

## 5. Ανάλυση διακριτής μορφής ΔΜΠ με ΠΔ

Η διακριτή μορφή διαφορικών μερικών παραγώγων (ΔΜΠ) επιτυγχάνεται με την εφαρμογή πεπερασμένων διαφορών (ΠΔ) ή άλλων μεθόδων διακριτοποίησης όπως πεπερασμένοι όγκοι (ΠΟ), ή πεπερασμένα στοιχεία (ΠΣ). Οι ΔΜΠ που περιγράφουν φυσικά προβλήματα συνήθως περιέχουν χρονικές κι χωρικές παραγώγους. Η διακριτοποίηση στον χώρο μπορεί να γίνει με οποιοδήποτε μέθοδο ανάλογα με τις απαιτήσεις του προβλήματος. Η διακριτοποίηση της χρονικής παραγώγου, που είναι συνήθως γραμμικός όρος, πραγματοποιείται σχεδόν πάντα με ΠΔ. Η χρονική διακριτοποίηση αναφέρεται συχνά και σαν ολοκλήρωση στον χρόνο η προώθηση στον χρόνο (time advancement) και βασίζεται σε ρητά ή πλεγμένα σχήματα ΠΔ που θα εξετάσουμε σε επόμενο κεφάλαιο. Η διακριτή μορφή ΔΜΠ αναφέρεται και σαν αριθμητικό σχήμα διότι στην γενική περίπτωση αποτελεί συνδυασμό μεθόδων διακριτοποίησης. Το αριθμητικό σχήμα πρέπει να είναι συνεπές και ευσταθές ώστε να μπορεί να συγκλίνει στην αληθή λύση με την μείωση του χρονικού βήματος και του μήκους διαμερισμού σύμφωνα με το θεώρημα ισοδυναμίας του Lax (Lax equivalence theorem). Συνεπώς, πριν την χρησιμοποίηση κάποιου αριθμητικού σχήματος για την αριθμητική επίλυση ενός πρακτικού προβλήματος πρέπει να προηγηθεί η ανάλυση του που θα πιστοποιεί την ευστάθεια και την συνέπεια του.

Η ανάλυση του αριθμητικού σχήματος μπορεί ακόμα να δώσει εκτιμήσεις της τάξης ακρίβειας. Η ανάλυση αριθμητικών σχημάτων γίνεται πιο εύκολα όταν η μέθοδος διακριτοποίησης είναι οι ΠΔ. Η ανάλυση της διακριτής μορφής ΔΜΠ και η εκτίμηση σφαλμάτων (error estimates) μπορεί να γίνει με μαθηματική αυστηρότητα και ακρίβεια για διακριτοποιήσεις ΠΣ αλλά η ανάλυση αριθμητικών μεθόδων ΠΣ είναι πιο περίπλοκη. Στο κεφάλαιο αυτό θα παρουσιάσουμε στοιχεία ανάλυσης αριθμητικών σχημάτων ΠΔ και θα αποσαφηνίσουμε τις έννοιες της συνέπειας και ευστάθειας.

### 5.1 Σφάλμα αποκοπής αριθμητικού σχήματος

Ο ρόλος του σφάλματος αποκοπής για την αναπαράσταση παραγώγου με ΠΔ σχολιάστηκε στο προηγούμενο κεφάλαιο. Το σφάλμα αποκοπής αριθμητικού σχήματος ΠΔ εκτιμάται με ανάλογο τρόπο. Θεωρούμε ένα ρητό σχήμα για την μονοδιάστατη εξίσωση μεταφοράς θερμότητας  $u_t = \kappa u_{xx}$  σαν παράδειγμα διακριτοποίησης με ΠΔ. Χρησιμοποιώντας την προς εμπρός ή κατάντη ΠΔ για την

διακριτοποίηση της χρονικής παράγωγου και κεντρικές ΠΔ στον χώρο έχουμε

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} = \frac{\kappa}{(\Delta x)^2} (u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n) \quad (5.1)$$

Είναι φανερό ότι η διακριτή μορφή είναι προσεγγιστική αναπαράσταση της ΔΜΠ και ο σημαντικός όρος διαφοράς είναι το σφάλμα αποκοπής (ΣΑ), που εκφράζεται από το κατώτερης τάξης σφάλμα. Το ΣΑ για το αριθμητικό σχήμα της Εξ. (5.1) δίνεται από

$$(\Sigma A) = -\left(\frac{\Delta t}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right)_j^n + \kappa \frac{(\Delta x)^2}{12} \left(\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}\right)_j^n + \dots \quad (5.2)$$

Δηλαδή η τάξη του σχήματος διακριτοποίησης (5.1) είναι  $\Sigma A = \Delta \text{ΜΠ} - \text{Π}\Delta(\Delta \text{ΜΠ}) = O(\Delta t) + O(\Delta x^2) = O(\Delta t, \Delta x^2)$  και περιέχει μόνο τους κατώτερης τάξης όρους αποκοπής των αναπτυγμάτων Taylor.

Στο σφάλμα αποκοπής προστίθεται και το σφάλμα στρογγυλοποίησης (round-off error). Το σφάλμα στρογγυλοποίησης γίνεται αισθητό όταν το χρονικό βήμα ( $\Delta t$ ) και το μήκος διαμερισμού είναι πολύ μικρά. Στην πλέον γενική περίπτωση αριθμητικής επίλυσης μη γραμμικών προβλημάτων με περίπλοκες οριακές συνθήκες στο σφάλμα στρογγυλοποίησης προστίθενται και σφάλματα από την γραμμικοποίηση, την επαναληπτική μέθοδο που τυχόν χρησιμοποιείται για επίλυση συστημάτων και από την εφαρμογή αριθμητικών οριακών συνθηκών, που θα μας απασχολήσει σε επόμενο κεφάλαιο. Όλα τα παραπάνω σφάλματα αναφέρονται σαν σφάλμα διακριτοποίησης,

## 5.2 Συνέπεια αριθμητικού σχήματος

Η έννοια της συνέπειας αναφέρθηκε σε προηγούμενο κεφάλαιο. Ένα αριθμητικό σχήμα είναι συνεπές όταν η διαφορά της αριθμητικής λύσης από την πραγματική τείνει προς το μηδέν όταν το χρονικό βήμα και το μήκος διαμερισμού τείνουν στο μηδέν, δηλαδή όταν το σφάλμα αποκοπής τείνει στο μηδέν

$$\lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta t \rightarrow 0}} \{\Delta \text{ΜΠ} - \text{Π}\Delta(\Delta \text{ΜΠ})\} = \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta t \rightarrow 0}} (\Sigma A) = 0 \quad (5.3)$$

Όλα τα σχήματα διακριτοποίησης δεν είναι συνεπή για παράδειγμα το αριθμητικό σχήμα

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^{n-1}}{2\Delta t} = \frac{\kappa}{(\Delta x)^2} (u_{j+1}^{n+1} - u_j^{n+1} - u_j^{n-1} + u_{j-1}^{n-1}) \quad (5.4)$$

δεν είναι συνεπές διότι έχει σφάλμα αποκοπής.

$$(\Sigma A) = \frac{\kappa}{12} \left( \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} \right)_j (\Delta x)^2 - \kappa \left( \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right)_j \left( \frac{\Delta t}{\Delta x} \right)^2 - \frac{1}{6} \left( \frac{\partial^3 u}{\partial t^3} \right)_j (\Delta t)^2 \quad (5.5)$$

Το  $\Sigma A$  που δίνεται από τη παραπάνω σχέση δεν τείνει στο μηδέν αλλά σε μια τιμή  $\Delta t / \Delta x = \beta$ . Δηλαδή, το σχήμα ΠΔ της Εξ. (5.4) λύνει στην πραγματικότητα την  $u_t + \kappa\beta^2 u_{tt} = \kappa u_{xx}$  και όχι την  $u_t = \kappa u_{xx}$ .

