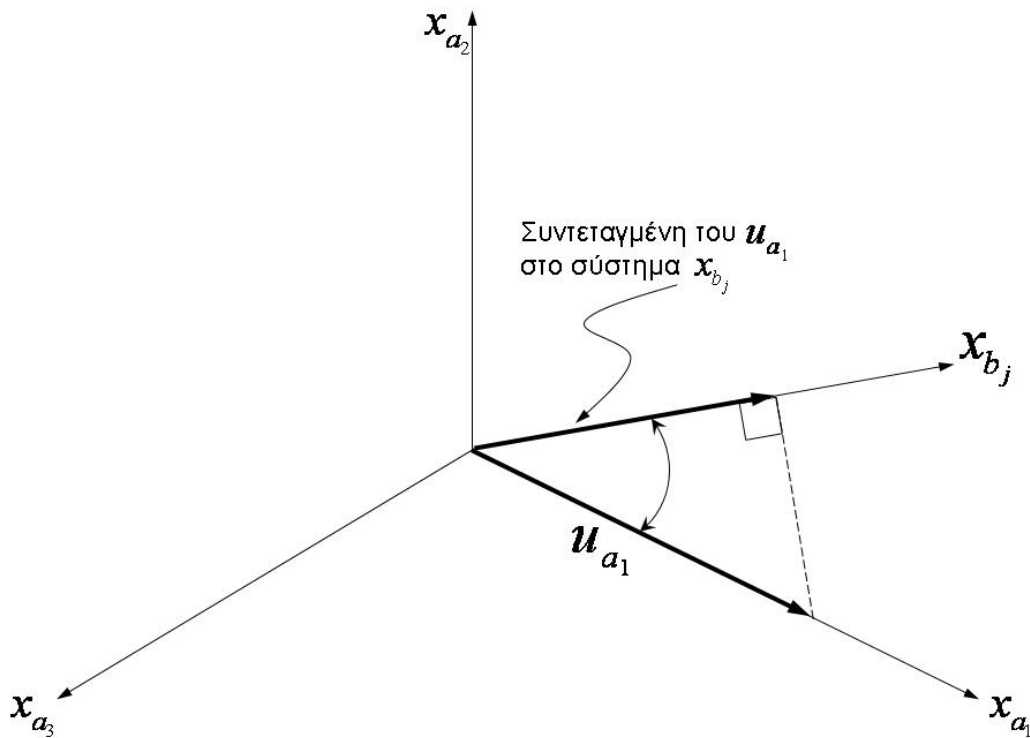
## Παράρτημα Α

### 1. Μετασχηματισμοί συντεταγμένων

Θεωρούμε το διάνυσμα  $\bar{\mathbf{u}}$  με συνιστώσες  $\bar{\mathbf{u}}_a = [u_{a1}, u_{a2}, u_{a3}]^T$  στο σύστημα αναφοράς  $F_a$  και  $u_{bi}$ ,  $i = 1, 2, 3$  στο σύστημα αναφοράς  $F_b$

$$\bar{\mathbf{u}}_a = \begin{bmatrix} u_{a1} \\ u_{a2} \\ u_{a3} \end{bmatrix} \text{ στο σύστημα αναφοράς } F_a, \quad \bar{\mathbf{u}}_b = \begin{bmatrix} u_{b1} \\ u_{b2} \\ u_{b3} \end{bmatrix} \text{ στο σύστημα αναφοράς } F_b, \quad \text{A.1.1}$$

Οι συνιστώσα  $u_{a1}$  στις κατευθύνσεις  $x_{bj}$  είναι  $u_{a1} \cos(\theta_{j1})$  όπου  $\theta_{j1}$  είναι η γωνία  $(O_b x_{bj}, O_a x_{a1})$  όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



**Σχήμα Α.1** Μετασχηματισμός συστήματος συντεταγμένων.

Οι συνιστώσες  $u_{ai}$  σε κάθε κατεύθυνση  $x_{bj}$  είναι

$$u_{bj} = \sum_{i=1}^3 l_{ij} u_{ai} \quad j = 1, 2, 3 \quad \text{A.1.2}$$



$$l_{ij} = \cos(\theta_{ij}) \quad \text{A.2.3}$$

όπου  $l_{ij} = \cos(\theta_{ij})$  είναι τα συνημίτονα κατεύθυνσης και η Εξ. (1.1) γράφεται υπό μορφή μητρώου ως

