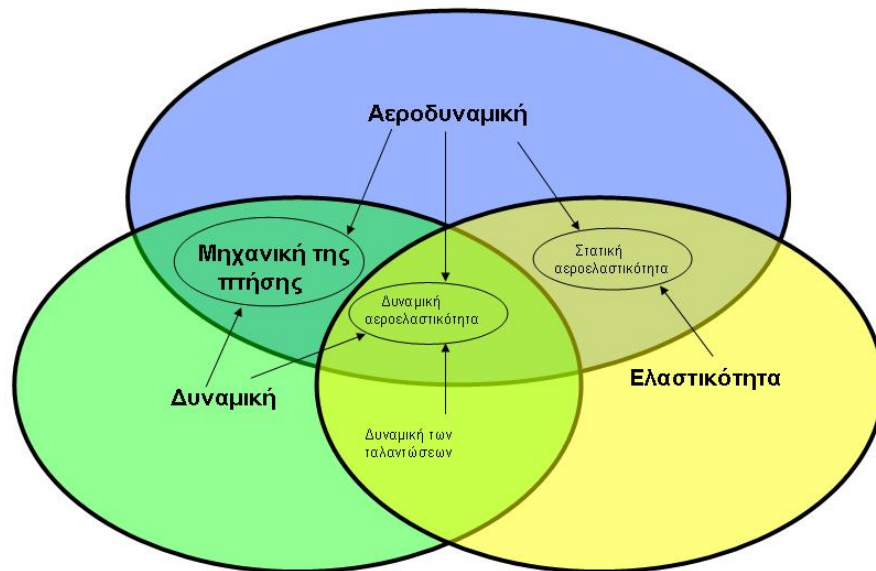


ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

1. Εισαγωγή	1
1.1 Ιστορική Αναδρομή	2
1.2 Παράδειγμα Αερολαστικής Σύζευξης	2
2. Στατική Αεροελαστικότητα	6
2.1 Μοντέλα αεροσήραγγας	6
2.1.1 Μοντέλο στηριγμένο στο τοίχωμα	6
2.1.2 Μοντέλο στηριγμένο σε πρόβολο	10
2.1.3 Μοντέλο στήριξης με υποστηρίγματα	12
2.1.4 Αντιστροφή του αileron σε μοντέλο στηριγμένο στο τοίχωμα	16
2.2 Ελαστικές Αεροδυναμικές Επιφάνειες	18
2.2.1 Εξισώσεις ισορροπίας	21
2.2.2 Απόκλιση σε στρέψη	21
3. Δυναμική Αεραελαστικότητα	23
3.1 Χαρακτηριστικά Ευστάθειας	23
3.2 Αεροελαστική ανάλυση λεπτής αεροτομής	29
A. Γενικευμένες Συντεταγμένες και Εξισώσεις Lagrange	34
A.1 Δυναμική ομοιόμορφης χορδής	35
A.1.2 Εξισώσεις κίνησης	35
A.2.1 Λύση στατικών κυμάτων	38
A.1.3 Ορθογωνιότητα των ιδιοσχημάτων	42
A.1.4 Χρήση ορθογωνιότητας	43
A.1.5 Λύση κινούμενου κύματος	45
A.2 Γενικευμένες εξισώσεις κίνησης	48
A.2.1 Εξισώσεις κίνησης Lagrange	49
A.2.2 Γενικευμένες εξισώσεις κίνησης χορδής	54
A.3 Δυναμική στρεπτικών ταλαντώσεων	61
A.3.1 Εξισώσεις κίνησης	61
A.4 Καμπρτικές ταλαντώσεις δοκού	65
A.4.1 Μετακινούμενος ελαστικός περιορισμός	69
A.4.2 Περιστρεφόμενος ελαστικός περιορισμός	69
A.4.3 Μετακινούμενος αδρανειακός περιορισμός	70
A.4.4 Περιστρεφόμενος αδρανειακός περιορισμός	70
B. Μέθοδοι επίλυσης προβλημάτων ταλάντωσης κατασκευών	74
B.1 Η μέθοδος Ritz	75
B.2 Η μέθοδος Galerkin	77
B.3 Η αρχή του Hamilton	80
Γ. Αναλυτικές προσεγγίσεις σε ασταθούς αεροδυναμικής	86
Γ.1 Η Θεωρία Theodoresen	86
Γ.2 Η Θεωρία Peters	88
Γ.3 Αεροδυναμικά Φορτία Αρμονικά Ταλαντευμένων Αεροτομών	93
Γ.3.1 Εξισώσεις Κίνησης και Οριακές Συνθήκες	93
Γ.4 Δυναμικό επιτάχυνσης	96
Γ.5 Αεροτομή που εκτελεί κάθετη μετατόπιση και ταλάντωση περιστροφής	98

1. Εισαγωγή

Ο όρος αεροελαστικότητα χρησιμοποιείται για να υποδηλώσει το πεδίο μελέτης που εξετάζει την αλληλεπίδραση μεταξύ παραμόρφωσης μίας ελαστικής κατασκευής σε ένα ρεύμα αέρα και το προκαλούμενο αεροδυναμικό φορτίο. Οι βασικές περιοχές της αεροδυναμικής, της ελαστικότητας και της δυναμικής, που εμπλέκονται στην μελέτη της αεροελαστικής συμπεριφοράς απεικονίζονται στο Σχ. 1.1 Στο σχήμα αυτό φαίνεται και η αλληλεπίδραση των επί μέρους τομέων



Σχήμα 1.1 Συνεισφορά των διαφορετικών κλάδων στην αεροελαστικότητα

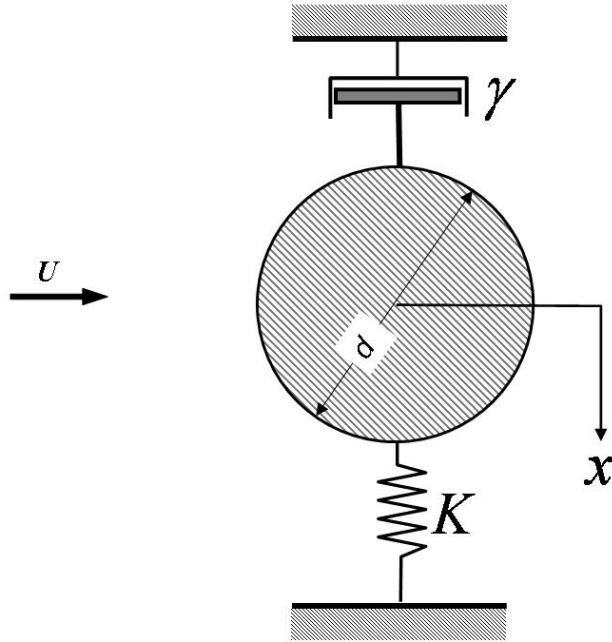
Η κλασσική αεροδυναμική είναι βασικό συστατικό στοιχείο της αεροελαστικότητας και παρέχει προβλέψεις των φορτίων που εξασκούνται σε ένα αεροδυναμικό σώμα. Με την εφαρμογή της θεωρίας ελαστικότητας προβλέπονται οι παραμορφώσεις του σώματος υπό την επίρεια των φορτίων, ενώ η δυναμική εισάγει την το αποτέλεσμα των εσωτερικών δυνάμεων. Η γνώση των βασικών περιοχών της αεροδυναμικής, ελαστικότητας και δυναμικής οδηγεί στην μελέτη πιο σύνθετων προβλημάτων που καλύπτονται από περιοχές όπως η μηχανική της πήξης και η δυναμική των ταλαντώσεων. Στο κεφάλαιο αυτό θα ασχοληθούμε με την στατική και δυναμική αεροελαστικότητα.

1.1 Ιστορική Αναδρομή

Τα φαινόμενα αεροελαστικής σύζευξης έπαιξαν σημαντικό ρόλο καθ' όλη την διάρκεια της ανάπτυξης της πτήσης με χρήση πηγής ισχύος (powered flight). Πολλές από τις πρώτες προσπάθειες επίτευξης πτήσης οχήματος βαρύτερου του αέρα απέτυχαν λόγω δυσμενούς αεροελαστικής σύζευξης. Παραδείγματος χάριν, λίγο πριν από την επιτυχία των αδελφών Wright, απέτυχαν οι προσπάθειες του Samuel Langley επειδή χρησιμοποίησε πολύ εύκαμπτα και υπερφορτωμένα πτερύγια με αποτέλεσμα καταστροφή τους λόγω δημιουργίας στρεπτικής απόκλισης (tensional divergence), που θα μελετήσουμε λεπτομερώς σ' αυτό το κεφάλαιο. Ένα ακόμη φαινόμενο αεροελαστικής σύζευξης με καταστρεπτικές συνέπειες είναι ο πτερυγισμός (flutter). Η πρώτη περίπτωση πτερυγισμού σε αεροσκάφος καταγράφηκε το 1916 και έκτοτε η αποφυγή του αποτελεί ένα από τους κύριους σκοπούς σχεδιασμού. Ο R.A. Frizer και W.J. Duncan δημοσίευσαν το 1928 το κλασσικό σύγγραμμα "The flutter of Airplane Wings" που διαπραγματεύεται την θεωρητική και πρακτική αντιμετώπιση και αποφυγή του φαινομένου του πτερυγισμού. Οι τεχνικές αποφυγής πτερυγισμού που προτείνονται στο σύγγραμμα αυτό χρησιμοποιούνται μέχρι σήμερα.