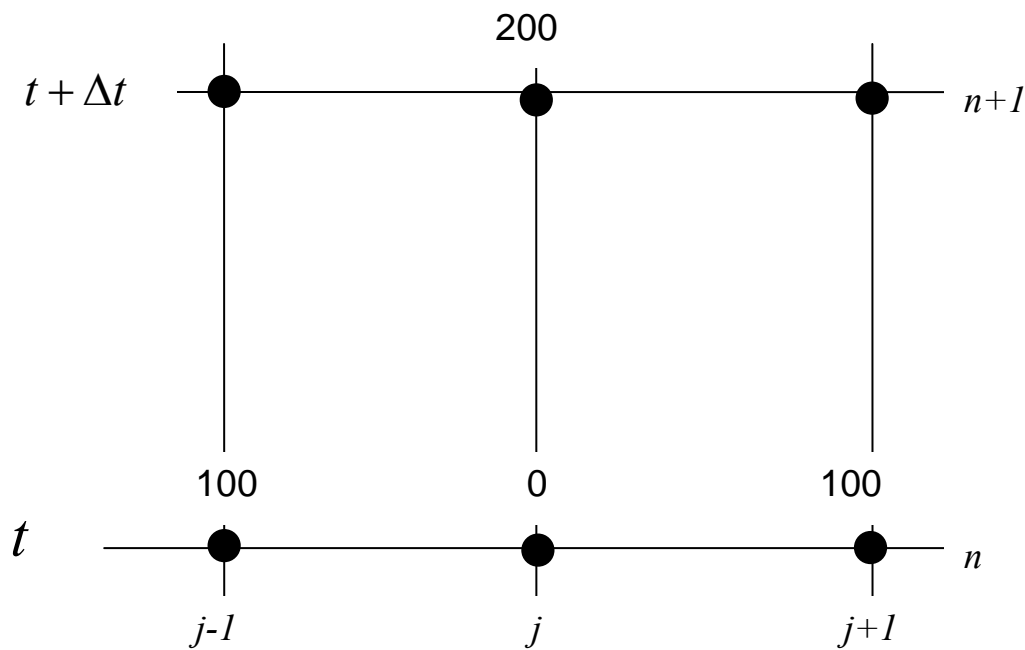
### 5.3 Ευστάθεια αριθμητικού σχήματος

Η συνεπής προσέγγιση ενός σχήματος ΠΔ, όπως είναι το ρητό σχήμα της Εξ. (5.1), δεν συγκλίνει κατ' ανάγκη στην πραγματική λύση της ΔΜΠ. Η αναγκαία συνθήκη για σύγκλιση είναι ευστάθεια που θα εξετάσουμε παρακάτω. Το πρόβλημα ευστάθειας αριθμητικών σχημάτων είναι παρόμοια με το πρόβλημα ευστάθειας συστημάτων ελέγχου.

Σε σχήματα ΠΔ, για παράδειγμα Εξ. (5.4) ο τελεστής ΠΔ μπορεί να θεωρηθεί ότι παίζει τον ρόλο της συνάρτησης μεταφοράς (transfer function) ενός συστήματος ελέγχου και όταν εφαρμόζεται. Βρίσκουμε την τιμή των αγνώστων στο χρονικό βήμα  $n + 1$  χρησιμοποιώντας πληροφορία στο χρονικό βήμα  $n$ , δηλαδή

$$\begin{aligned} u_j^{n+1} &= u_j^n + \left( \kappa \frac{2\Delta t}{(\Delta x)^2} \right) (u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n) \\ &= u_j^n + r (u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n) \\ &= L(u_{j-1}^n, u_j^n, u_{j+1}^n) \end{aligned} \quad (5.6)$$

Η διαδικασία αριθμητικής επίλυσης αναπαρίσταται στο Σχ. 5.1. Για την τιμή  $r=1$  η θερμοκρασία στο χρονικό βήμα  $n+1$  είναι  $u_j^{n+1} = 200$  και δεν φαίνεται φυσικά αποδεκτή.



Σχ. 5.1 Σχηματική αναπαράσταση ευστάθειας τελεστή ΠΔ.

Το βασικό ερώτημα που καλείται να απαντήσει η θεωρία ευστάθειας, την οποία θα παρουσιάσουμε αμέσως παρακάτω, είναι αν τα σφάλματα και ειδικά το σφάλμα στρογγυλοποίησης μεγαλώνει καθ' όσον αυξάνεται ο αριθμός των βημάτων. Όταν το σφάλμα μεγαλώνει η μέθοδος είναι ασταθής και σε μεγάλο αλλά πεπερασμένο αριθμό βημάτων η αριθμητική λύση θα αποκλίνει. Η πλέον συνήθης μέθοδος μελέτης ευστάθειας αριθμητικών σχημάτων είναι η μέθοδος του von Neumann

#### 5.4 Μέθοδος του von Neumann για την ανάλυση ευστάθειας

Η μέθοδος von Neumann η γνωστή και σαν μέθοδος ευστάθειας Fourier μπορεί να εφαρμοσθεί για την μελέτη ευστάθειας προβλημάτων με περιοδικές οριακές συνθήκες. Η μέθοδος von Neumann παρουσιάζεται για ΠΔ μπορεί όμως να εφαρμοσθεί και σε άλλες μεθόδους διακριτοποίησης όπως ΠΣ.

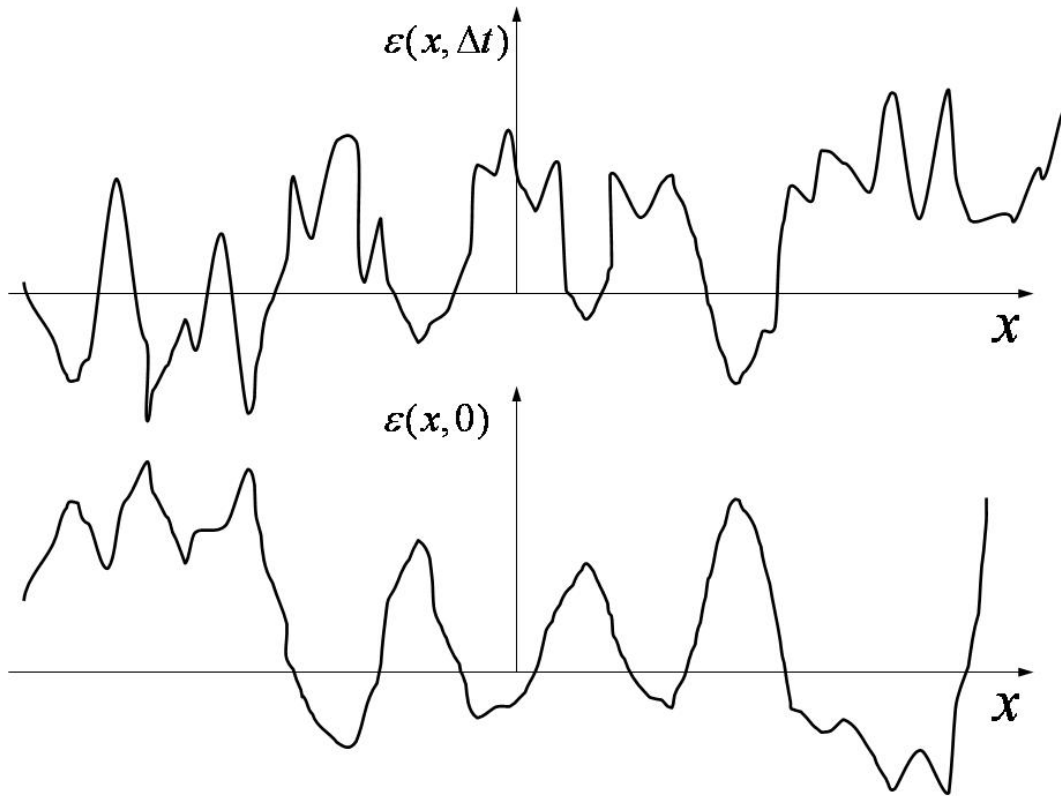
Θεωρούμε την ΔΜΠ  $u_t = \kappa u_{xx}$  και συμβολίζουμε με  $u^*$  την πραγματική λύση. Υποθέτουμε ότι η μέθοδος διακριτοποίησης είναι συνεπής οπότε στο όριο πολύ μικρού  $\Delta t$  και  $\Delta x$  το αριθμητικό σφάλμα  $E = u^* + \varepsilon$ , όπου  $\varepsilon$  είναι το σφάλμα στρογγυλοποίησης. Το σφάλμα ικανοποιεί την εξίσωση του αριθμητικού σχήματος π.χ. Εξ. (5.1) γράφεται ως.

$$\frac{(u_j^* + \varepsilon_j)^{n+1} - (u_j^* + \varepsilon_j)^n}{\Delta t} = \frac{K}{(\Delta x)^2} [u_{j+1}^{*n} - 2u_j^{*n} + u_{j-1}^{*n} + \varepsilon_{j+1}^n - 2\varepsilon_j^n + \varepsilon_{j-1}^n] \quad (5.7)$$

Η ακριβής λύση ικανοποιεί το αριθμητικό σχήμα όταν  $\Delta x \rightarrow 0$ ,  $\Delta t \rightarrow 0$  διότι η μέθοδος της Εξ. (5.7) είναι συνεπής. Τότε και το σφάλμα αποκοπής πρέπει να ικανοποιεί το αριθμητικό σχήμα. Δηλαδή

$$\frac{\varepsilon_j^{n+1} - \varepsilon_j^n}{\Delta t} = \kappa \left( \frac{\varepsilon_{j+1}^n - 2\varepsilon_j^n + \varepsilon_{j-1}^n}{\Delta x} \right) \quad (5.8)$$

Η κατανομή του σφάλματος  $\varepsilon$  στο χρονικό βήμα  $t_n = n\Delta t$  αναπαρίσταται σχηματικά στο Σχ. 5.2