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{u}}_b &= \tilde{L}_{ba} \bar{\mathbf{u}}_a \\ \tilde{L}_{ba} &= [l_{ij}] \end{aligned} \quad \text{A.1.4}$$

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{u}}_a &= \tilde{L}_{ba}^{-1} \bar{\mathbf{u}}_b = \tilde{L}_{ab} \bar{\mathbf{u}}_b \\ \tilde{L}_{ab} &= \tilde{L}_{ba}^{-1} \end{aligned} \quad \text{A.1.5}$$

όπου για τους διαδοχικούς μετασχηματισμούς ισχύει

$$\left. \begin{aligned} \bar{\mathbf{u}}_b &= \tilde{L}_{ba} \bar{\mathbf{u}}_a \\ \bar{\mathbf{u}}_c &= \tilde{L}_{cb} \bar{\mathbf{u}}_b = \tilde{L}_{cb} (\tilde{L}_{ba} \bar{\mathbf{u}}_a) \\ \bar{\mathbf{u}}_c &= \tilde{L}_{ca} \bar{\mathbf{u}}_a \end{aligned} \right\} \Rightarrow \tilde{L}_{ca} = \tilde{L}_{cb} \tilde{L}_{ba} \quad \text{A.1.6}$$

επειδή  $\bar{\mathbf{u}}_a = \bar{\mathbf{u}}_b = \bar{\mathbf{u}}_c = \bar{\mathbf{u}}$

$$|\bar{\mathbf{u}}| = u^2 = \bar{\mathbf{u}}_b^T \bar{\mathbf{u}}_b = \bar{\mathbf{u}}_a^T \tilde{L}_{ba}^T \tilde{L}_{ba} \bar{\mathbf{u}}_a = \bar{\mathbf{u}}_a^T \bar{\mathbf{u}}_a \quad \text{A.1.7}$$

Δηλαδή τα μητρώα  $\tilde{L}_{ab}$  και  $\tilde{L}_{ba}$  ικανοποιούν την παρακάτω συνθήκη ορθογωνιότητας

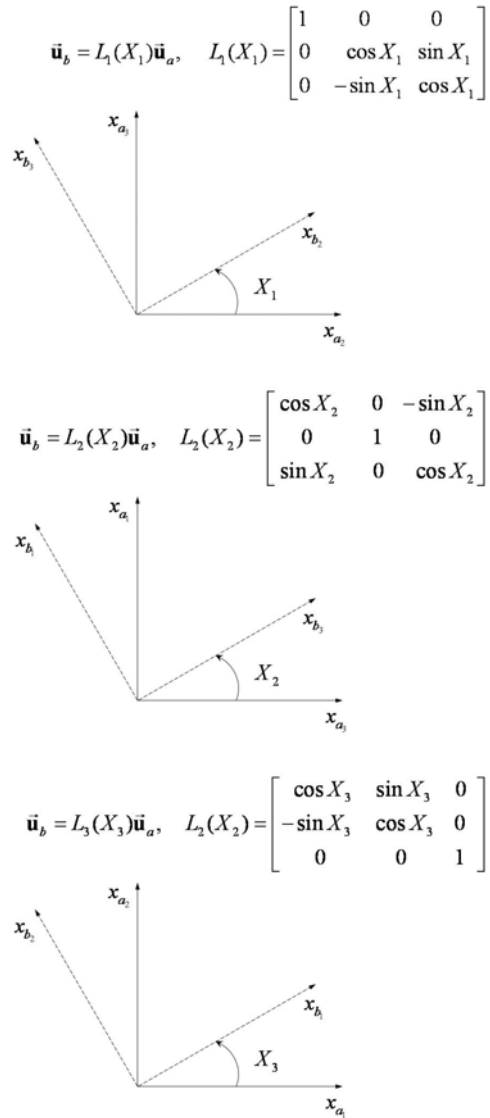
$$\begin{aligned} \tilde{L}_{ba}^T \tilde{L}_{ba} &= \tilde{I}, \quad |\tilde{L}_{ba}|^2 = 1 \\ \tilde{L}_{ba}^T &= \tilde{L}_{ba}^{-1} = \tilde{L}_{ab} \\ \sum_{k=1}^3 l_{ki} l_{kj} &= \delta_{ij} \end{aligned} \quad \text{A.1.8}$$