1.2 Παράδειγμα Αεροελαστικής Σύζευξης

Η σημασία της αεροελαστικής σύζευξης στον υπολογισμό της δομικής αντοχής κατασκευών φαίνεται στο παρακάτω απλό παράδειγμα ταλάντωσης κυλινδρικής κατασκευής από ασταθή ροή. Είναι γνωστό από την μηχανική των ρευστών, ότι η ροή γύρω από ένα κύλινδρο σε αρκετά μεγάλους αριθμούς Reynolds είναι ασταθής και μη συμμετρική. Η άντωση που αναπτύσσεται από την ασύμμετρη ροή γύρω από τον κύλινδρο είναι κάθετη στην κατεύθυνση της ροής και το μέγεθος της μεταβάλλεται ημιτονοειδώς στον χρόνο, Όταν ο κύλινδρος είναι στερεά εδρασμένος και μη ελαστικός δεν υπάρχει ανταλλαγή ενέργειας μεταξύ κυλίνδρου και ροής. Όταν όμως ο κύλινδρος είναι ελεύθερος να κινηθεί από την αναπτυσσόμενη δύναμη άντωσης L , ή όταν η δύναμη άντωσης μπορεί να παραμορφώσει την ελαστική κατασκευή του κυλίνδρου, τότε το ρευστό παράγει έργο επί της κατασκευής και πραγματοποιείται ανταλλαγή ενέργειας μεταξύ κυλίνδρου και ροής. Θεωρούμε ελαστικά εδρασμένο μη ελαστικό κύλινδρο που αναπαρίσταται στο Σχ. 1.2



Σχήμα 1.2 Κύλινδρος εκτεθειμένος σε ροή ταχύτητας U που είναι εδρασμένος ελαστικά σε ελατήριο με σταθερά K και αποσβεστήρα με απόσβεση γ

Η φυσική συχνότητα του συστήματος είναι $\omega_o^2 = K/m$ και η εξίσωση κίνησης είναι

$$\ddot{x} + 2\gamma\omega_o\dot{x} + \omega_o^2x = F(t)/m$$

όπου x είναι η κατεύθυνση κάθετη στην ροή και $F(t)$ είναι το αεροδυναμικό φορτίο που βρίσκεται από τον συντελεστή άντωσης

$$F(t) = \frac{1}{2}\rho U^2 d C_L$$

Θεωρούμε ότι η ροή είναι στρωτή και ο αριθμός Reynolds μικρός ($Re < 500$) τότε ο συντελεστής άντωσης μεταβάλλεται αρμονικά στον χρόνο

$$C_L(t) = C_{L_o} e^{i\omega t}$$

όπου η συχνότητα μεταβολής του αεροδυναμικού φορτίου είναι ω και εκφράζεται σε συνάρτηση με τον αδιάστατο αριθμό Stouhal $St = k = 2\pi fd/U$ ή $\omega = Uk/d$. Δηλαδή η εξίσωση κίνησης είναι

$$\ddot{x} + 2\gamma\omega_o\dot{x} + \omega_o^2x = \frac{1}{2m}\rho U^2 d C_{Lo}e^{i\omega t}$$

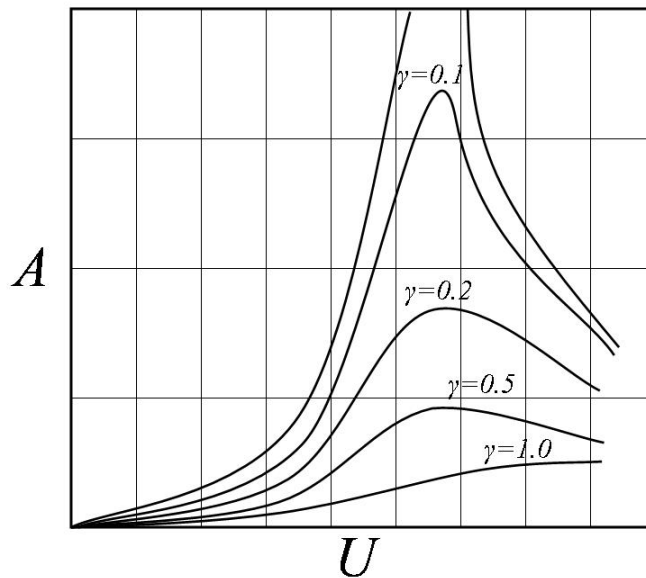
και η γενική της λύση είναι

$$x(t) = Ae^{i(\omega t - \psi)}$$

όπου

$$A = \frac{\rho d}{2m\omega_o^2} \frac{C_{Lo}U^2}{\sqrt{(1-\Omega^2)^2 + (2\gamma\Omega)^2}}, \quad \Omega = \frac{\omega}{\omega_o} = \frac{Uk}{\omega_o d} = \frac{U}{\omega_o d} St, \quad \psi = \arctan\left(\frac{2\gamma\Omega}{1-\Omega^2}\right)$$

Γενικά ο αριθμός St είναι συνάρτηση του αριθμού Re , συνεπώς η εξάρτηση του εύρους A από την ταχύτητα ροής είναι περίπλοκη. Η ποιοτική μεταβολή του εύρους ταλάντωσης με την ταχύτητα ροής για διάφορες αποσβέσεις δίνεται στο διάγραμμα του Σχ. 1.3.



Σχήμα 1.3 Μεταβολή εύρους ταλάντωσης με την ταχύτητα ροής για διάφορες αποσβέσεις γ

Είναι φανερό ότι για ορισμένες ταχύτητα ροής και όταν η απόσβεση της εδράσης είναι μικρή το εύρος ταλάντωσης του ελαστικά εδρασμένου κυλίνδρου γίνεται πολύ μεγάλο. Στην περίπτωση αυτή το έργο που εκτελεί η ροή μέσω του αεροδυναμικού φορτίου είναι μεγάλο και η καταστροφή της

κατασκευής είναι αναμενόμενη. Η παραπάνω απλή ανάλυση που κάναμε για τον ελαστικά εδραζόμενο κύλινδρο έχει ανάλογες προεκτάσεις και σε άλλες κατασκευές που η μεταβαλλόμενη ταχύτητα ροής ή η συχνότητα κίνησης αφ ενός και η χαρακτηριστική συχνότητα της ταλάντωσης της κατασκευής αφ εταίρου παίρνουν τέτοιες τιμές ώστε είναι δυνατή η απορρόφηση ενέργειας από την ροή. Όταν δε η ενέργεια που απορροφά η κατασκευή από την ροή δεν μπορεί να αποσβεστεί, τότε το εύρος της ταλάντωσης συνεχίζει να αυξάνεται μέχρι την τελική καταστροφή της κατασκευής.

Ο τύπος αεροελαστικής σύζευξης του ελαστικά εδρασμένου κυλίνδρου, που δημιουργεί ασταθή αεροδυναμικά φορτία παρόμοια με εκείνα που απαντώνται σε πτέρυγες υπό ασταθή ροή και πτερύγια αεριοστροβίλων, είναι αντικείμενο της δυναμικής αεροελαστικότητας που θα εξετασθεί λεπτομερώς στα επόμενα κεφάλαια. Η μελέτη της αεροελαστικότητας αρχίζει με την στατική αεροελαστικότητα όπου τα φορτία δεν παρουσιάζουν μεταβολή ως προς τον χρόνο.

2. Στατική Αεροελαστικότητα

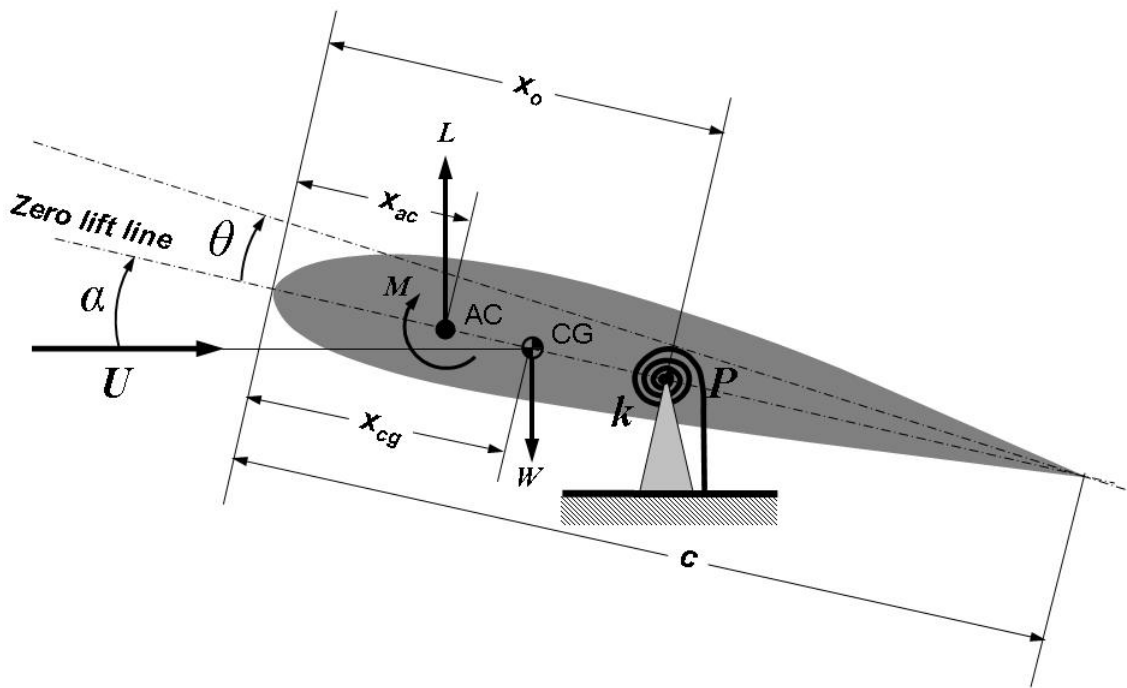
Η στατική αεροελαστικότητα μελετά αλληλεπιδράσεις του αεροδυναμικού φορτίου που δημιουργείται από σταθερή ροή με την επαγομένη ελαστική παραμόρφωση των αεροδυναμικών επιφανειών όπως η πτέρυγα και οι επιφάνειες ελέγχου. Το φαινόμενο που διαπραγματεύεται η στατική αεροελαστικότητα είναι συνεπώς ανεξάρτητα της ταχύτητας και της επιτάχυνσης των αεροδυναμικών επιφανειών. Τα δυο βασικά αντικείμενα της στατικής αεροελαστικότητας που επηρεάζουν τον σχεδιασμό είναι το αποτέλεσμα της ελαστικής παραμόρφωσης στο αεροδυναμικό φορτίο και στατική αστάθεια που μπορεί τελικά να οδηγήσει σε αστοχία. Η στατική αστάθεια αναφέρεται ως απόκλιση (divergence) και καθορίζει τα όρια της πτητικής κατάστασης (flight envelope). Οι μηχανισμοί της στατικής αστάθειας παρουσιάζονται αρχικά για το απλουστευμένο πρόβλημα του απόλυτα στερεού μοντέλου τοποθετημένο στην αεροσήραγγα με ελαστικές εδράσεις. Στο τέλος του κεφαλαίου παρουσιάζεται η αεροελαστική συμπεριφορά ομοιόμορφης πτέρυγας πεπερασμένου εύρους (span).