Σχήμα 5.2 Κατανομή του σφάλματος  $\varepsilon(x, t)$

Η κατανομή του σφάλματος  $\varepsilon(x, t)$  μπορεί να γραφεί σε μορφή σειράς Fourier

$$\varepsilon(x, t) = \sum_{m=0}^M b_m(t) e^{ik_m x} \quad (5.9)$$

όπου υποτίθεται ότι η περίοδος της βασικής συχνότητας  $m = 1$  είναι  $T_1 = 2L$  οπότε ο κυματαριθμός  $k_m$  είναι

$$k_m = \frac{2\pi m}{2L} \quad m = 0, 1, \dots, M \quad (5.10)$$

όπου  $M$  είναι ο αριθμός διαστημάτων μήκους  $\Delta x$  που περιέχονται στο μήκος  $L$ . Δηλαδή όταν το μήκος  $2L$  χωρίζεται σε τέσσερα διαστήματα με  $m = 4 + 1$  σημεία  $M = 2$  και οι συχνότητες που περιέχονται στην σειρά Fourier είναι  $f_m = k_m/2\pi = m/2L$  (για  $m = 0, f_0 = 0$ , για  $m = 1, f_1 = 1/2L$ , και για  $m = 2, f_2 = 1/L$ ) όπου  $m = 0$  αντιστοιχεί στην μέση τιμή και οι άλλες συχνότητες εκφράζουν τον αριθμό μηκών κύματος στο διάστημα  $2L$ . Η μεγαλύτερη συχνότητα  $m = M$  έχει κυματαριθμό  $k_m = \pi/\Delta x$  και αντιστοιχεί στον αριθμό σημείων (που στο παράδειγμα για  $M = 2$  είναι 3) με τον οποίο αναπαρίσταται μια αρμονική συνάρτηση ( $\sin$  ή  $\cos$  στο διάστημα  $[0, 2\pi]$ ).

Η αρχική εξίσωση που διακριτοποιήσαμε  $u_t = \kappa u_{xx}$  είναι γραμμική συνεπώς ισχύει η αρχή της επαλληλίας και αρκεί να εξετάσουμε μόνο την συμπεριφορά ενός μόνο όρου της σειράς στην Εξ. (5.9), δηλαδή του όπου  $\varepsilon_m(x, t) = b_m(t) e^{ik_m x}$ . Ο όρος αυτός είναι της μορφής  $z^n e^{ik_m x} = (e^{\alpha \Delta t})^n e^{ik_m x}$  και γίνεται  $e^{ik_m x}$  όταν  $t = 0 (n = 0)$ , δηλαδή

$$\varepsilon_m(x, t) = e^{\alpha t} e^{ik_m x} \quad (5.11)$$

Με αντικατάσταση της παραπάνω έκφρασης για το σφάλμα στην διακριτή εξίσωση, Εξ. (5.8) βρίσκουμε ότι το σφάλμα ικανοποιεί την σχέση

$$e^{\alpha(t+\Delta t)} e^{ik_m x} - e^{\alpha t} e^{ik_m x} = \frac{\alpha \Delta t}{(\Delta x)^2} \left[ e^{\alpha t} e^{ik_m(x+\Delta x)} - 2e^{\alpha t} e^{ik_m x} + e^{\alpha t} e^{ik_m(x-\Delta x)} \right] \quad (5.12)$$

χρησιμοποιώντας την τριγωνομετρική ταυτότητα  $\cos \beta = (e^{i\beta} + e^{-i\beta})/2$  η παραπάνω σχέση γράφεται ως

$$e^{\alpha \Delta t} = 1 + 2r(\cos \beta - 1)$$

και

$$r = \frac{\kappa \Delta t}{(\Delta x)^2}, \quad \beta = k_m \Delta x$$

ή με την χρήση της ταυτότητας  $\sin^2 \beta/2 = (1 - \cos \beta)/2$

$$e^{\alpha \Delta t} = 1 - 4r \sin^2 \beta/2 \quad (5.13)$$

Επειδή όμως  $\varepsilon_j^{n+1} = e_j^n e^{\alpha \Delta t}$  για κάθε χωρική συχνότητα που υπάρχει στο σφάλμα, ο παράγοντας  $|e^{\alpha \Delta t}|$  πρέπει να είναι μικρότερος της μονάδας για να έχουμε φραγμένη λύση.

Δηλαδή η αριθμητική λύση είναι ευσταθής όταν

$$\frac{\varepsilon_j^{n+1}}{\varepsilon_j^n} = \left| 1 - 4r \sin^2 \frac{\beta}{2} \right| \leq 1 \quad (5.14)$$

Ο λόγος  $\varepsilon_j^{n+1} / \varepsilon_j^n = G$  ονομάζεται παράγοντας ενίσχυσης (amplification factor) και αποτελεί μέτρο της συμπεριφοράς του σφάλματος κατά την διάρκεια της χρονικής ολοκλήρωσης. Ο παράγοντας ενίσχυσης στην Εξ. (5.11) είναι μικρότερος της μονάδας όταν  $r \leq 1/2$  δηλαδή όταν  $\Delta t \leq \Delta x^2 / 2\kappa$

Η μέθοδος διακριτοποίησης με την Εξ. (5.7) ή (5.8) ονομάζεται ρητή διότι η λύση στο βήμα  $n + 1$  εξαρτάται μόνο από την λύση στο βήμα  $n$ . Τα ρητά σχήματα διακριτοποίησης έχουν περιορισμούς ευστάθειας. Αντίθετα άμα χρησιμοποιήσουμε το παρακάτω πεπλεγμένο σχήμα για την λύση της εξίσωσης  $u_t = \kappa u_{xx}$ .

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} = \frac{\kappa}{(\Delta x)^2} (u_{j+1}^{n+1} - 2u_j^{n+1} + u_{j-1}^{n+1}) \quad (15)$$

και μελετήσουμε την ευστάθεια του ακολουθώντας την ίδια διαδικασία όπως πριν βρίσκουμε ότι ο παράγοντας ενίσχυσης είναι

$$G = \frac{1}{1 + 4r \sin^2 \beta/2}$$

και η συνθήκη ευστάθειας ικανοποιείται για όλες τις τιμές του λόγου  $r$ .

Η ανάλυση ευστάθειας Fourier εφαρμόζεται με τον ίδιο τρόπο και στις εξισώσεις υπερβολικού τύπου που επίσης εμπλέκουν παραγώγους ως προς τον χρόνο. Θεωρούμε το πιο απλό παράδειγμα υπερβολικής εξίσωσης της πρώτης τάξης εξίσωσης κύματος σε μια διάσταση.

$$u_t + c u_x = 0 \quad (1.16)$$

όπου  $c$  είναι η σταθερή ταχύτητα διάδοσης κύματος. Η παραπάνω εξίσωση έχει μόνο μια χαρακτηριστική που είναι  $x_t = c$  και η λύση της είναι

$$u(x - ct) = \sigma\alpha\theta. \quad (17)$$

υποθέτουμε ότι χρησιμοποιούμε το παρακάτω πρώτης τάξης αριθμητικό σχήμα.

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + c \frac{u_j^n - u_{j-1}^n}{\Delta x} + O(\Delta x, \Delta t) = 0 \quad (18)$$

αντικαθιστούμε και πάλι  $\varepsilon_m(x, t) = e^{\alpha t} e^{ik_m x}$  και βρίσκουμε

$$e^{\alpha(t+\Delta t)} e^{ik_m x} - e^{\alpha t} e^{ik_m x} + \left( c \frac{\Delta t}{\Delta x} \right) \left[ e^{\alpha t} \left( e^{ik_m x} - e^{ik_m(x-\Delta x)} \right) \right] = 0$$

$$e^{\alpha \Delta t} - 1 + \nu \left( e^{ik_m \Delta x} - e^{-ik_m \Delta x} \right) = 0 \quad (19)$$

όπου  $\nu = c \Delta t / \Delta x$  και παράγοντας ενίσχυσης  $\varepsilon^{n+1} / \varepsilon^n = G$  είναι

$$G = (1 - \nu + \nu \cos \beta) - i(\nu \sin \beta)$$

$$|G| = \left( [1 - \nu + \nu \cos \beta]^2 + [\nu \sin \beta]^2 \right)^{1/2} \quad (20)$$

Δηλαδή η συνθήκη ευστάθειας  $|G| \leq 1$  ικανοποιείται μόνον όταν  $\nu \leq 1$ . Η συνθήκη  $\nu \leq 1$  αποτελεί την συνθήκη CFL του αριθμητικού σχήματος

## 5.5 Τροποποιημένη Εξίσωση Σχημάτων ΠΔ

Με αντικατάσταση των όρων  $u_j^{n+1}$  και  $u_{j-1}^n$  στο ρητό αριθμητικό σχήμα της Εξ. (18) από τα αναπτύγματα Taylor βρίσκουμε την παρκάρω σχέση.