## 2. Μητρώο μετασχηματισμού και γωνίες περιστροφής

Θεωρούμε ένα διάνυσμα στο αρχικό σύστημα αναφοράς  $F_a$  και διάνυσμα στο σύστημα αναφοράς  $F_b$  που προκύπτει μετά από περιστροφή του συστήματος συντεταγμένων  $F_a$ . Τότε ισχύει

$$\vec{u}_b = L_i(x_i) \vec{u}_a \quad \text{A.2.1}$$

Η περιστροφή του  $F_a$  στην τελική θέση  $F_b$  μπορεί να θεωρηθεί ότι είναι αποτέλεσμα τριών περιστροφών όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



**Σχήμα Α.2** Βασικές περιστροφές (i) γύρω από τον άξονα  $X_{a_1}$ , (ii) γύρω από τον άξονα  $X_{a_2}$  και (iii) γύρω από τον άξονα  $X_{a_3}$

Τα μητρώα της κάθε βασικής περιστροφής είναι

$$\tilde{L}(x_1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos X_1 & \sin X_1 \\ 0 & -\sin X_1 & \cos X_1 \end{bmatrix} \quad \text{A.2.2}$$

$$\tilde{L}(x_2) = \begin{bmatrix} \cos X_2 & 0 & -\sin X_2 \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin X_2 & 0 & \cos X_2 \end{bmatrix} \quad \text{A.2.3}$$

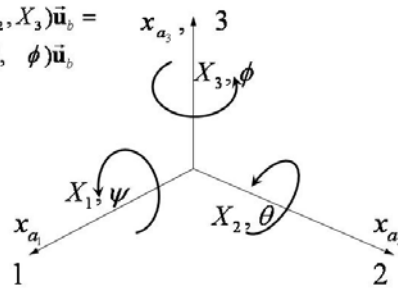
$$\tilde{L}(x_3) = \begin{bmatrix} \cos X_3 & \sin X_3 & 0 \\ -\sin X_3 & \cos X_3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{A.2.4}$$

όπου  $(X_1, X_2, X_3) = (\psi, \theta, \phi)$  και  $\tilde{L}_{ba} = L_1(\phi)L_2(\theta)L_3(\psi)$  δηλαδή η περιστροφή στην τελική θέση γίνεται με το παρακάτω μητρώο μετασχηματισμού

$$\tilde{L}_{ab} = \begin{bmatrix} \cos \theta \cos \psi & \cos \theta \sin \psi & -\sin \theta \\ \sin \phi \sin \theta \cos \psi - \cos \phi \sin \psi & \sin \phi \sin \theta \sin \psi + \cos \phi \cos \psi & \sin \phi \cos \theta \\ \cos \phi \sin \theta \cos \psi + \sin \phi \sin \psi & \cos \phi \sin \theta \sin \psi - \sin \phi \cos \psi & \cos \phi \cos \theta \end{bmatrix}$$

$$\bar{\mathbf{u}}_a = L_{ab}(X_1, X_2, X_3)\bar{\mathbf{u}}_b =$$

$$L_{ab}(\psi, \theta, \phi)\bar{\mathbf{u}}_b$$



$$L_{ab} = L_3(X_3)L_2(X_2)L_1(X_1) = L_1(\phi)L_1(\theta)L_1(\psi) =$$

$$\begin{bmatrix} \cos \phi \sin \theta & \cos \theta \sin \psi & -\sin \theta \\ \sin \phi \sin \theta \cos \psi - \cos \phi \sin \psi & \sin \phi \sin \theta \sin \psi + \cos \phi \cos \psi & \sin \phi \cos \theta \\ \cos \phi \sin \theta \cos \psi + \sin \phi \sin \psi & \cos \phi \sin \theta \sin \psi - \sin \phi \cos \psi & \cos \phi \cos \theta \end{bmatrix}$$