2.1 Μοντέλα αεροσήραγγας

Θα θεωρήσουμε τους τρεις βασικούς τρόπους στήριξης μοντέλων σε αεροσήραγγα. Οι τρεις βασικούς τρόπους στήριξης είναι: (1) στήριξη στο τοίχωμα (wall-mounted model) δεξ Σχ. 2.1, (2) στήριξη σε πρόβολο (sting-mounted model) δεξ Σχ. 2.4, και (3) στήριξη με υποστηρίγματα (strut-mounted model) δεξ Σχ. 2.5. Η εύρεση των παραμορφώσεων που επάγονται από τα αεροδυναμικά φορτία για τα απλά αυτά παραδείγματα θα βοηθήσουν στην κατανόηση της αστάθειας απόκλισης. Στο τέλος του κεφαλαίου θα διαπραγματευτούμε ακόμη ένα βασικό φαινόμενο την αντιστροφή ακροπτερυγίου (aileron reversal).

2.1.1 Μοντέλο στηριγμένο στο τοίχωμα

Θεωρούμε ένα απόλυτα στερεό μοντέλο πτέρυγας με σταθερή μορφή αεροτομής που υποτίθεται ότι δεν παραμορφώνεται από τα αεροδυναμικά φορτία. Το μοντέλο αυτό τοποθετείται στην αεροσήραγγα και στηρίζεται στα κάθετα τοιχώματα με μια άτρακτο που επιτρέπει περιστροφή της πτέρυγας όπως φαίνεται στο Σχ. 2.1.



Σχ. 2.1. Στήριξη πτέρυγας στα τοιχώματα της αεροσήραγγας.

Η έδραση αυτή της πτέρυγας ισοδυναμεί με ένα ελατήριο σταθεράς k που εμποδίζει την περιστροφή. Υποτίθεται ότι η γωνία πρόσπτωσης, α , είναι μικρή οπότε $\sin \alpha = \alpha$ και $\cos \alpha = 1$. Στην περίπτωση αυτή η χρήση της γραμμικής αεροδυναμικής θεωρίας επαρκεί. Από την ισορροπία των ροπών γύρω από το σημείο έδρασης P έχουμε

$$M_{ac} + L(x_o - x_{ac}) - W(x_o - x_{cg}) - k\theta = 0 \quad (2.1)$$

Η πραγματική γωνία πρόσπτωση λόγω της επί πλέον περιστροφής που προξενείτε λόγω αεροδυναμικής φόρτισης είναι $a = a_r + \theta$.

Η άντωση χωρίς επί πλέον περιστροφή είναι

$$L_r = qSC_{La} a_r \quad (2.2)$$

και για ελαστική στήριξη είναι

$$L = qSC_{La} (a_r + \theta) \quad (2.3)$$

όπου q είναι η δυναμική πίεση $q = \rho U^2 / 2$, S είναι η επιφάνεια της πτέρυγας και C_{La} είναι η κλίση της καμπύλης άντωσης. Γενικά $L \neq L_r$ και για $\theta > 0$, $L > L_r$. Η ροπή των αεροδυναμικών φορτίων γύρω από το αεροδυναμικό κέντρο είναι

$$M_{ac} = qSc C_{Mac} \quad (2.4)$$

Για μικρές γωνίες πρόσπτωσης οι κλίσεις C_{Mac} , C_{La} είναι σταθερές, επί πλέον $C_{La} = 2\pi$ όπως προβλέπει η γραμμική αεροδυναμική θεωρία. Με αντικατάσταση των παραπάνω σχέσεων στην εξίσωση ισοροπίας ροπών έχουμε

$$qScC_{Mac} + qSC_{La}(a_r + \vartheta)(x_o - x_{ac}) - W(x_o - x_{ac}) = k\theta \quad (2.5)$$

ή

$$\theta = \frac{qScC_{Mac} + qSC_{La}a_r(x_o - x_{ac}) - W(x_o - x_{ac})}{k - qSC_{La}(x_o - x_{ac})} \quad (2.6)$$

Όταν ο άξονας στήριξης (περιστροφής) της πτέρυγας είναι πέραν του αεροδυναμικού κέντρου $x_o > x_{ac}$ τότε ο παρανομαστής μπορεί να είναι πολύ μικρός δηλαδή η γωνία θ μπορεί να γίνει πολλή μεγάλη. Η κατάσταση αυτή ονομάζεται απόκλιση πτέρυγας και είναι μια από τις βασικές μορφές στατικής αεροελαστικής αστάθειας. Η τιμή της δυναμικής πίεσης για την οποία ο παρανομαστής μηδενίζεται είναι

$$q_D = \frac{k}{SC_{La}(x_o - x_{ac})} \quad (2.7)$$

και η ταχύτητα αεροσήραγγας (πτήσης) για την οποία συμβαίνει η απόκλιση πτέρυγας είναι

$$U_D = \sqrt{\frac{2k}{\rho_\infty SC_{La}(x_o - x_{ac})}} \quad (2.8)$$

Προφανώς όταν $x_o = x_{ac}$ η ταχύτητα απόκλισης είναι άπειρη. Παρόμοια όταν $x_o < x_{ac}$ η ταχύτητα απόκλισης είναι αρνητική. Δηλαδή, για $x_o \leq x_{ac}$ η απόκλιση πτέρυγας είναι αδύνατη.

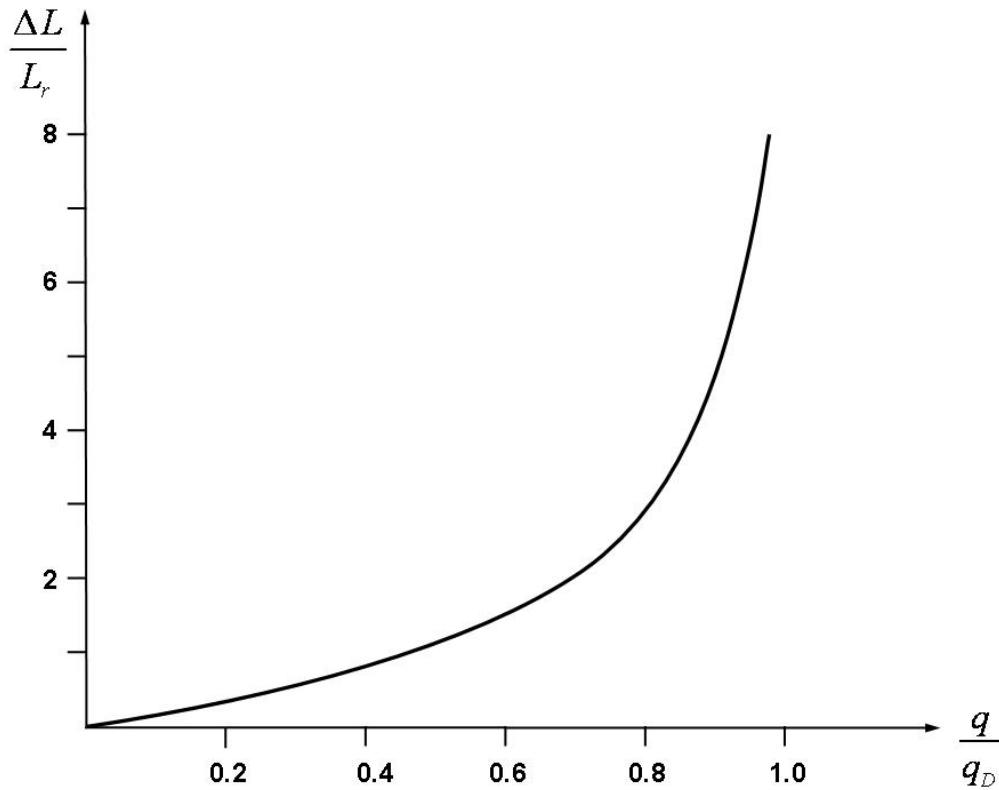
Σε συμμετρικές αεροτομές $C_{Mac} = 0$, και όταν $x_o = x_{cg}$ ο όρος του βάρους απαλείφεται από την Εξ. (2.7) διότι η σταθερά ελατηρίου είναι $k = q_D S C_{La}(x_o - x'_{ac})$, συνεπώς η γωνία απόκλισης θ είναι

$$\theta = \frac{\alpha_r}{q_D/q - 1} \quad (2.9)$$

ή

$$\frac{\Delta L}{L_r} = \frac{\theta}{a_r} = \frac{q/q_D}{1 - q/q_D} \quad (2.10)$$

Δηλαδή η γωνία θ και $\Delta L/L_r$ τείνουν ασυμπτωτικά στο άπειρο καθώς $q \rightarrow q_D$ όπως φαίνεται στο Σχ. 2.2.