$$\frac{1}{\Delta t} \left\{ \left[ u_j^n + (\Delta t)u_t + \frac{(\Delta t)^2}{2!} u_{tt} + \frac{(\Delta t)^3}{3!} u_{ttt} + \dots \right] - u_j^n \right\}$$

$$\frac{c}{\Delta x} \left\{ u_j^n - \left[ u_j^n - (\Delta x)u_x + \frac{(\Delta x)^2}{2!} u_{xx} + \frac{(\Delta x)^3}{3!} u_{xxx} + \dots \right] \right\} = 0$$

ή



$$u_t + cu_x = -\frac{(\Delta t)}{2}u_{tt} + c\frac{(\Delta x)}{2}u_{xx} - \frac{(\Delta t)^2}{6}u_{ttt} - c\frac{(\Delta x)^2}{6}u_{xxx} + \dots \quad (21)$$

Το αριστερό μέλος της παραπάνω σχέσης είναι η κυματική εξίσωση και το δεξί μέλος είναι οι όροι του σφάλματος αποκοπής του ρητού σχήματος της Εξ. (18). Επειδή οι χαμηλότερης τάξης όροι στη Εξ. (21) είναι  $(\Delta t)(u_{tt}/2) + (\Delta x)(cu_{xx}/2)$  το σχήμα είναι πρώτης τάξης ακρίβειας, δηλαδή  $O((\Delta t), (\Delta x))$ . Η χρονική παράγωγος της Εξ.(21) είναι

$$u_{tt} + cu_{xt} = -\frac{\Delta t}{2}u_{ttt} + \frac{c\Delta x}{2}u_{txx} - \frac{(\Delta t)^2}{6}u_{ttt} - \frac{c(\Delta x)^2}{6}u_{xxx} + \dots$$

Η χωρική παράγωγος της Εξ. (21) πολλαπλασιασμένη με  $c$  είναι

$$-cu_{tx} - c^2u_{xt} = \frac{c\Delta t}{2}u_{ttx} - \frac{c^2\Delta x}{2}u_{xxx} + \frac{c(\Delta t)^2}{6}u_{tttx} + \frac{c^2(\Delta x)^2}{6}u_{xxx} + \dots$$

από τις παραπάνω δύο σχέσεις βρίσκουμε

$$u_{tt} = c^2u_{xx} + \Delta t\left(-\frac{u_{ttt}}{2} + \frac{c}{2}u_{ttx} + 0(\Delta t)\right) + \Delta x\left(\frac{c}{2}u_{xxt} - \frac{c^2}{2}u_{xxx} + 0(\Delta x)\right) \quad (22)$$

ή

$$u_{tt} = c^2u_{xx} + 0(\Delta t, \Delta x) \quad (23)$$

Συνεπώς ο όρος  $u_{tt}$  στην Εξ. (21) μπορεί να αντικατασταθεί από την δεύτερη χωρική παράγωγο. Παρόμοια από την Εξ. (21) απαλείφουμε τους  $u_{ttt}, u_{ttx}, u_{xxt}$ . Η απαλοιφή των όρων αυτών δεν πρέπει να πραγματοποιηθεί υπολογίζοντας κατάλληλες παραγώγους της Εξ. (21) και όχι της αρχικής εξίσωσης κύματος.

Με κατάλληλες παραγωγίσεις και απαλοιφές της Εξ. (21) βρίσκουμε

$$u_{ttt} = -c^3u_{xxx} + 0(\Delta t, \Delta x)$$

$$u_{ttx} = c^2u_{xxx} + 0(\Delta t, \Delta x) \quad (24)$$

$$u_{xxt} = -cu_{xxx} + 0(\Delta t, \Delta x)$$

τελικά η Εξ. (21) με τις Εξ. (23) – (24) γίνεται

$$u_t + cu_x = \frac{c\Delta x}{2}(1-\nu)u_{xx} - \frac{c(\Delta x)^2}{6}(2\nu^2 - 3\nu + 1)u_{xxx} \quad (25)$$

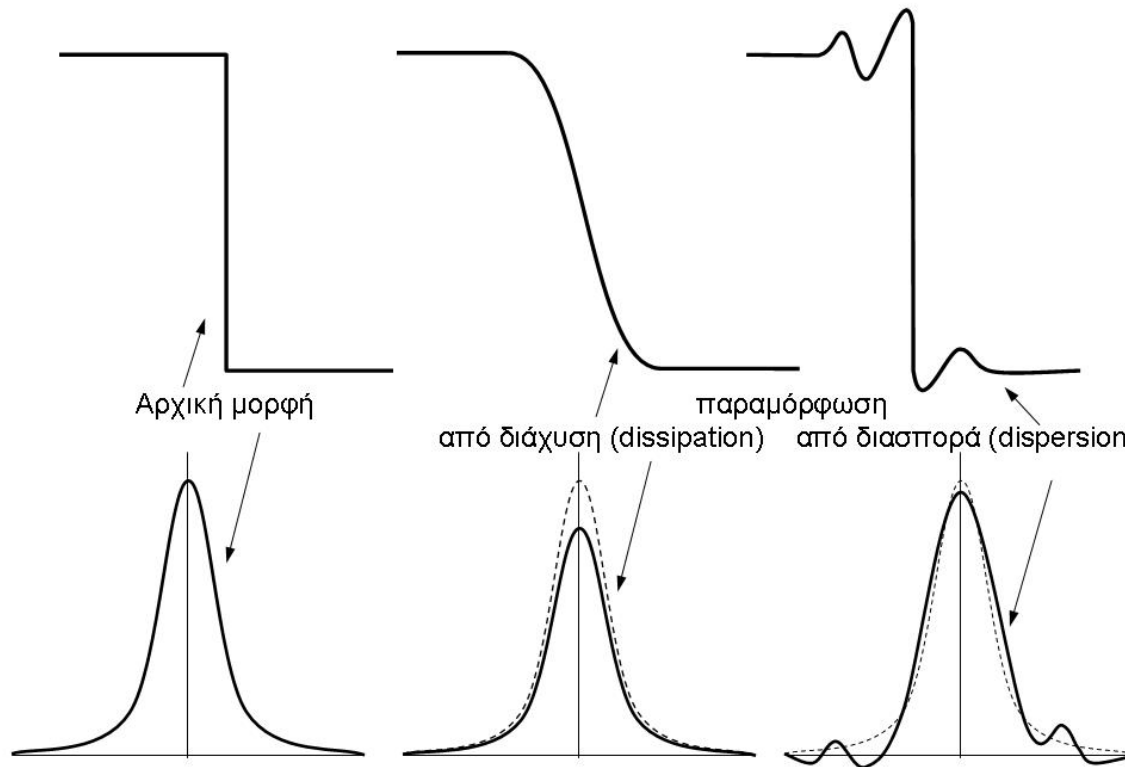
$$+ 0\left[(\Delta x)^3, (\Delta x)^2 \Delta t, \Delta x(\Delta t)^2, (\Delta t)^3\right]$$

Η παραπάνω σχέση ονομάζεται τροποποιημένη εξίσωση για το αριθμητικό σχήμα πρώτης τάξης που θεωρήσαμε για την αριθμητική επίλυση της εξίσωσης κύματος  $u_t + cu_x = 0$ .

Το δεξί μέλος της τροποποιημένης εξίσωσης είναι το σφάλμα αποκοπής διότι αντιπροσωπεύει την διαφορά της αρχικής διαφορικής μερικών παραγώγων (ΔΜΠ) και της αναπαράστασης πεπερασμένων διαφορών που χρησιμοποιείται για την αριθμητική της επίλυση. Ο χαμηλότερης τάξης όρος στην τροποποιημένη εξίσωση είναι ο όρος  $u_{xx}$ , που είναι ένα όρος διάχυσης. Δηλαδή όταν  $\nu \neq 1$  το αριθμητικό σχήμα επίλυσης εισάγει τεχνητή αριθμητική διάχυση (artificial or numerical dissipation) ή αριθμητικό ιξώδες (numerical viscosity) στην λύση. Το αριθμητικό ιξώδες που εισάγεται από το αριθμητικό σχήμα, όπως στο παράδειγμα μας, ονομάζεται πεπλεγμένο αριθμητικό ιξώδες (implicit artificial viscosity) για να το διακρίνουμε από το αριθμητικό ιξώδες που σκόπιμα προστίθεται στα αριθμητικά σχήματα ώστε να καταστεί δυνατός ο υπολογισμός ασυνεχειών ροής. Το αριθμητικό ιξώδες μειώνει την κλίση και το εύρος στην αριθμητική λύση. Η μείωση δε των κλίσεων είναι αποτέλεσμα της ύπαρξης παράγωγα δεύτερης τάξης στο αριθμητικό σχήμα, όπως φαίνεται από την Εξ. (25). Δηλαδή η παρουσία όρων διάχυσης, που είναι δεύτερες παράγωγοι,  $u_{xx}$ , ανεξάρτητα αν εισάγονται με ρητό ή πεπλεγμένο τρόπο στο αριθμητικό σχήμα, έχει σαν αποτέλεσμα την δημιουργία αριθμητικού ιξώδους.