**Σχήμα A.3** Περιστροφή συστήματος συντεταγμένων

### 3. Μετασχηματισμοί παραγώγου διανύσματος

Θεωρούμε το διάνυσμα  $\bar{\mathbf{u}}$  που παρατηρείται συγχρόνως από τα συστήματα αναφοράς  $F_a$  και  $F_b$ , όπου το σύστημα αναφοράς  $F_b$  περιστρέφεται σχετικά με το  $F_a$  με σταθερή γωνιακή ταχύτητα  $\bar{\omega}$ . Η εξίσωση μετασχηματισμού συντεταγμένων του διανύσματος  $\bar{\mathbf{u}}_b$  από το σύστημα αναφοράς  $F_b$  στο σύστημα αναφοράς  $F_a$  είναι

$$\bar{\mathbf{u}}_b = \tilde{L}_{ba} \bar{\mathbf{u}}_a \quad \text{A.3.1}$$

και οι χρονικές παράγωγοι των διανυσμάτων είναι

$$\dot{\bar{\mathbf{u}}}_a = \begin{bmatrix} \dot{u}_{a1} \\ \dot{u}_{a2} \\ \dot{u}_{a3} \end{bmatrix}, \quad \dot{\bar{\mathbf{u}}}_b = \begin{bmatrix} \dot{u}_{b1} \\ \dot{u}_{b2} \\ \dot{u}_{b3} \end{bmatrix} \quad \text{A.3.2}$$

Τα διανύσματα  $\bar{\mathbf{u}}_a$  και  $\bar{\mathbf{u}}_b$  είναι οι συντεταγμένες του ίδιου διανύσματος  $\bar{\mathbf{u}}$  σε διαφορετικά συστήματα αναφοράς  $F_a$  και  $F_b$ , αντίστοιχα. Οι παράγωγοι όμως,  $\dot{\bar{\mathbf{u}}}_a$  και  $\dot{\bar{\mathbf{u}}}_b$ , των διανυσμάτων  $\bar{\mathbf{u}}_a$  και  $\bar{\mathbf{u}}_b$ , είναι διαφορετικά διανύσματα επειδή τα συνημίτονα κατεύθυνσης  $l_{ij}$  μεταβάλλονται στον χρόνο λόγω της σχετικής περιστροφής των συστημάτων αναφοράς  $F_a$  και  $F_b$ . Οι παράγωγοι των διανυσμάτων βρίσκονται με εφαρμογή των κανόνων παραγωγίσης από

$$\begin{aligned} \dot{\bar{\mathbf{u}}}_a &= \tilde{L}_{ab} \dot{\bar{\mathbf{u}}}_b + \dot{\tilde{L}}_{ab} \bar{\mathbf{u}}_b \\ \dot{\bar{\mathbf{u}}}_b &= \tilde{L}_{ba} \dot{\bar{\mathbf{u}}}_a + \dot{\tilde{L}}_{ba} \bar{\mathbf{u}}_a \end{aligned} \quad \text{A.3.3}$$

Στις παραπάνω σχέσεις τα μητρώα  $\tilde{L}_{ab}$  και  $\tilde{L}_{ba}$  είναι ανεξάρτητα από το διάνυσμα  $\bar{\mathbf{u}}$ . Θεωρούμε ότι το διάνυσμα  $\bar{\mathbf{u}}_b$  είναι σταθερό στο σύστημα αναφοράς  $F_b$ . Η χρονική παράγωγος του διανύσματος  $\bar{\mathbf{u}}$  στο σύστημα αναφοράς  $F_a$  δίνεται από

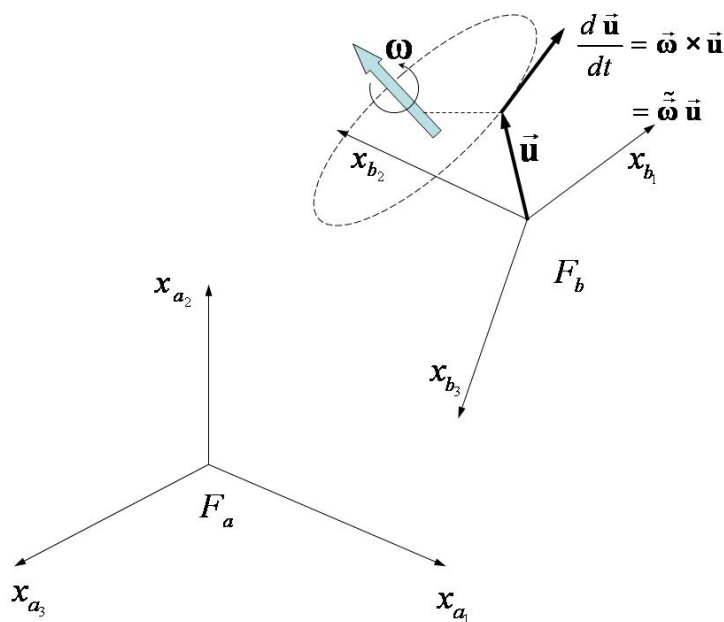
$$\dot{\bar{\mathbf{u}}}_a = \frac{d\bar{\mathbf{u}}}{dt} = \bar{\boldsymbol{\omega}} \times \bar{\mathbf{u}} \quad \text{A.3.4}$$