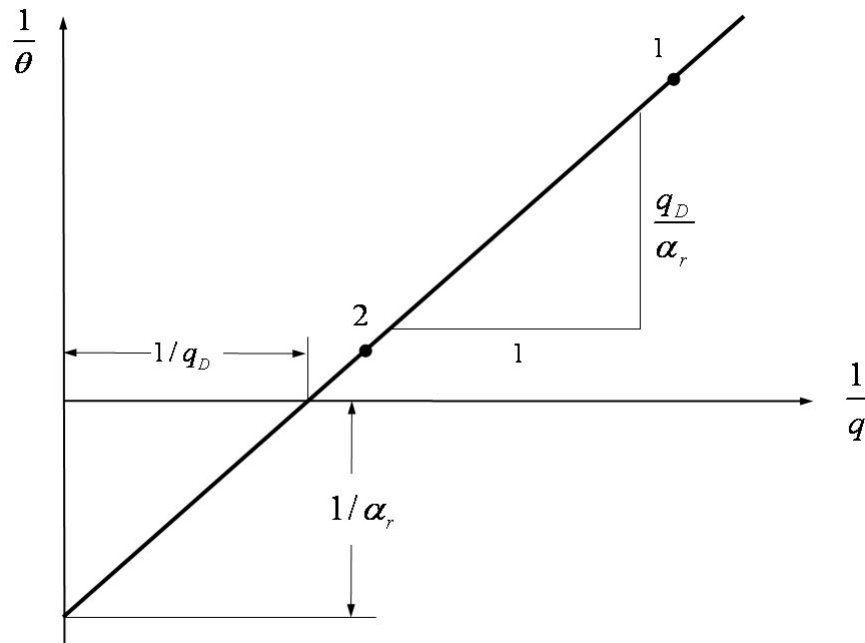


Σχήμα 2.2. Μεταβολή της άντωσης που προέρχεται από αεροελαστική παραμόρφωση

Από την Εξ. (2.9) έχουμε

$$\frac{1}{\theta} = \frac{q_D}{\alpha_r} \left(\frac{1}{q} - \frac{1}{q_D} \right) \quad (2.11)$$

Δηλαδή η σχέση $1/q$ και $1/\theta$ είναι γραμμική όπως φαίνεται και στο Σχ. 2.3

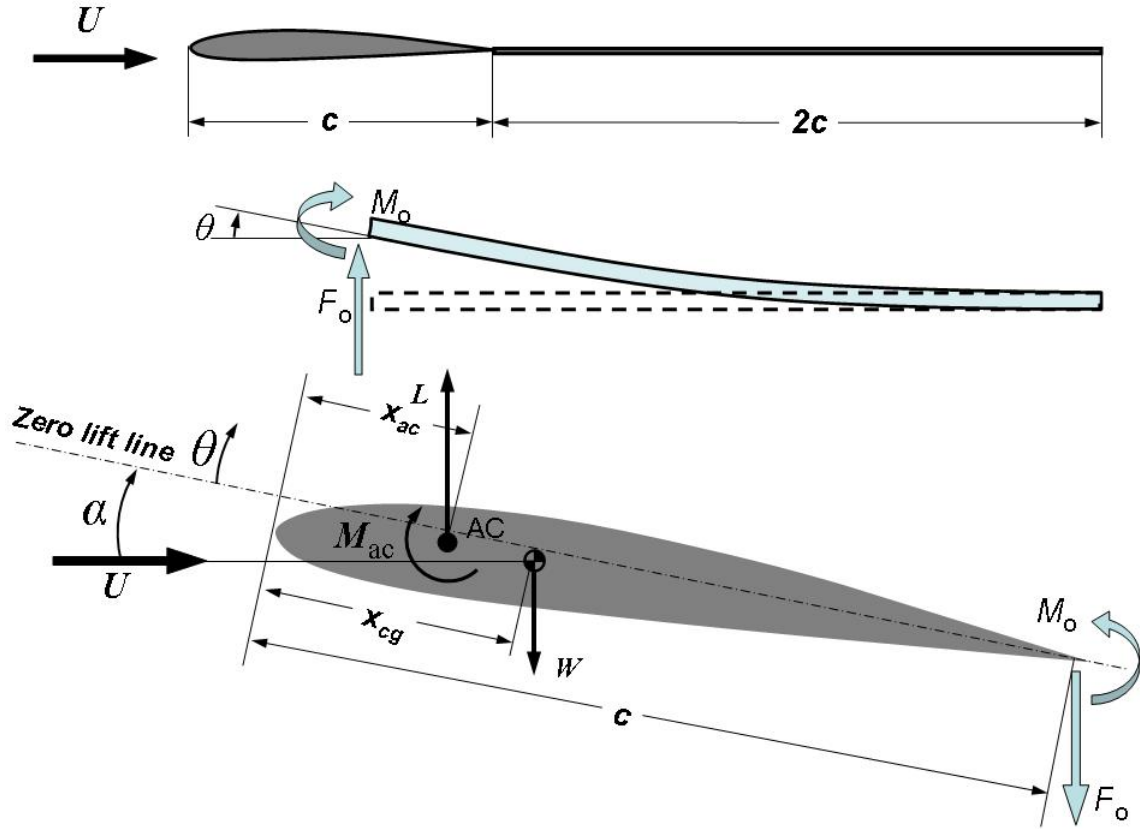


Σχήμα 2.3. Ευθεία $1/\theta$, $1/q$

Είναι προφανές από το παραπάνω σχήμα ότι η ευθεία $1/\theta$ μπορεί να βρεθεί από δυο ταχύτητες πολύ πιο μικρές από την ταχύτητα απόκλισης. Συνεπώς η ταχύτητα απόκλισης q_D σε πτήση ή στην αεροσήραγγα μπορεί να προσδιορισθεί πειραματικά από την μέτρηση αεροελαστικής απόκλισης σε μικρές ταχύτητες.

2.1.2 Μοντέλο στηριγμένο σε πρόβολο

Το μοντέλο πτέρυγας η αεροδυναμικού σώματος στηριγμένου με πρόβολο (sting) στην αεροσήραγγα φαίνεται στο Σχ. 2.4.



Σχήμα 2.4 Μοντέλο στηριγμένο σε πρόβολο

Το αεροδυναμικό σώμα ή η πτέρυγα έχει γωνία πρόσπτωσης α_r όταν η δοκός με δυσκαμπτότητα EI (bending Stiffness) και μήκους $2c$ δεν είναι παραμορφωμένη. Η γωνία πρόσπτωσης του μοντέλου μετά της παραμόρφωσης της δοκού είναι $\alpha_r + \theta$. Στο άκρο στήριξης του μοντέλου ενεργούν η δύναμη F_o και η ροπή M_o που είναι ίσες και με αντίθετο πρόσημο της ροπής και δύναμης που ενεργούν στην δοκό. Λόγω γραμμικότητας της δοκού έχουμε

$$\theta = \theta_F + \theta_M \quad (2.12)$$

όπου οι γωνίες απόκλισης θ_F και θ_M δίνονται από την θεωρία δοκού ως

$$\theta_F = F_o \frac{(2c)^2}{2EI} \quad (2.13)$$

$$\theta_M = M_o \frac{2c}{EI}$$

Δηλαδή η δύναμη και η ροπή είναι

$$F_o = \frac{EI}{2c^2} \theta_F \quad (2.14)$$

$$M_o = \frac{EI}{2c} \theta_M$$

Η άντωση και η ροπή βρίσκονται από τις Εξ. (2.3) και (2.4) και η ισορροπία των δυνάμεων και ροπών γύρω από το σημείο στήριξης είναι

$$qSC_{La} (a_r + \theta_F + \theta_M) = W - F_o \quad (2.15)$$

$$qDSC_{Mac} + qSC_{La} (a_r + \theta_F + \theta_M)(D - x_{ac})(D - x_{cg}) - M_o = 0 \quad (2.16)$$

Η λύση των παραπάνω εξισώσεων ισορροπίας ως προς $\theta = \theta_M + \theta_F$ είναι

$$\theta = \frac{a_r (2 - x_{ac}/D) + C_{Mac}/C_{La} - W/qSC_{La} (2 - x_{cg}/D)}{\frac{EI}{2qD^2C_{La}} - \left(2 - \frac{x_{ac}}{D}\right)} \quad (2.17)$$

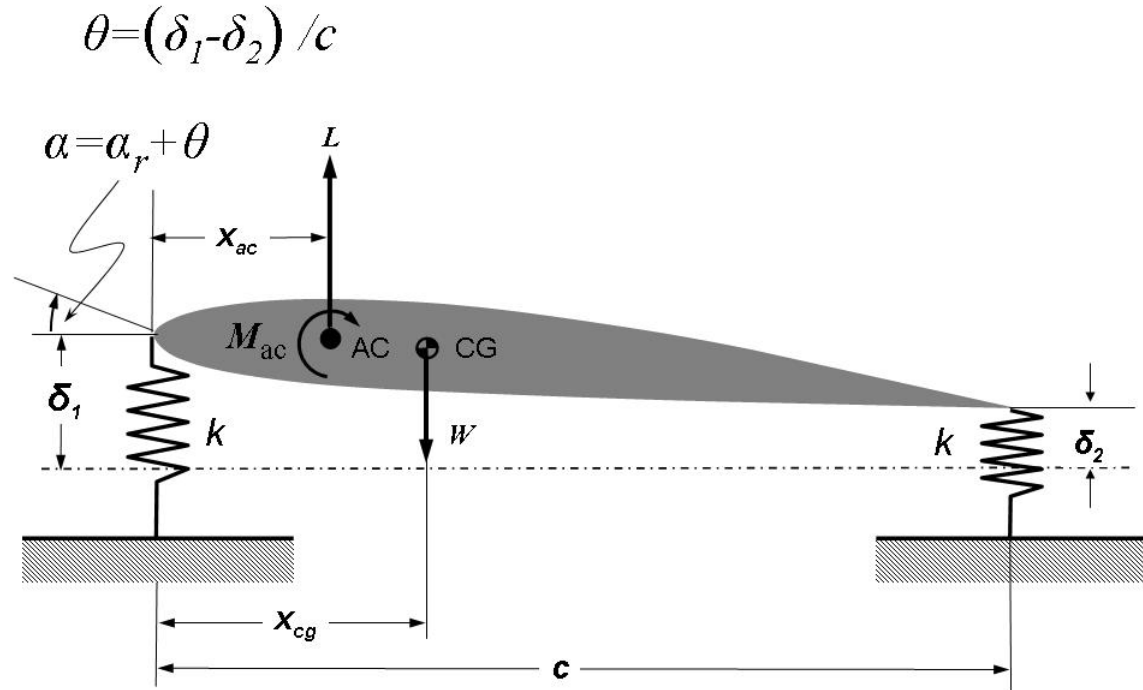
Σύμφωνα με την παραπάνω σχέση απόκλιση συμβαίνει όταν ο παρονομαστής της γωνίας απόκλισης μηδενίζεται δηλαδή όταν