Οι παράγωγοι τρίτης τάξης  $u_{xxx}$ , που εισάγονται στο αριθμητικό σχήμα, όπως φαίνεται από την Εξ. (25), έχουν σαν αποτέλεσμα την δημιουργία διαφοράς φάσης. Η διαφορά φάσης που εισάγεται τεχνιέντως στην αριθμητική λύση ονομάζεται αριθμητική διάχυση (numerical dispersion). Το αθροιστικό αποτέλεσμα της διάχυσης και διασποράς είναι η παραμόρφωση της αριθμητικής λύσης.

numerical diffusion = dissipation + dispersion



Σχήμα 5.3 Σχηματική αναπαράσταση της αλλοίωσης αρχικής μορφής λόγω διάχυσης και διασποράς του αριθμητικού σχήματος.

Η παραμόρφωση της αριθμητικής λύσης από τον συνδυασμό διασποράς και διάχυσης είναι περισσότερο αισθητή στο χαμηλής τάξης αριθμητικά σχήματα. Ο μόνος τρόπος για να την ελαχιστοποιήσουμε είναι η αύξηση της πυκνότητας του αριθμητικού πλέγματος. Τα ανώτερης τάξης αριθμητικά σχήματα (τέταρτης, έκτης κλπ.) παρουσιάζουν πολύ μικρότερη παραμόρφωση της αριθμητικής λύσης. Η αριθμητική διάχυση (dissipation) στα ανώτερης τάξης αριθμητικά σχήματα οφείλεται στην παρουσία παραγώγων άρτιας τάξης στην τροποποιημένη εξίσωση όπως  $\partial^6 u / \partial x^6$ . Η διασπορά οφείλεται στην παρουσία παραγώγων περιττής τάξης όπως  $\partial^5 u / \partial x^5$ .

Η παραμόρφωση της αριθμητικής λύσης από την διάχυση και την διασπορά απεικονίζεται σχηματικά στο Σχ. 5.3.

## 5.6 Φυσική ερμηνεία της συνθήκης ευστάθειας

Θεωρούμε την δεύτερης τάξης εξίσωση μεταφοράς κύματος σε μια διάσταση

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0$$

με αρχική συνθήκη  $u(x, 0) = f(x)$  που ως γνωστό έχει αναλυτική λύση

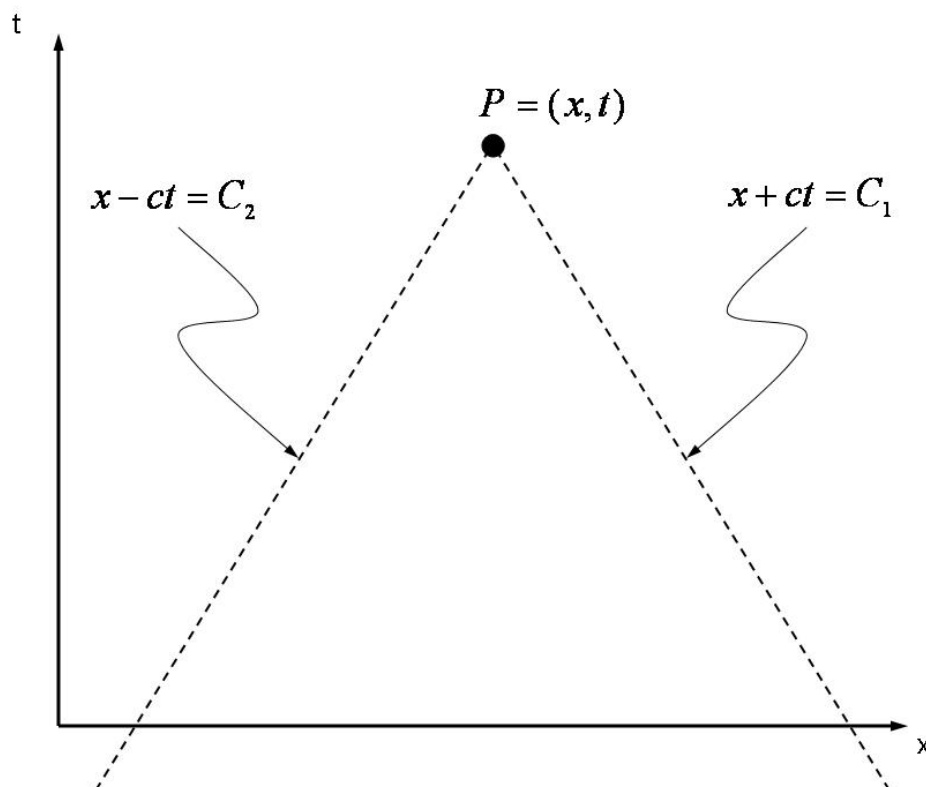
$$u(x, t) = \frac{1}{2}[f(x - ct) + f(x + ct)]$$

όπου  $(x - ct)$  και  $(x + ct)$  είναι οι χαρακτηριστικές

$$(x + ct) = \text{const} = C_1$$

$$(x - ct) = \text{const} = C_2$$

που υποδηλώνουν ότι η λύση σε οποιοδήποτε σημείο  $P = (x, t)$  εξαρτάται από δεδομένα που περιέχονται μεταξύ των χαρακτηριστικών που τέμνονται στο σημείο  $P$ , όπως φαίνεται στο Σχ. 5.4.



Σχήμα 5.4 Χαρακτηριστικές της κυματικής εξίσωσης  $u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0$

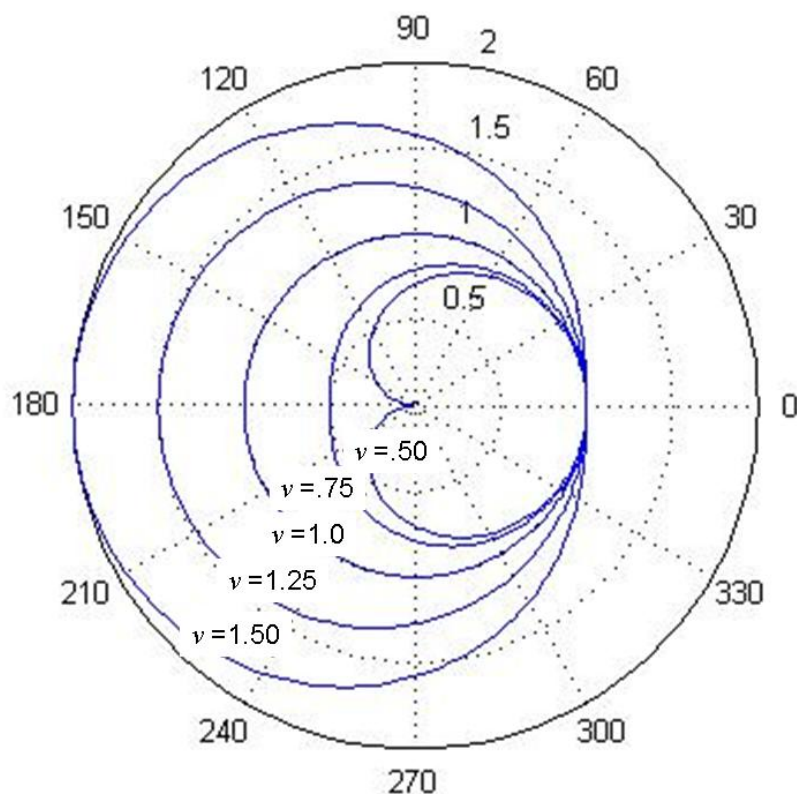
Βρήκαμε όμως ότι η συνθήκη αριθμητικής ευστάθειας ρητών σχημάτων για την κυματική εξίσωση είναι

$$\left| c \frac{\Delta t}{\Delta x} \right| \leq 1$$

Οι κλίσεις των χαρακτηριστικών είναι  $dx/dt = \pm \frac{1}{c}$ , δηλαδή η συνθήκη ευστάθειας ουσιαστικά επιβάλλει την συνθήκη: Το χωρίο που ορίζεται από τις χαρακτηριστικές της αναλυτικής λύσης (ζώνη επηρεασμού της αναλυτικής λύσης) να περικλείεται από το χωρίο που επηρεάζει την αριθμητική λύση. Δηλαδή το χωρίο επηρεασμού της αριθμητικής λύσης μπορεί να περικλείει το χωρίο επηρεασμού της αναλυτικής λύσης αλλά δεν μπορεί να περιέχεται σε αυτό.