ή

$$\dot{\bar{\mathbf{u}}}_a = \tilde{\boldsymbol{\omega}}_a \times \bar{\mathbf{u}}_a \quad \text{A.3.5}$$

όπου

$$\tilde{\boldsymbol{\omega}}_a = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_{a3} & \omega_{a2} \\ \omega_{a3} & 0 & -\omega_{a1} \\ -\omega_{a2} & \omega_{a1} & 0 \end{bmatrix}$$



Σχήμα Α.4 Περιστροφή συστήματος συντεταγμένων.

Αλλά το διάνυσμα  $\bar{\mathbf{u}}_b$  θεωρήθηκε ότι είναι σταθερό στο σύστημα αναφοράς  $F_b$  .οπότε

$$\left. \begin{aligned} \dot{\bar{\mathbf{u}}}_a &= \tilde{L}_{ab} \dot{\bar{\mathbf{u}}}_b + \dot{\tilde{L}}_{ab} \bar{\mathbf{u}}_b = \dot{\tilde{L}}_{ab} \bar{\mathbf{u}}_b \\ (\bar{\mathbf{u}}_b \text{ σταθερό στο } F_b) &\Rightarrow \dot{\bar{\mathbf{u}}}_b = 0 \\ \dot{\bar{\mathbf{u}}}_a &= \tilde{\omega}_a \bar{\mathbf{u}}_a \end{aligned} \right\} \Rightarrow \dot{\tilde{L}}_{ab} \bar{\mathbf{u}}_b = \tilde{\omega}_a \bar{\mathbf{u}}_a = \tilde{\omega}_a \tilde{L}_{ab} \bar{\mathbf{u}}_b$$

δηλαδή

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{L}}_{ab} &= \tilde{\omega}_a \tilde{L}_{ab} \\ \tilde{\omega}_a &= \dot{\tilde{L}}_{ab} (\tilde{L}_{ab})^{-1} = \dot{\tilde{L}}_{ab} \tilde{L}_{ba} \end{aligned} \quad \text{A.3.6}$$

Η παραπάνω διαδικασία μπορεί να επαναληφθεί θεωρώντας το διάνυσμα  $\bar{\mathbf{u}}_a$  σταθερό στο σύστημα αναφοράς  $F_a$  και με το σύστημα αναφοράς  $F_b$  να περιστρέφεται με γωνιακή ταχύτητα  $-\tilde{\omega}$ , οπότε βρίσκουμε

$$\dot{\tilde{L}}_{ba} = -\tilde{\omega}_b \tilde{L}_{ba} \quad \text{A.3.7}$$

αλλά το μητρώο  $\tilde{\omega}$  είναι αντισυμμετρικό  $\tilde{\omega}^T = -\tilde{\omega}$  και ο μετασχηματισμός του δίνεται από

$$\tilde{\omega}_a = \tilde{L}_{ab} \tilde{\omega}_b \tilde{L}_{ba} \quad \text{A.3.8}$$

Η παράγωγος διανύσματος βρίσκεται με αντικατάσταση των παραπάνω στην Εξ. (A.3.3)

$$\begin{aligned} \dot{\bar{\mathbf{u}}}_a &= \tilde{L}_{ab} \dot{\bar{\mathbf{u}}}_b + \tilde{\omega}_b \bar{\mathbf{u}}_b \\ \dot{\bar{\mathbf{u}}}_b &= \tilde{L}_{ba} \dot{\bar{\mathbf{u}}}_a + \tilde{\omega}_a \bar{\mathbf{u}}_a \end{aligned} \quad \text{A.3.9}$$