$$q_{div} = \frac{EI}{2(2 - x_{ac}/D)D^2SC_{La}} \quad (2.18)$$

Στην παραπάνω σχέση $x_{ac}/D < 1$ συνεπώς η δυναμική πίεση δεν μπορεί να γίνει αρνητική ή να έχει πολύ μεγάλη τιμή. Ο μόνος τρόπος αύξησης της δυναμικής πίεσης απόκλισης είναι η χρήση στήριξης με μεγάλη αντίσταση σε κάμψη (bending stiffness)

2.1.3 Μοντέλο στήριξης με υποστηρίγματα

Το δυναμικό μοντέλο στήριξης με υποστηρίγματα δίνεται στο παρακάτω σχήμα



Σχήμα 2.5 Μοντέλο στήριξης σε υποστηρίγματα.

Υποτίθεται ότι τα δυο υποστηρίγματα έχουν την ίδια σταθερά ελατηρίου k και ότι η στήριξη γίνεται στα δυο άκρα της πτέρυγας. Η γωνία πρόσπτωσης της πτέρυγας είναι $\alpha = \alpha_r + \theta$ όπου η ελαστική γωνία πρόσπτωσης θ βρίσκεται από την παραμόρφωση των ελατηρίων από την σχέση

$$\theta = \frac{\delta_1 - \delta_2}{c}, \quad \delta_2 = \delta_1 - \theta c \quad (2.19)$$

Η ισορροπία των δυνάμεων και των ροπών στο δεξιό σημείο στήριξης δίνονται από τις σχέσεις

$$L - W - k(\delta_1 + \delta_2) = 0 \quad (2.20)$$

$$M_{ac} + L(c - x_{ac}) - W(c - x_{cg}) - kc\delta_1 = 0 \quad (2.21)$$

όπως και προηγουμένως η ροπή M_{ac} και η άντωση στις παραπάνω σχέσεις μπορούν να εκφραστούν σαν συνάρτηση του συντελεστή ροπής και άντωσης. Η λύση των Εξ. (2.20) , (2.21) ως προς την γωνία απόκλισης θ είναι

$$\theta = \frac{a_r(1 - 2x_{ac}/c) + 2C_{Mac}/C_{La} - W/qSC_{La}(1 - 2x_{cg}/c)}{\frac{kc}{qSC_{La}} - \left(1 - \frac{2x_{ac}}{c}\right)} \quad (2.22)$$

Η δυναμική πίεση απόκλισης βρίσκεται όταν ο παρονομαστής μηδενίζεται και είναι

$$q_D = \frac{kc}{SC_{La}(1 - x_{ac}/c)} \quad (2.23)$$

Είναι προφανές ότι η συνθήκη απόκλισης δεν μπορεί να αποκλεισθεί όταν η απόσταση του αεροδυναμικού κέντρου x_{ac} είναι μικρότερη από $c/2$ δηλ. $x_{ac} < c/2$.

2.1.4 Αντιστροφή του aileron σε μοντέλο στηριγμένο στο τοίχωμα

Είναι γνωστό ότι η στρεπτική παραμόρφωση της πτέρυγας επηρεάζει την λειτουργία διαφόρων επιφανειών ελέγχου όπως το aileron κατά ένα δυσμενή τρόπο. Σ' αυτό το κεφάλαιο θα εξετάσουμε την απώλεια ελέγχου η οποία τελικά οδηγεί στην αντιστροφή του αναμενόμενου αποτελέσματος της επιφάνειας ελέγχου.

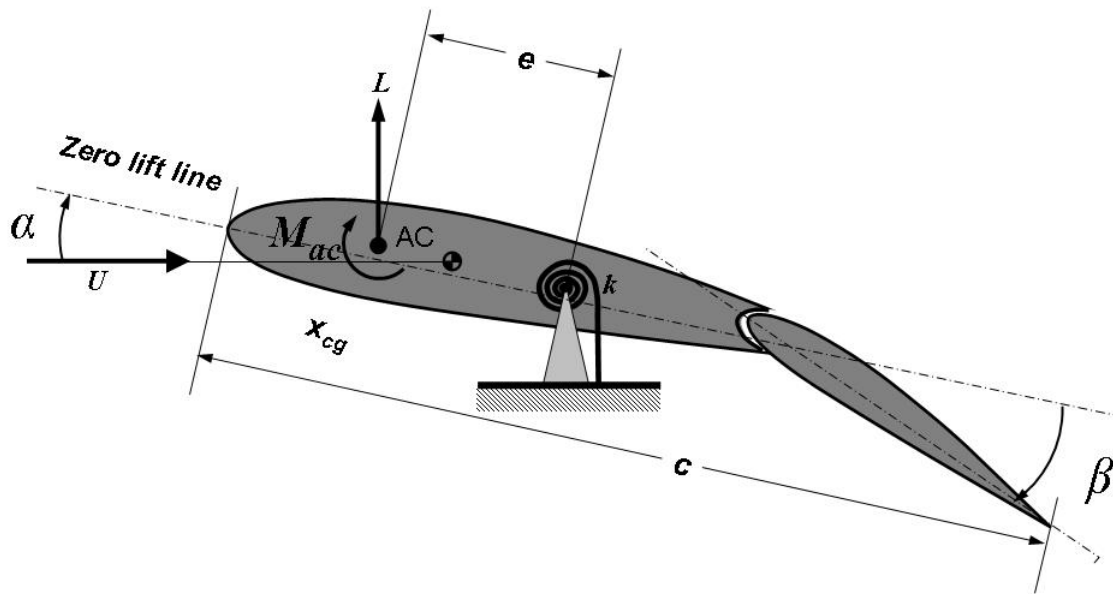
Θεωρούμε μια αεροτομή με την επιφάνεια ελέγχου που απεικονίζεται στο Σχ. 2.6. Στο μοντέλο του Σχ. 2.6, η γωνία απόκλισης, β , του ακροπτερυγίου ρυθμίζεται από το σύστημα ελέγχου.

Η ισορροπία των ροπών γύρω από το σημείο στήριξης δίνεται από την σχέση

$$M_{ac} + eL = k\theta \quad (2.24)$$

όπου η άντωση και η ροπή σύμφωνα με την γραμμική θεωρία δίνονται από τις παρακάτω σχέσεις

$$L = qSC_{L\alpha}, \quad M_{ac} = qcSC_{Mac} \quad (2.25)$$



Σχήμα 2.6 Μοντέλο στήριξης συνδυασμού πτέρυγας με ακροπτερύγιο (wing/flap configuration) σε αεροσήραγγα.

Μεταβολή της γωνίας β συνεπάγεται μεταβολή της καμπυλότητας της αεροτομής και για μικρές αποκλίσεις β έχουμε

$$C_L = C_{L\alpha} \alpha + C_{L\beta} \beta, \quad C_{M_{ac}} = C_{M_o} + C_{M\beta} \beta \quad (2.26)$$

Η αύξηση της καμπυλότητας συνεπάγεται αρνητική ροπή $C_{M\beta} < 0$. Επί πλέον, χάριν απλοποίησης των υπολογισμών θεωρούμε συμμετρική πτέρυγα, οπότε $C_{M_o} = 0$. Από τις εξισώσεις ισορροπίας για τις ροπές και τις δυνάμεις βρίσκουμε ότι η γωνία απόκλισης είναι

$$\theta = \frac{qS \left[eC_{L_a} a_r + (eC_{L_\beta} + cC_{M_\beta}) \beta \right]}{k - eqSC_{L_a}} \quad (2.27)$$

ενώ η συνολική άντωση δίνεται από την σχέση

$$L = \frac{qS \left[C_{L_a} \alpha_r + C_{L_\beta} \left(1 + \frac{cqSC_{L_a} C_{M_\beta}}{kC_{L_\beta}} \right) \beta \right]}{1 + \frac{eqSC_{L_a}}{k}} \quad (2.28)$$

Ο όρος $C_{L_\beta} \left[1 + (cqS_{L_a} C_{M_\beta} / kC_{L_\beta}) \right]$ στον αριθμητή της παραπάνω σχέσης περιλαμβάνει δυο συνεισφορές που έχουν το αντίθετο αποτέλεσμα. Η πρώτη συνεισφορά, C_{L_β} , έχει αεροδυναμική προέλευση και σημαίνει ότι αύξηση της γωνίας β συνεπάγεται αύξηση της άντωσης. Η δεύτερη συνεισφορά, $cqS_{L_a} C_{M_\beta} / kC_{L_\beta}$, οφείλεται όμως σε αεροελαστική σύζευξη και επειδή ο συντελεστής ροπής είναι αρνητικός, $C_{M_\beta} < 0$, η αύξηση της γωνίας β προκαλεί μείωση της άντωσης και της γωνίας θ .