## 5.7 Παράγοντας ενίσχυσης, διάχυση και διασπορά

Η εξάρτηση του παράγοντα ενίσχυσης  $|G|$  από τις παραμέτρους  $\nu = c\Delta t/\Delta x$ , που ονομάζεται αριθμός CFL ή Courant, και από την σχετική συχνότητα  $\beta$  μπορεί να αναπαρασταθεί γραφικά σε διάγραμμα πολικών συντεταγμένων όπως φαίνεται στο Σχ. 5.4. Είναι φανερό ότι το αριθμητικό σχήμα παραμένει ευσταθές μόνο για τιμές CFL μικρότερες της μονάδας  $\nu = c\Delta t/\Delta x \leq 1$  για όλους τους κυματαριθμούς.



Σχήμα 5.4 Διάγραμμα μεταβολής του παράγοντα ενίσχυσης  $|G|$  με τον αριθμό CFL  $\nu = c\Delta t/\Delta x$  και τον κυματαριθμό  $\beta = k_m\Delta x$

Ο παράγοντας ενίσχυσης της Εξ. (5.20) έχει πραγματικό και φανταστικό μέρος και γράφεται ως  $G = |G|e^{i\phi}$  όπου  $\phi$  είναι μια γωνία φάσης που είναι συνάρτηση της συχνότητας  $\beta$  που παίρνει τιμές από  $0 \leq \beta \leq \pi$ .

$$G = \left[ (1 - \nu + \nu \cos \beta)^2 + (\nu \sin \beta)^2 \right]^{1/2} e^{i\phi}$$

$$\phi = \tan^{-1} [Im(G) / Re(G)] = \tan^{-1} \left( \frac{-\nu \sin \beta}{1 - \nu + \nu \cos \beta} \right)$$

Δηλαδή για αριθμό Courant  $CFL = 1$  όλες οι συνιστώσες συχνότητες μεταδίδονται χωρίς απόσβεση  $|G| = 1$ . Όμως για  $CFL < 1$  η απόσβεση εξαρτάται από την τιμή της παραμέτρου  $\beta$ .

Ο παράγοντας ενίσχυσης της ακριβούς λύσης βρίσκεται όταν αντικαταστήσουμε την λύση  $u = e^{\alpha t} e^{ik_m x}$  στην εξίσωση κύματος οπότε βρίσκουμε ότι  $\alpha = -ik_m c$  δηλαδή

$$u = e^{ik_m(x-ct)}$$

και ο παράγοντας ενίσχυσης της αναλυτικής λύσης είναι

$$G_e = \frac{u(t + \Delta t)}{u(t)} = \frac{e^{ik_m[x-c(t+\Delta t)]}}{e^{ik_m[x-ct]}} = e^{-ik_m c \Delta t} = e^{i\phi_e}$$

$$|G_e| = 1$$

όπου

$$\phi_e = -k_m C \Delta t = -\beta \nu$$

δηλαδή το εύρος του σφάλματος απόσβεσης (dissipation) που υπάρχει μετά την επανάληψη του αριθμητικού σχήματος  $N$  φορές είναι

$$(1 - |G|^N)$$

και το σφάλμα διασποράς (dispersion or phase error) είναι

$$N(\phi_e - \phi)$$

Το σχετικό σφάλμα που αναπτύσσεται μετά από κάθε χρονικό βήμα είναι

$$\frac{\phi}{\phi_e} = \frac{\tan^{-1} \left[ \frac{-v \sin \beta}{1 - v + v \cos \beta} \right]}{-\beta v}$$

Για μικρούς κυματαριθμούς  $\beta$  το παραπάνω σφάλμα είναι

$$\frac{\phi}{\phi_e} \approx 1 - \frac{1}{6} (2v^2 - 3v + 1) \beta^2$$

Από τις παραπάνω σχέσεις για το σχετικό σφάλμα φάσης φαίνεται ότι η τιμή  $\phi/\phi_e$  μπορεί να πάρει τιμές μικρότερες ή μεγαλύτερες από την μονάδα ανάλογα του αριθμού Courant. Όταν το σχετικό σφάλμα φάσης είναι μικρότερο της μονάδας η ταχύτητα του κύματος στην αριθμητική λύση είναι πιο μικρή από την ταχύτητα που προβλέπει η ακριβής λύση, δηλαδή έχουμε σφάλμα φάσης καθυστέρησης (lagging phase error). Αντίθετα όταν το σχετικό σφάλμα φάσης  $\phi/\phi_e$  είναι μεγαλύτερο της μονάδας έχουμε σφάλμα προπορείας (leading phase error) και η ταχύτητα μετάδοσης κύματος στην αριθμητική λύση είναι μεγαλύτερη από την ταχύτητα που προβλέπει η αναλυτική λύση. Το το αριθμητικό σχήμα που θεωρήσαμε έχει σφάλμα προπορείας για  $0.5 < v < 1$  και σφάλμα καθυστέρησης για  $v \leq 0.5$ .

## Παράδειγμα

Η αριθμητική λύση της εξίσωσης κύματος επιτυγχάνεται με το ρητό αριθμητικό σχήμα που αναλύσαμε παραπάνω για  $v = 0.8$  και αρχική συνθήκη  $u(x, 0) = \sin(4\pi x)$ ,  $0 \leq x \leq 1$ . Εστω ότι  $\Delta x = 0.02$  τότε  $\Delta t = v\Delta x = 0.016$ . Θα υπολογίσουμε τα σφάλματα φάσης μετά 10 βήματα. Ο κυματαριθμός για το παραπάνω πρόβλημα είναι

$$k_m = \frac{2m\pi}{2L} = \frac{4\pi}{1} = 4\pi$$

δηλαδή

$$\beta = k_m \Delta x = 4\pi \times 0.02 = 0.8\pi$$

Το μέτρο του παράγοντα ενίσχυσης είναι

$$|G| = \left[ (1 - v + v \cos \beta)^2 + (-v \sin \beta)^2 \right]^{1/2} =$$

Δηλαδή το σφάλμα μετά από 10 χρονικά βήματα είναι

$$(1 - |G|^N) = (1 - |G|^{10}) =$$

Η διαφορά φάσης της αναλυτικής λύσης μετά ένα βήμα είναι

$$\varphi_e \doteq -\beta v =$$

και του αριθμητικού σχήματος

$$\phi = \arctan \left[ \frac{-v \sin \beta}{1 - v + v \cos \beta} \right] =$$

και το σφάλμα μετά δέκα βήματα γίνεται

$$10(\varphi_e - \phi) =$$

## 5.6 Ευστάθεια πεπλεγμένων σχημάτων

Το πεπλεγμένο σχήμα πρώτης τάξης στον χρόνο και δεύτερης τάξης στον χώρο για την εξίσωση κύματος είναι ευσταθές χωρίς περιορισμό (unconditionally stable) και απαιτεί για την αριθμητική επίλυση την αντιστροφή τριδιαγωνίου μητρώου

$$-A_j u_{j-1}^{n+1} + u_j^{n+1} + A_j u_{j+1}^{n+1} = B_j$$

$$\text{όπου } A_j = v/2, \quad B_j = u_j^n, \quad B_1 = u_1^n - u_0^{n+1}, \quad B_l = u_l^n - u_{l+1}^{n+1}$$

$$\text{ή } [A] \vec{u}^{n+1} = \vec{B}$$

Η τροποποιημένη εξίσωση για το παραπάνω σχήμα είναι

$$u_t + cu_x = \left( \frac{c^2}{2} \Delta t \right) u_{xx} - \left[ \frac{c}{6} (\Delta x)^2 + \frac{c^3}{3} (\Delta t)^2 \right] u_{xxx} + \dots$$

με παράγοντα ενίσχυσης και σφάλμα φάσης που δίνονται από τις σχέσεις

$$G = \frac{1 - iv \sin \beta}{1 + v^2 \sin^2 \beta}$$



$$\frac{\phi}{\phi_e} = \frac{\tan^{-1}(-v \sin \beta)}{-\beta v}$$

Το πρώτης τάξης πεπλεγμένο σχήμα παρουσιάζει όμως μεγάλη διάχυση (dissipative error  $\sim \Delta t$ ) και έχει μεγάλο σφάλμα καθυστέρησης για μεγάλους κυματαριθμούς. Για τους παραπάνω λόγους το πεπλεγμένο σχήμα πρώτης τάξης (Euler explicit method) πρέπει να χρησιμοποιείται μόνο για να επιτύχουμε ανεξάρτητες του χρόνου αριθμητικές λύσεις (steady state solutions). Εξαρτώμενες από τον χρόνο αριθμητικές λύσεις χρησιμοποιούν το δεύτερης τάξης ακρίβειας στον χρόνο αριθμητικό σχήμα που βρίσκεται με χρήση σειρών Taylor όπου η τιμή στο χρονικό βήμα  $n + 1$  προσεγγίζεται ως

$$u_j^{n+1} = u_j^n + \frac{\Delta E}{2} \left[ (u_t)^n + (u_t)^{n+1} \right]_j + 0(\Delta t)^3$$

αλλά  $u_t = -cu_x$  δηλαδή

$$u_j^{n+1} = u_j^n - \frac{c\Delta t}{2} \left[ (u_x)^n + (u_x)^{n+1} \right]_j + 0[\Delta t^3]$$

με χρήση κεντρικών διαφορών για την πρώτη χωρική παράγωγο βρίσκουμε

$$u_j^{n+1} = u_j^n - \frac{v}{4} (u_{j+1}^{n+1} + u_{j+1}^n - u_{j-1}^{n+1} - u_{j-1}^n) + 0(\Delta x^3, \Delta t^3)$$

που και πάλι απαιτεί την αντίστροφη ενός τριδιαγωνίου μητρώου για κάθε χρονικό βήμα.