#### 4 Μετασχηματισμοί μητρώων

Τα στοιχεία των μητρώων μετασχηματισμού εξαρτώνται από το σύστημα αναφοράς. Στην διανυσματική σχέση

$$\bar{\mathbf{u}} = \tilde{\mathbf{A}} \bar{\mathbf{w}} \quad \text{A.4.1}$$

Τα στοιχεία του μητρώου  $\tilde{\mathbf{A}}$  εξαρτώνται από το σύστημα αναφοράς, δηλαδή

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{u}}_a &= \tilde{\mathbf{A}}_a \bar{\mathbf{w}}_a \\ \bar{\mathbf{u}}_b &= \tilde{\mathbf{A}}_b \bar{\mathbf{w}}_b \end{aligned} \quad \text{A.4.2}$$

Ο μετασχηματισμός των διανυσμάτων  $\bar{\mathbf{u}}_a, \bar{\mathbf{w}}_a$  από σύστημα αναφοράς  $F_b$  στο σύστημα αναφοράς  $F_a$  είναι

$$\tilde{L}_{ba} \bar{\mathbf{u}}_a = \tilde{\mathbf{A}}_b \tilde{L}_{ba} \bar{\mathbf{w}}_a \quad \text{A.4.3}$$

και με πολλαπλασιασμό εξ αριστερών με το αντίστροφο μητρώο  $\tilde{L}_{ab}$  βρίσκουμε

$$\bar{\mathbf{u}}_a = \tilde{L}_{ab} \tilde{\mathbf{A}}_b \tilde{L}_{ba} \bar{\mathbf{w}}_a \quad \text{A.4.4}$$

Δηλαδή οι σχέσεις μετασχηματισμού μητρώου από το σύστημα αναφοράς  $F_a$  στο σύστημα αναφοράς  $F_b$  είναι

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{A}}_a &= \tilde{L}_{ab} \tilde{\mathbf{A}}_b \tilde{L}_{ba} \\ \tilde{\mathbf{A}}_b &= \tilde{L}_{ba} \tilde{\mathbf{A}}_a \tilde{L}_{ab} \end{aligned} \quad \text{A.4.5}$$

## 5 Διανύσματα και Quaternions

Οι σχέσεις περιστροφής διανύσματος εκφράζονται σε πολύ συνεπτυγμένη μορφή δια μέσου των quaternions, τα οποία εισήχθησαν από τον Hamilton, και που θα ορίσουμε παρακάτω. Τα quaternions έχουν την μορφή

$$x_o + x_1 i + x_2 j + x_3 k \quad \text{A.5.1}$$

όπου

$$\begin{aligned} i^2 = j^2 = k^2 = i j k = -1 \\ i j = k, \quad j k = i, \quad k i = j = -i k \end{aligned} \quad \text{A.5.2}$$

Τα quaternions ακολουθούν τους αλγεβρικούς κανόνες με την μόνη εξαίρεση ότι ο πολλαπλασιασμός δεν είναι αντιμεταθετικός (commulative). Ο πολλαπλασιασμός για τα quaternions ορίζεται με την χρήση του προσηταιριστικού κανόνα (associative law) ως εξής

$$\begin{aligned} r &= (p_o + p_1 i + p_2 j + p_3 k) \times (q_o + q_1 i + q_2 j + q_3 k) = \\ &= p_o q_o + p_o q_1 i + p_o q_2 j + p_o q_3 k + p_1 q_o + p_1 q_1 i^2 + p_1 q_2 i j + \dots \end{aligned} \quad \text{A.5.3}$$

ή σε συνεπτυγμένη μορφή μητρώου ως

$$\begin{bmatrix} r_o \\ r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_o & -p_1 & -p_2 & -p_3 \\ p_1 & p_o & -p_3 & p_2 \\ p_2 & p_3 & p_o & -p_1 \\ p_3 & -p_2 & p_1 & p_o \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_o \\ q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix} \quad \text{A.5.4}$$

Εναλλακτικά τα quaternions γράφονται σε “διανυσματική” μορφή  $q_o + \vec{\mathbf{q}}$  και  $i, j, k$  είναι τα μοναδιαία διανύσματα κατά μήκος των συνιστωσών  $q_1, q_2,$  και  $q_3$ . Δηλαδή

$$\vec{\mathbf{q}} = \begin{bmatrix} q_o \\ \vec{q}^r \end{bmatrix} \quad \text{A.5.5}$$