Σε χαμηλές ταχύτητες η αύξηση της γωνίας β συνεπάγεται μεγάλη αύξηση της άντωσης και η αεροδυναμική άντωση επισκιάζει την μείωση που προέρχεται από αεροελαστική σύζευξη. Η αύξηση όμως της δυναμικής πίεσης, ενισχύει την αεροελαστική σύζευξη και σε κάποιο σημείο ο περαιτέρω ρυθμός αύξησης της άντωσης λόγω αύξησης της γωνία β δεν είναι δυνατός δηλαδή

$$\frac{\partial L}{\partial \beta} = 0 \Rightarrow \frac{qSC_{L_\beta} \left(1 + \frac{cqSC_{L_a} C_{M_\beta}}{kC_{L_\beta}} \right)}{1 - \frac{eqSC_{L_a}}{k}} = 0 \quad (2.29)$$

Από την παραπάνω σχέση μπορούμε να υπολογίσουμε την δυναμική πίεση πέραν της οποίας έχουμε μείωση της άντωσης με περαιτέρω αύξηση της γωνίας απόκλισης β . Η τιμή αυτή της δυναμικής πίεσης ονομάζεται *δυναμική πίεση αναστροφής* και δίνεται από την σχέση

$$q_R = -\frac{kC_{L\beta}}{cSC_{L\alpha}C_{M\beta}} \quad (2.30)$$

όπου q_R είναι θετική ποσότητα διότι $C_{M\beta} < 0$. Προφανώς, ο μόνος τρόπος αποφυγής της αντιστροφής είναι η χρήση πτερύγων με μεγάλη στρεπτική δυσκαμπτότητα k . Για δυναμική πίεση μεγαλύτερη από την δυναμική πίεση αναστροφής, q_R , κάθε αύξηση της γωνίας $\beta > \beta_R$ πέραν της κρίσιμης τιμής, β_R , προκαλεί μείωση της άντωσης.

Η συνθήκη απόκλισης του συνδυασμού πτέρυγας/επιφάνειας ελέγχου είναι ο μηδενισμός του παρονομαστή στην Εξ. (2.28) που μας δίνει την άντωση, δηλαδή

$$q_D = \frac{k}{eSC_{L\alpha}} \quad (2.31)$$

Η σχέση για την άντωση, Εξ. (2.27), μπορεί να εκφραστεί σαν συνάρτηση των δυναμικών πιέσεων αντιστροφής q_R και απόκλισης q_D ως ακολούθως

$$L = \frac{qS [C_{L\alpha} a_r + C_{L\beta} (1 - q/q_R) \beta]}{1 - q/q_D} \quad (2.32)$$

Στην παραπάνω σχέση ο συντελεστής της γωνίας β , $(1 - q/q_R)$, μπορεί να είναι θετικός, αρνητικός, ή μηδέν. Δηλαδή, για θετική γωνία β μπορεί να έχουμε αύξηση, μείωση, ή και καμία μεταβολή της άντωσης.

Η αποδοτικότητα, της επιφάνειας ελέγχου, η_e , μπορεί να ορισθεί και ο λόγος της πραγματικής μεταβολής άντωσης ανά μονάδα μεταβολής της γωνίας β ως προς την μεταβολή της άντωσης ανά μονάδα μεταβολής β που αντιστοιχεί σε απόλυτα σταθερή πτέρυγα με μηδενική στρέψη.

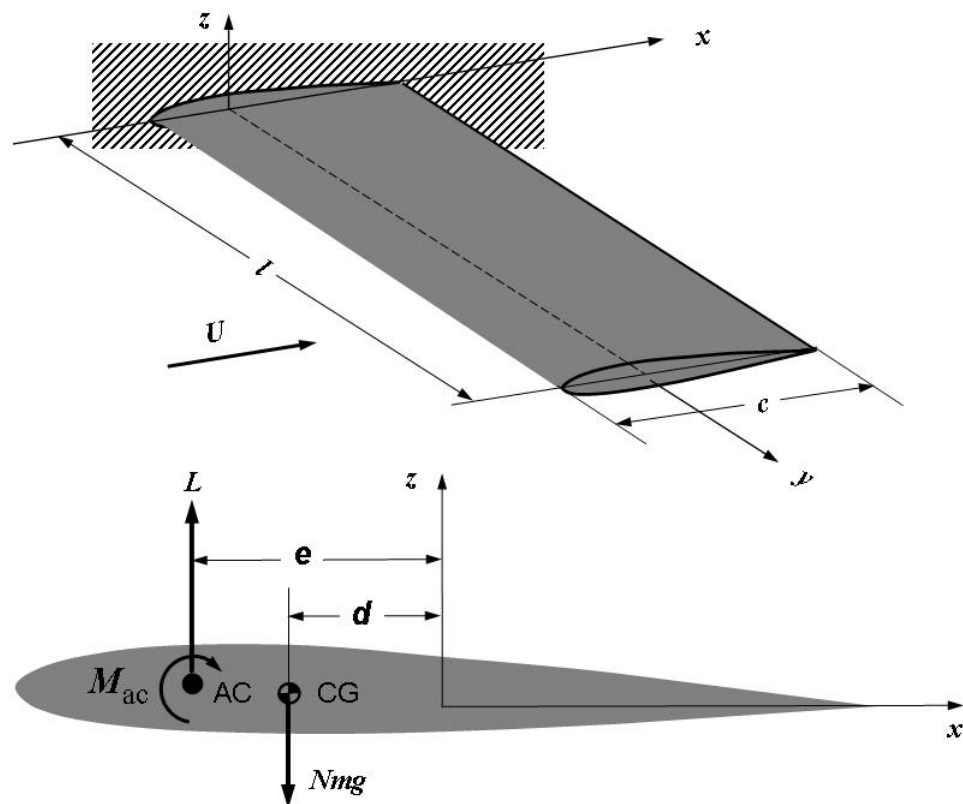
$$\eta_e = \frac{(\text{μεταβολή } L / \text{μονάδα μεταβολής } \beta)_{\text{ελαστική πτέρυγα}}}{(\text{μεταβολή } L / \text{μονάδα μεταβολής } \beta)_{\text{μη-ελαστική πτέρυγα}}} = \frac{1 - q/q_R}{1 - q/q_D} \quad (2.33)$$

Για μη ελαστική πτέρυγα $q_D \rightarrow \infty$ και $q_R \rightarrow \infty$ και $n = 1$. Σύμφωνα με την Εξ. (2.33) ο συνδυασμός πτέρυγας επιφάνειας ελέγχου δεν παρουσιάζει απόκλιση όταν $q < q_D \leq q_R$.

2.2 Ελαστικές Αεροδυναμικές Επιφάνειες

Στα προηγούμενα κεφάλαια ασχοληθήκαμε με μη ελαστικές πτέρυγες που στηρίζονται στην αεροσήραγγα διαμέσου ελαστικών συνδέσμων. Στις πρακτικές εφαρμογές όμως η ελαστικότητα της πτέρυγας δεν μπορεί να αγνοηθεί. Το κεφάλαιο αυτό διαπραγματεύεται την απομάκρυνση απλών γεωμετρικά ελαστικών πτερυγών σε αεροελαστική ευστάθεια.

Θεωρούμε την ανομοιόμορφη, χωρίς κλίση (upswept), ελαστική αεροδυναμική επιφάνεια του παρακάτω σχήματος



Σχήμα 2.7 Μοντέλο ομοιόμορφης πτέρυγας με στήριξη πάκτωσης στο ένα της άκρο.

Η αεροδυναμική επιφάνεια μοντελοποιείται ως μια δοκός πακτωμένη στο ένα άκρο της, $y=0$, πάνω στην άτρακτο του αεροσκάφους, ενώ το ακροπτερύγιο (wing tip) που βρίσκεται στην θέση $y=l$ είναι ελεύθερο. Υποτίθεται ότι ο άξονας y είναι και ο ελαστικός άξονας της πτέρυγας και ταυτόχρονα ο άξονας περιστροφής.

2.2.1 Εξισώσεις ισορροπίας

Η ολική ροπή ανά μονάδα πλάτους γύρω από τον άξονα y είναι

$$M' = M'_{ac} - eL' - N m g d \quad (2.34)$$

όπου $M'(y) > 0$ σημαίνει στροφή του προσθίου άκρου προς τα άνω (leading-edge up), και N είναι ο παράγοντας φόρτισης

$$N = \frac{L}{W} = 1 + \frac{A_z}{g} \quad (2.35)$$

όπου A_z είναι η g συνιστώσα της επιτάχυνσης W είναι το βάρος του αεροσκάφους και L είναι η συνολική άντωση. Επί πλέον τα κατανεμημένα αεροδυναμικά φορτία γράφονται υπό μορφή συντελεστών ως

$$L' = qCC_l \quad (2.36)$$

$$M'_{ac} = qc^2 c_{m_{ac}}$$

όπου και πάλι q συμβολίζει την δυναμική πίεση του αδιατάρακτου ρεύματος (free stream dynamic pressure)

$$q = \frac{1}{2} \rho_\infty U^2 \quad (2.37)$$

Από την θεωρία δικού σε στρέψη γνωρίζουμε ότι η ροπή στρέψης, T , και η γωνία στρέψης, θ , συνδέονται με την σχέση

$$T = GJ \frac{d\theta}{dy} \quad (2.28)$$

όπου GJ είναι η δυσκαμπτότητα στρέψης (torsional stiffness). Η εξίσωση ισορροπίας είναι

$$\frac{dT}{dy} = \frac{d}{dy} \left(GJ \frac{d\theta}{dy} \right) = -M' \quad (2.39)$$

Από τις παραπάνω σχέσεις βρίσκουμε

$$GJ \frac{d^2\theta}{dy^2} = -qc^2 c_{mac} - eqcc_e + N m g d \quad (2.40)$$

Εφαρμόζεται η απλουστευτική παραδοχή ότι στα τμήματα της πτέρυγας κατά μήκος του άξονα y η τοπική άντωση βρίσκεται με εφαρμογή της δυσδιάστατης θεωρίας ως $c_e = c_e(a)$ όπου a είναι η τοπική γωνία προσβολής.

$$c_l(a) = \frac{dc_l}{da} a(y) = a a(y) \quad (2.41)$$

Όπως και προηγουμένως η γωνία προσβολής, a , αποτελείται από την γεωμετρική γωνία προσβολής a_r και την περιστροφή λόγω στρέψης

$$a(y) = a_r + \theta(y) \quad (2.42)$$

Δηλαδή η άντωση σε κάθε λωρίδα (strip) δίνεται από

$$c_l(y) = a [a_r + \theta(y)] \quad (2.43)$$

και η εξίσωση ισορροπίας γίνεται

$$\frac{d^2\theta}{dy^2} + \frac{qcae}{GJ} \theta = \frac{1}{GJ} (qc^2 c_{mac} + qcaea_r - Nmgd) \quad (2.44)$$

και υπόκειται στις παρακάτω οριακές συνθήκες

$$y = 0 \quad \theta = 0 \quad (2.45)$$

$$y = l \quad \frac{d\theta}{dy} = 0$$

που αντιστοιχούν σε πτέρυγα που έχει πακτωμένο ελεύθερο άκρο.