Η τροποποιημένη εξίσωση του παραπάνω σχήματος που αναφέρεται και ως κανόνας τραπεζίου (trapezoidal rule or midpoint rule) είναι

$$u_t + cu_x = - \left[ \frac{c^3 (\Delta t)^2}{12} + \frac{c (\Delta x)^2}{6} \right] u_{xxx} - \left[ \frac{c (\Delta x)^4}{120} + \frac{c^3 (\Delta t)^2 (\Delta x)^2}{24} + \frac{c^4 (\Delta t)^4}{80} \right] u_{xxxx}$$

Η απουσία των παραγώγων άρτιας τάξης από την τροποποιημένη εξίσωση δηλώνει ότι το παραπάνω αριθμητικό σχήμα δεν έχει αριθμητική διάχυση .

Ο παράγοντας ενίσχυσης του σχήματος κανόνας τραπεζίου είναι

$$G = \frac{1 - \left(i \frac{\nu}{2}\right) \sin \beta}{1 + \left(i \frac{\nu}{2}\right) \sin \beta}$$

Το παραπάνω σχήμα μπορεί να γίνει μεγαλύτερης ακρίβειας στον χώρο όταν χρησιμοποιήσουμε ανώτερης τάξης προσέγγισης για την χωρική παράγωγο.

## 5.7 Ανάλυση ευστάθειας με την μέθοδο μητρώων

Η ευστάθεια αριθμητικών σχημάτων εξετάστηκε με την χρήση της μεθόδου von Neumann. Μία άλλη μέθοδος για την μελέτη ευστάθειας των αριθμητικών σχημάτων είναι η μέθοδος μητρώων που παρουσιάζεται παρκάρω θεωρώντας σαν παράδειγμα το απλό ρητό, μονόπλευρο σχήμα για την εξίσωση κύματος.

$$u_j^{n+1} = \nu u_{j-1}^n + (1-\nu)u_j^n, \quad j=1,2,\dots,Jm$$

όπου  $\nu = c(\Delta t / \Delta x)$ ,  $c > 0$ .

Υποτίθεται ότι οι οριακές συνθήκες είναι περιοδικές, δηλαδή  $u_{j_{m+1}}^n = u_1^n$ ,  $u_{j_m}^n = u_0^n$ ,  $u_{j_{m-1}}^n = u_{-1}^n$ . Το αριθμητικό σχήμα μπορεί να γραφεί υπό μορφή μητρώου ως

$$\begin{bmatrix} u_1^{n+1} \\ u_2^{n+1} \\ \cdot \\ \cdot \\ u_{J_{\max}}^{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-\nu & 0 & 0 & \dots & \nu \\ \nu & 1-\nu & 0 & & 0 \\ 0 & \nu & 1-\nu & & \cdot \\ \cdot & & & & \cdot \\ \cdot & & & 0 & 1-\nu & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \nu & 1-\nu \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1^n \\ u_2^n \\ \cdot \\ \cdot \\ u_{J_{\max}}^n \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{U}^{n+1} = [\mathbf{M}]\mathbf{U}^n, \quad \mathbf{U} = [u_1, u_2, \dots, u_{J_{\max}}]$$

Το μητρώο  $[\mathbf{M}]$  είναι της μορφής

$$\begin{bmatrix} s_1 & s_2 & 0 & \dots & s_0 \\ s_0 & s_1 & s_2 & & 0 \\ 0 & s_0 & s_1 & & 0 \\ & & \cdot & & \cdot \\ \cdot & & & s_1 & s_2 \\ s_2 & \dots & 0 & & s_1 \end{bmatrix}$$

και έχει ιδιοτιμές

$$\lambda_j = s_1 + (s_0 + s_2) \cos\left(\frac{2\pi(j-1)}{J \max}\right) + i(s_0 - s_2) \sin\left(\frac{2\pi(j-1)}{J \max}\right)$$

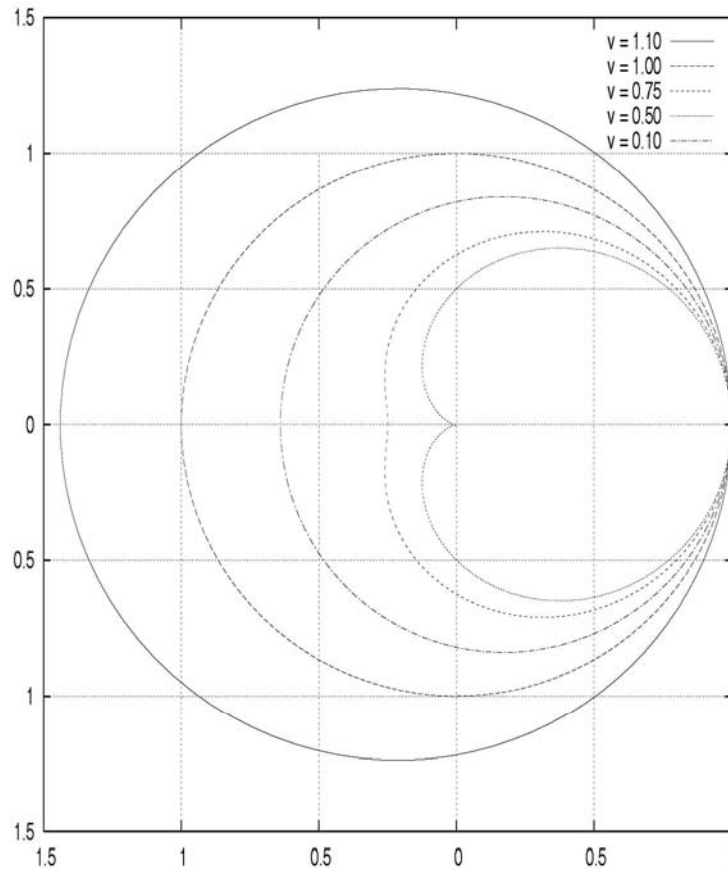
όπου  $s_0 = \nu$ ,  $s_1 = 1 - \nu$ ,  $s_2 = 0$ , δηλαδή οι ιδιοτιμές του μητρώου  $[\mathbf{M}]$  είναι

$$\lambda_j = (1 - \nu) + \nu \cos\left(\frac{2\pi(j-1)}{J \max}\right) + i \nu \sin\left(\frac{2\pi(j-1)}{J \max}\right)$$

Και ευστάθεια επιτυγχάνεται όταν ισχύει  $|\lambda_j| \leq 1$  δηλαδή όταν

$$(1 - \nu)^2 + \nu^2 + 2\nu(1 - \nu) \cos \beta \leq 1 \quad \text{ή} \quad \nu \leq 1$$

Το διάγραμμα ευστάθειας φαίνεται στο παρκάρω σχήμα



**Σχήμα 5.5** Διάγραμμα ευστάθειας. Ευστάθεια εξασφαλίζεται όταν η παράσταση  $(1-\nu)^2 + \nu^2 + 2\nu(1-\nu)\cos\beta$  είναι μικρότερη της μονάδας, δηλαδή μόνο για τιμές  $CFL = \nu \leq 1$ .