οπότε ο πολλαπλασιασμός των quaternions,  $*$ , ορίζεται ως

$$\vec{\mathbf{p}} * \vec{\mathbf{q}} = \begin{bmatrix} p_o q_o - \vec{p} \cdot \vec{q} \\ p_o \vec{q} - q_o \vec{p} + \vec{p} \times \vec{q} \end{bmatrix} \quad \text{A.5.6}$$

### Ιδιότητες των quaternions

1. Μη αντιμεταθετικότητα  $\vec{\mathbf{p}} * \vec{\mathbf{q}} \neq \vec{\mathbf{q}} * \vec{\mathbf{p}}$

$$\vec{\mathbf{p}} * \vec{\mathbf{q}} - \vec{\mathbf{q}} * \vec{\mathbf{p}} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vec{p} \times \vec{q} - \vec{q} \times \vec{p} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2(\vec{p} \times \vec{q}) \end{bmatrix} \quad \text{A.5.7}$$

2. Quaternion norm

$$\begin{aligned} \text{norm}(\vec{\mathbf{q}}) &= \sum_{i=0}^{i=3} q_i^2 \\ \text{norm}(\vec{\mathbf{p}} * \vec{\mathbf{q}}) &= \text{norm}(\vec{\mathbf{p}}) \times \text{norm}(\vec{\mathbf{q}}) \end{aligned} \quad \text{A.5.8}$$

3. Προσαυτεριστική ιδιότητα πολλαπλασιασμού

$$(\vec{\mathbf{p}} * \vec{\mathbf{q}}) * \vec{\mathbf{r}} - \vec{\mathbf{p}} * (\vec{\mathbf{q}} * \vec{\mathbf{r}}) \quad \text{A.5.9}$$

4. Αντίστροφο quaternion

$$\vec{\mathbf{q}}^{-1} = \begin{bmatrix} q_o \\ \vec{q}^r \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{\text{norm}(\vec{\mathbf{q}})} \begin{bmatrix} q_o \\ -\vec{q}^r \end{bmatrix} \quad \text{A.5.10}$$

5. Αντίστροφο γινομένου

$$(\vec{\mathbf{p}} * \vec{\mathbf{q}})^{-1} = \frac{1}{\text{norm}(\vec{\mathbf{q}})} \begin{bmatrix} q_o \\ -\vec{q}^r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_o \\ -\vec{p}^r \end{bmatrix} \frac{1}{\text{norm}(\vec{\mathbf{p}})} = \vec{\mathbf{q}}^{-1} * \vec{\mathbf{p}}^{-1} \quad \text{A.5.11}$$

### Περιστροφή διανύσματος με quaternions

Ένα διάνυσμα μπορεί να περιστραφεί με την βοήθεια των quaternions όταν η βαθμωτή ποσότητα του quaternion,  $q_o$ , ορίζει την γωνία περιστροφής ενώ το

διάνυσμα  $\vec{q}'$  ορίζει τον άξονα περιστροφής. Το quaternion περιστροφής κατά γωνία  $\delta$  είναι

$$\vec{q} = \begin{bmatrix} \cos \delta \\ \sin \delta \cos \alpha \\ \sin \delta \cos \beta \\ \sin \delta \cos \gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \delta \\ \sin \delta \vec{n}' \end{bmatrix} \quad \text{A.5.12}$$

όπου  $\alpha$ ,  $\beta$ , και  $\gamma$  είναι οι γωνίες του άξονα περιστροφής και  $\vec{n}$  είναι το μοναδιαίο διάνυσμα κατά μήκος του άξονα περιστροφής quaternions και

$$\text{norm}(\vec{q}) = \cos^2 \delta + \sin^2 \delta (\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma) = 1 \quad \text{A.5.13}$$

Τα συνήθη διανύσματα γράφονται σαν quaternions με μηδενικό βαθμωτό μέρος

$$\vec{u} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vec{u}' \end{bmatrix} \quad \text{A.5.14}$$