2.2.2 Απόκλιση σε στρέψη

Η εξίσωση ισορροπίας είναι

$$\frac{d^2\theta}{dy^2} + \Lambda^2\theta = -\Lambda^2(a_r + A_r) \quad (2.46)$$

όπου έγιναν οι αντικαταστάσεις

$$\Lambda^2 = \frac{qcae}{GJ} \quad \text{και} \quad A_r = \frac{cc_{mac}}{ae} - \frac{Nmgd}{qcde}$$

Η γενική λύση της Εξ. (2.46) είναι

$$\theta = A \sin(\Lambda y) + B \cos(\Lambda y) - (a_r + A_r) \quad (2.47)$$

με εφαρμογή των οριακών συνθηκών βρίσκουμε

$$\theta(0) = 0 \Rightarrow B = a_r + A_r \quad (2.48)$$

$$\theta'(l) = 0 \Rightarrow A = B \tan(\Lambda l)$$

Συνεπώς η κατανομή της γωνίας στρέψης είναι

$$\theta = (a_r + A_r) [\tan(\Lambda l) \sin(\Lambda y) + \cos(\Lambda y) - 1] \quad (2.49)$$

Η κατανομή της άντωσης για την παραπάνω γωνία στρέψης δίνεται από

$$L' = qca(a_r + \theta) \quad (2.50)$$

Από την Εξ. (2.49) είναι φανερό ότι $\theta \rightarrow \infty$ καθώς $\Lambda l \rightarrow \pi/2$. Δηλαδή απόκλιση σε στρέψη εξαρτάται από την τιμή της μεταβλητής.

$$\Lambda = \sqrt{\frac{qcae}{GJ}} \quad (2.51)$$

Η τιμή της δυναμικής πίεσης q_D για την οποία $\Lambda l = \pi/2$ ονομάζεται δυναμική πίεση απόκλισης και αποτελεί ένα όριο το οποίο δεν πρέπει να

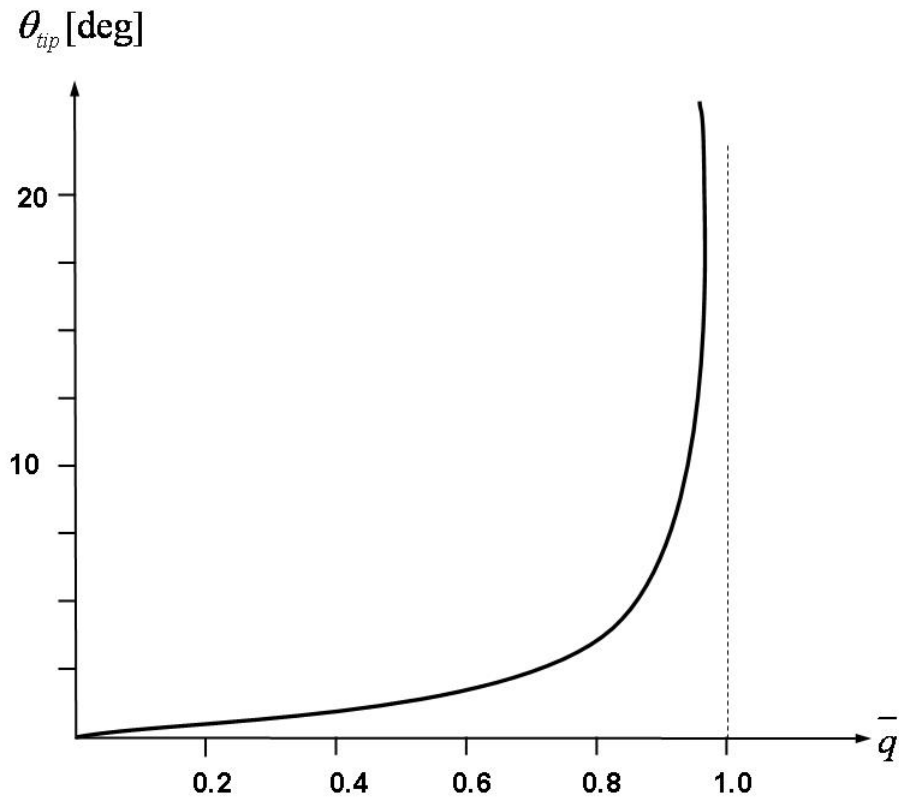
υπερβούμε διότι οδηγεί σε καταστροφική στατική αστάθεια της πτέρυγας. Η δυναμική πίεση απόκλισης είναι

$$q_D = \frac{GJ}{eca} \left(\frac{\Pi}{2R} \right)^2 \quad (2.52)$$

Και η γωνία περιστροφής θ στο ακροπτερύγιο γράφεται ως

$$\begin{aligned} \theta(l) &= (a_r + Ar) [\sec(\Lambda l - 1)] \\ &= (a_r + A_r) \left[\sec\left(\pi\sqrt{\bar{q}}/2 - 1\right) \right] \end{aligned} \quad (2.53)$$

όπου $\bar{q} = q/q_D$



Σχήμα 2.8 Γωνία στρέψης με την μεταβολή του \bar{q} για $\alpha_r + \bar{\alpha}_r = 1^\circ$.

3. Δυναμική Αεροελαστικότητα

Στο προηγούμενο κεφάλαιο διαπραγματευτήκαμε προβλήματα στατικής αεροελαστικής σύζευξης ενώ το κεφάλαιο αυτό εξετάζεται η δυναμική αεροελαστική σύζευξη. Αρχικά θα εξετάσουμε μια βασική αεροελαστική αστάθεια τον πτερυγισμό (flutter). Πτερυγισμός είναι μια δυναμική αστάθεια των αεροχημάτων που σχετίζεται με την αλληλεπίδραση των αεροδυναμικών, ελαστικών και αδρανειακών φορτίσεων. Από τον ορισμό αυτό είναι φανερό ότι η διερεύνηση της αστάθειας πτερυγισμού απαιτεί επαρκή γνώση των δυναμικών και αεροδυναμικών χαρακτηριστικών του αεροχήματος. Αεροελαστικός πτερυγισμός μπορεί να συμβεί σε διάφορα μέρη του αεροσκάφους αλλά απαντάται πιο συχνά στις αεροδυναμικές επιφάνειες όπως οι πτέρυγες και μπορεί να οδηγήσει σε καταστροφική δομική αστοχία. Είναι λοιπόν αναγκαίο να γίνεται ανάλυση και δοκιμή των πτερυγίων για να βεβαιωθεί ότι η δυναμική αστάθεια δεν είναι πιθανή για καμιά προκαθορισμένη πτητική κατάσταση. Σε πολλές περιπτώσεις η ροή είναι αποκολλημένη κατά την διάρκεια της ταλάντωσης πτερυγισμού (stall flutter) και η ανάλυση είναι δυνατή μόνο με τις μη-γραμμικές εξισώσεις ροής. Το φαινόμενο πτερυγισμού λόγω αποκολλημένη ροή απαντάται συχνά σε στροβιλοκινητήρες και στροφέια ελικοπτέρων και ανεμογεννητριών. Στο κεφάλαιο αυτό θα ασχοληθούμε μόνο με φαινόμενα πτερυγισμού που είναι δυνατόν να περιγραφούν με γραμμικές εξισώσεις, αλλά και η γραμμική ανάλυση πτερυγισμού δεν είναι τόσο απλή.

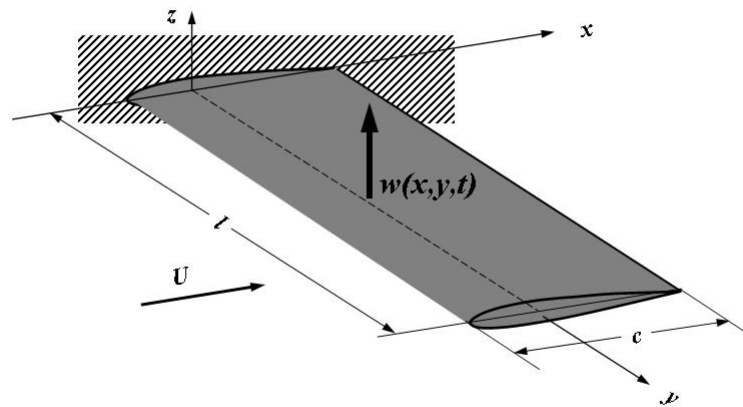
Η εισαγωγή στην δυναμική αεροελαστικότητα πραγματοποιείται με την αναπαράσταση του αεροελαστικού μοντέλου με ιδιομορφές και με μαθηματική περιγραφή που συνίσταται από ένα σύστημα συνήθων διαφορικών εξισώσεων. Η ανάλυση πτερυγισμού που παρουσιάζεται με την χρήση δυο αεροδυναμικών θεωριών η πρώτη είναι η κλασική ανάλυση πτερυγισμού που στοχεύει στον προσδιορισμό των ορίων πτήσης και των σχετικών παραγώνων ευστάθειας η δε δεύτερη στοχεύει στην ανάλυση πτερυγισμού με χρήση ιδιοτιμών.