## 5.6 Παραβολικές εξισώσεις και μέθοδος Keller

Στα προηγούμενα κεφάλαια δείξαμε ότι οι εξισώσεις παραβολικού τύπου μπορεί να λυθούν αριθμητικά με ρητά σχήματα, τα οποία όμως έχουν περιορισμούς χρονικού βήματος λόγω ευστάθειας, και με πλεγμένα σχήματα. Τα πεπλεγμένα σχήματα για την αριθμητική επίλυση παραβολικού τύπου εξισώσεων  $u_t = u_{xx}$  είναι

$$\text{πεπλεγμένο Euler} \quad \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} = \frac{u_{j+1}^{n+1} - 2u_j^{n+1} + u_{j-1}^{n+1}}{(\Delta x)^2} + 0[\Delta t, \Delta x^2]$$

$$\text{ή} \quad \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} = \frac{\delta^2 u_j^{n+1}}{(\Delta x)^2}$$

$$\text{πεπλεγμένο Crank - Nicolsan} \quad \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} = \frac{\delta^2 u_j^n + \delta^2 u_j^{n+1}}{2(\Delta x)^2} + 0[(\Delta t)^2, (\Delta x)^2]$$

$$\text{πεπλεγμένο τριβηματικό} \quad (1+\theta) \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} - \theta \frac{u_j^n - u_j^{n-1}}{\Delta t} = \frac{\delta^2 u_j^{n+1}}{(\Delta x)^2} + 0[(\Delta t)^2, (\Delta x)^2]$$

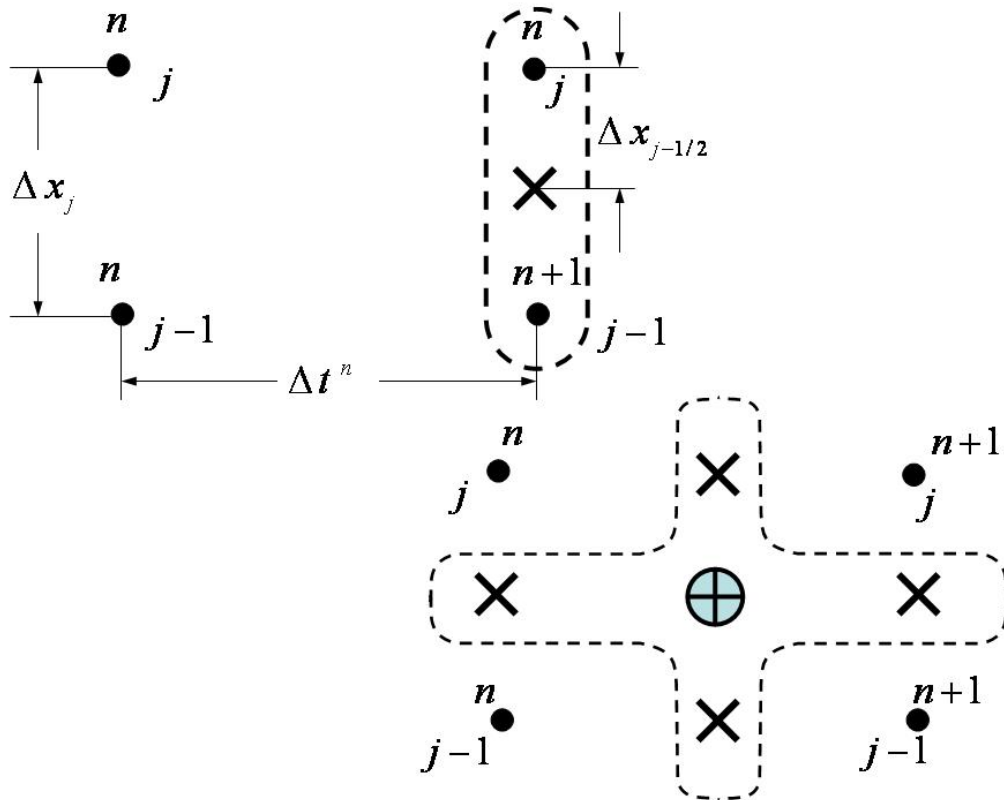
$$\theta = 1/2$$

Μια ακόμη μέθοδος για παραβολικού τύπου προβλήματα είναι η μέθοδος Keller που είναι επίσης πεπλεγμένη μέθοδος αλλά διαφέρει από τις προηγούμενες διότι αντικαθιστά την προσέγγιση της δεύτερης παραγώγου με την διαδοχική προσέγγιση δυο πρώτης τάξεως παραγώγων. Η μέθοδος Keller χρησιμοποιείται συχνά για την αριθμητική επίλυση των εξισώσεων οριακού στρώματος. Η μέθοδος Keller παρουσιάζεται για την εξίσωση  $u_t = u_{xx}$  που γράφεται στην μορφή

$$\frac{\partial u}{\partial x} = v$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial v}{\partial x}$$

Το παραπάνω σύστημα εξισώσεων προσεγγίζεται αριθμητικά με κεντρικές διαφορές στο τετράπλευρο του Σχ. 3



Σχήμα 5.5

και η μέθοδος είναι γνωστή σαν Keller box method . Η πρώτη εξίσωση προσεγγίζεται ως

$$\frac{u_j^{n+1} - u_{j-1}^{n+1}}{\Delta x_j} = \bar{v}_{j-1/2}^{n+1}$$

όπου η μέση τιμή  $\bar{u}_{j-1/2}^{n+1}$  προσεγγίζεται με δεύτερη τάξη ακρίβειας ως

$$\bar{u}_{j-1/2}^{n+1} = \frac{u_j^{n+1} + u_{j-1}^{n+1}}{2}$$

και η δεύτερη εξίσωση προσεγγίζεται ως

$$\frac{\bar{u}_{j-1/2}^{n+1} - \bar{u}_{j-1/2}^n}{\Delta t_{n+1}} = \frac{\bar{v}_j^{n+1/2} - \bar{v}_{j-1}^{n+1/2}}{\Delta x_j}$$

όπου οι παράγωγοι προσεγγίζονται με μέσες τιμές και η μέση τιμή  $v_j^{n+1/2}$  είναι

$$\bar{v}_j^{n+1/2} = \frac{v_j^n + v_j^{n+1}}{2}$$

Με αντικατάσταση των μέσων τιμών βρίσκουμε

$$\frac{u_j^{n+1} - u_{j-1}^{n+1}}{\Delta x_j} = \frac{v_j^{n+1} + v_{j-1}^{n+1}}{2}$$

$$\frac{u_j^{n+1} + u_{j-1}^{n+1}}{\Delta t_{n+1}} = \frac{v_j^{n+1} - v_{j-1}^{n+1}}{\Delta x_j} + \frac{u_j^n + u_{j-1}^n}{\Delta t_{n+1}} + \frac{v_j^n - v_{j-1}^n}{\Delta x_j}$$

Οι άγνωστοι  $(u^{n+1}, u^{n+1})$  στις παραπάνω σχέσεις βρίσκονται στα σημεία  $j$  και  $j-1$ . Το αλγεβρικό σύστημα που πρέπει να λύσουμε στην μέθοδο Keller έχει block-τριδιαγώνια μορφή.

$$[A]\bar{q}_{j-1}^{n+1} + [B]\bar{q}_j^{n+1} + [C]\bar{q}_{j+1}^{n+1} = \bar{C}_j$$

$$\bar{q}_j = \begin{bmatrix} v_j \\ u_j \end{bmatrix}$$

Η μέθοδος Keller είναι χρήσιμη για την αριθμητική επίλυση των εξισώσεων οριακού στρώματος που είναι μη-γραμμικές και επί πλέον απαιτούν κάποια γραμμικοποίηση για την αριθμητική τους επίλυση.

Οι όροι  $v_{j-1}^{n+1}$  από την δεύτερη εξίσωση για την χρονική διακριτοποίηση μπορεί να απαλειφθούν με αντικατάσταση στην πρώτη εξίσωση για την χωρική διακριτοποίηση εάν η αυτή γραφεί για το χρονικό βήμα  $n$  και αντικατασταθεί στην δεύτερη εξίσωση, τότε βρίσκουμε

$$\frac{u_j^{n+1} - u_{j-1}^{n+1}}{\Delta t_{n+1}} = 2 \frac{v_j^{n+1}}{\Delta x_j} - 2 \frac{u_j^{n+1} - u_{j-1}^{n+1}}{(\Delta x_j)^2} + \frac{u_j^n - u_{j-1}^n}{\Delta t_n} + 2 \frac{v_j^n}{\Delta x_j} - 2 \frac{u_j^n - u_{j-1}^n}{(\Delta x_j)^2}$$

Παρόμοια μπορεί να απαλειφθούν οι όροι  $v_j^{n+1}, v_j^n$  γράφοντας την δεύτερη εξίσωση για  $j \rightarrow j+1$

$$\frac{u_{j+1}^{n+1} - u_j^{n+1}}{\Delta t_{n+1}} = -2 \frac{v_j^{n+1}}{\Delta x_{j+1}} + 2 \frac{u_{j+1}^{n+1} - u_j^{n+1}}{(\Delta x_{j+1})^2} + \frac{u_{j+1}^n - u_j^n}{\Delta t_n} - 2 \frac{v_j^n}{\Delta x_{j+1}} + 2 \frac{u_{j+1}^n - u_j^n}{\Delta x_{j+1}}$$

Οι όροι  $v_j^{n+1}, v_j^n$  μπορεί να απαλειφθούν και πάλι από τις παραπάνω εξισώσεις οπότε βρίσκουμε.

$$[B_j]u_{j-1}^{n+1} + [D_j]u_j^{n+1} + [A_j]u_{j+1}^{n+1} = C_j$$