Οπότε το αποτέλεσμα περιστροφής είναι και πάλι quaternion με μηδενικό βαθμωτό μέρος. Ο μετασχηματισμός περιστροφής πρέπει να είναι επι πλέον και αντιστρεπτός, και το περιστραμένο διάνυσμα βρίσκεται με την χρήση μητρώων ως ακολούθως

$$\vec{u}^b = \left[ 2\vec{q}^a (\vec{q}^a)^T + (q_o^2 - \vec{q}^a (\vec{q}^a)^T (\vec{q}^a)) I - 2q_o \tilde{q}^a \right] \vec{u}^a \quad \text{A.5.15}$$

όπου

$$\tilde{q}^a = \begin{bmatrix} 0 & -q_3 & q_2 \\ q_3 & 0 & -q_1 \\ -q_2 & q_1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{A.5.16}$$

$$\vec{u}^b = C_{b/a} \vec{u}^a$$

$$C_{b/a} = \begin{bmatrix} q_o^2 + q_1^2 - q_2^2 - q_3^2 & 2(q_1 q_2 + q_o q_3) & 2(q_1 q_2 + q_o q_2) \\ 2(q_1 q_2 + q_o q_3) & q_o^2 - q_1^2 + q_2^2 - q_3^2 & 2(q_2 q_3 + q_o q_1) \\ 2(q_1 q_3 + q_o q_2) & 2(q_2 q_3 + q_o q_1) & q_o^2 - q_1^2 - q_2^2 + q_3^2 \end{bmatrix} \quad \text{A.5.17}$$

### Quaternions περιστροφής αξόνων

Το quaternion που περιστρέφει το σύστημα αναφοράς a στο σύστημα αναφοράς b κατά γωνία  $\mu$  συμβολίζεται ως  $\vec{q}_{b/a}$  και δίνεται από την σχέση



$$\bar{\mathbf{q}}_{b/a} = \begin{bmatrix} \cos(\mu/2) \\ \sin(\mu/2)\bar{\mathbf{n}}^r \end{bmatrix} \quad \text{A.5.18}$$

Οπότε ο μετασχηματισμός περιστροφής συστήματος με την βοήθεια quaternions είναι

$$\bar{\mathbf{u}}^b = \bar{\mathbf{q}}_{b/a}^{-1} * \bar{\mathbf{u}}^a * \bar{\mathbf{q}}_{b/a} \quad \text{A.5.19}$$

### Quaternions των γωνιών Euler

Οι διαδοχικές περιστροφές yaw, pitch, roll που εκτελούμε με τις γωνίες Euler,  $\psi$ ,  $\theta$ ,  $\phi$  γράφονται με την βοήθεια των quaternions στην παρακάτω συνεπτυγμένη μορφή

$$\bar{\mathbf{u}}^b = q_{roll}^{-1} q_{pitch}^{-1} q_{yaw}^{-1} \bar{\mathbf{u}}^r q_{yaw} q_{pitch} q_{roll} \quad \text{A.5.20}$$

όπου

$$q_{yaw} = \begin{bmatrix} \cos(\psi/2) \\ 0 \\ 0 \\ \sin(\psi/2) \end{bmatrix}, \quad q_{pitch} = \begin{bmatrix} \cos(\theta/2) \\ 0 \\ \sin(\theta/2) \\ 0 \end{bmatrix}, \quad q_{roll} = \begin{bmatrix} \cos(\phi/2) \\ \sin(\phi/2) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{A.5.21}$$

Οι συνιστώσες του quaternion περιστροφής είναι

$$\begin{aligned} q_0 &= \pm [\cos(\phi/2) \cos(\theta/2) \cos(\psi/2) + \sin(\phi/2) \sin(\theta/2) \sin(\psi/2)] \\ q_1 &= \pm [\sin(\phi/2) \cos(\theta/2) \cos(\psi/2) - \cos(\phi/2) \sin(\theta/2) \sin(\psi/2)] \\ q_2 &= \pm [\cos(\phi/2) \cos(\theta/2) \sin(\psi/2) + \sin(\phi/2) \cos(\theta/2) \cos(\psi/2)] \\ q_3 &= \pm [\cos(\phi/2) \cos(\theta/2) \sin(\psi/2) - \sin(\phi/2) \sin(\theta/2) \cos(\psi/2)] \end{aligned} \quad \text{A.5.22}$$