3.1 Χαρακτηριστικά Ευστάθειας

Οι αεροδυναμικές επιφάνειες που θεωρούνται στην ανάλυση ευστάθειας είναι πτέρυγες με ή χωρίς επιφάνειες ελέγχου (όπως ailerons και elevators). Η ανάλυση ευστάθειας των πτερυγίων της ουράς και της κάθετης ουράς είναι πιο απλή συγκρινόμενη με την ανάλυση ευστάθειας των κυρίων πτερυγίων που περιλαμβάνουν εσωτερικές δεξαμενές καυσίμου,

μηχανισμούς προσγείωσης και μηχανές με τα υποστηρίγματα. Η ανάλυση ευστάθειας με την οποία θα ασχοληθούμε παρακάτω περιορίζεται σε πτέρυγες χωρίς επιφάνειες ελέγχου και άλλα φορτία. Επί πλέον υποτίθεται ότι οι παραμορφώσεις είναι μικρές και η ροή είναι προσκολλημένη έτσι ώστε η δυναμική συμπεριφορά της πτέρυγας περιγράφεται από ένα γραμμικό σύστημα εξισώσεων που περιλαμβάνουν γραμμικές συναρτήσεις των χρονομεταβλητών αεροδυναμικών φορτίων ως προς τις παραμορφώσεις.

Η ροή του αέρα γύρω από μια πτέρυγα δημιουργεί άντωση οπισθέλκουσα και ροπή περιστροφής που δεν είναι ανεξάρτητη του χρόνου αλλά έχει μικρές αποκλίσεις που οφείλονται στην στρέψη και κάμψη της πτέρυγας. Για ταχύτητες που είναι μικρότερες ενός ορίου που όπως θα ορισθεί παρακάτω είναι η ταχύτητα πτερυγισμού (flutter speed) η ταλάντωση που προκύπτει από τις διαταραχές των αεροδυναμικών φορτίων είναι φθίνουσα και το εύρος της μειώνεται γρήγορα. Στην περίπτωση αυτή θεωρούμε ότι η ροή του αέρα ενεργεί ως αποσβεστήρας της ταλάντωσης. Αντίθετα για ταχύτητες που είναι μεγαλύτερες από την ταχύτητα πτερυγισμού η ροή του αέρα παρέχει επί πλέον ενέργεια και αυξάνει το εύρος των ταλαντώσεων.



Σχ. 2.8 Μοντέλο πτέρυγας ως πλάκα με φόρτιση

Υποθέτουμε ότι η δυναμική συμπεριφορά του αεροσκάφους μπορεί να αναπαρασταθεί επαρκώς με τις ιδιομορφές. Στα προηγούμενα κεφάλαια

θεωρήσαμε ότι η πτέρυγα είναι μια δοκός. Η ανάλυση ευστάθειας γίνεται με την χρήση της παραδοχής ότι η πτέρυγα είναι μια πλάκα με παραμορφώσεις $w(x, y, t)$ στην κατεύθυνση z που είναι κάθετη στο επίπεδο xy που αντιστοιχεί στην πτέρυγα.

Η αναπαράσταση της πτέρυγας με μια πλάκα αποτελεί πιο ρεαλιστική παραδοχή ιδιαίτερα για τις πτέρυγες μικρού εύρους $s=l/c=0$ (1) δηλ. $s=6, 8$ κλπ. Οι ιδιομορφές της πλάκας συμβολίζονται $\varphi_i(x, y)$ ενώ ω_i είναι οι αντίστοιχες ιδιοσυχνότητες. Με τις παραπάνω παραδοχές η μετατόπιση της κατασκευής είναι

$$w(x, y, t) = \sum_{i=0}^n \xi_i(t) \varphi_i(x, y) \quad (3.1)$$

όπου, όπως αναφέρεται στο Παράρτημα Α, $\xi_i(t)$ είναι η γενικευμένη συντεταγμένη της i ιδιομορφής. Στην Εξ. (3.1) η άθροιση αρχίζει από $i=0$ και περιλαμβάνει και τους βαθμούς ελευθερίας που αντιστοιχούν στο απόλυτο στερεό σώμα.

Οι γενικευμένες εξισώσεις κίνησης (δες επίσης Παράρτημα Α) της πτέρυγας προκύπτουν από τις εξισώσεις *Lagrange*

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\xi}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial \xi_i} = \Xi_i \quad i = 0, 1, 2, \dots$$

που για μετατοπίσεις που εκφράζονται από την Εξ. (3.1) είναι

$$M_i (\ddot{\xi}_i + \omega_i^2 \xi_i) = \Xi_i \quad i = 0, 1, \dots \quad (3.2)$$

όπου M_i είναι η γενικευμένη μάζα που προκύπτει από την κατανομή μάζας $m(x, y)$ ανά μονάδα επιφανείας και είναι

$$M_i = \int_0^c \int_0^l m(x, y) \varphi_i^2(x, y) dx dy \quad (3.3)$$

Η γενικευμένη δύναμη Ξ_i στην Εξ. (3.2) υπολογίζεται από τα επιβεβλημένα εξωτερικά φορτία $F(x, y, t)$ από την σχέση

$$\Xi_i = \int_0^c \int_0^l F(x, y, t) \varphi_i(x, y) dx dy \quad (3.4)$$

Για την μελέτη ευστάθειας της πτέρυγας τα μόνα εξωτερικά φορτία που θεωρούνται είναι οι αεροδυναμικές φορτίσεις, που σύμφωνα με την υπόθεση της γραμμικής εξάρτησης είναι γραμμικές συναρτήσεις της μετατόπισης $w(x, y, t)$ και των χρονικών της παραγώγων. Λόγω της υπόθεσης γραμμικής εξάρτησης και η επαγομένη μεταβολή πίεσης Δp στην πτέρυγα εκφράζεται σαν γραμμική συνάρτηση των γενικευμένων συντεταγμένων ξ_i και των παραγώγων της.

$$\Delta p(x, y, t) = \sum_{i=0}^n \{a_i(x, y) \xi_i(t) + b_i(x, y) \dot{\xi}_i(t) + c_i(x, y) \ddot{\xi}_i(t)\} \quad (3.5)$$

Χρησιμοποιώντας την επαγόμενη μεταβολή πίεσης αντί της εξωτερικής φόρτισης στην Εξ. (3.4) η γενικευμένη δύναμη εκφράζεται ως

$$\begin{aligned} \Xi_i(t) &= \int_0^c \int_0^l \Delta p(x, y, t) \varphi_i(x, y) dx dy \\ &= \sum_{j=0}^n \zeta_j(t) \int_0^c \int_0^l a_j(x, y) \varphi_i(x, y) dx dy \\ &\quad + \sum_{j=0}^n \dot{\xi}_j(t) \int_0^c \int_0^l d_j(x, y) \varphi_i(x, y) dx dy \\ &\quad + \sum_{j=0}^n \ddot{\xi}_j(t) \int_0^c \int_0^l c_j(x, y) \varphi_i(x, y) dx dy = \rho_\infty \sum_{j=0}^n \left(A_{ij} \xi_j + \frac{b}{u} B_{ij} \dot{\xi}_j + \frac{b^2}{u^2} C_{ij} \ddot{\xi}_j \right) \end{aligned} \quad (3.6)$$

όπου $b = c/2$ και A_{ij}, B_{ij}, C_{ij} είναι τα στοιχεία των μητρώων $[A], [B], [C]$ που έχουν τις ίδιες διαστάσεις. Με την παραπάνω μορφή των γενικευμένων δυνάμεων οι γενικευμένες εξισώσεις κίνησης είναι

$$M_i \ddot{\xi}_i - \rho_\infty \frac{b^2}{u^2} \sum_{j=0}^n C_{ij} \ddot{\xi}_j - \rho_\infty \frac{b}{u} \sum_{j=0}^n B_{ij} \dot{\xi}_j - \rho_\infty \sum_{j=0}^n A_{ij} \xi_j + M_i \omega_i^2 \xi_i = 0 \quad (3.7)$$

Η λύση του παραπάνω ομοιογενούς συστήματος συνήθων διαφορικών εξισώσεων είναι της μορφής

$$\xi_i(t) = \bar{\xi}_i e^{\nu t} \quad (3.8)$$

όπου το εύρος $\bar{\xi}_i$ υπολογίζεται από την λύση του παρακάτω συστήματος γραμμικών αλγεβρικών εξισώσεων.

$$M_i(\nu^2 + \omega_i^2) \bar{\xi}_i - \rho_\infty \sum_{j=0}^n \left\{ \frac{b^2 \nu^2}{u^2} C_{ij} + \frac{b\nu}{u} B_{ij} + A_{ij} \right\} \bar{\xi}_j = 0 \quad (3.9)$$

Η ορίζουσα των συντελεστών του παραπάνω συστήματος πρέπει να είναι μηδέν για να υπάρχει λύση. Η ορίζουσα είναι ένα πολυώνυμο $2(n+1)$ βαθμού ως προς ν , που έχει ρίζες $(n+1)$ συζυγείς μιγαδικούς που είναι της μορφής

$$\nu_k = \Gamma_k \pm i \Omega_k \quad k = 0, 1, \dots, n \quad (3.10)$$

Δηλαδή η μετατόπιση είναι

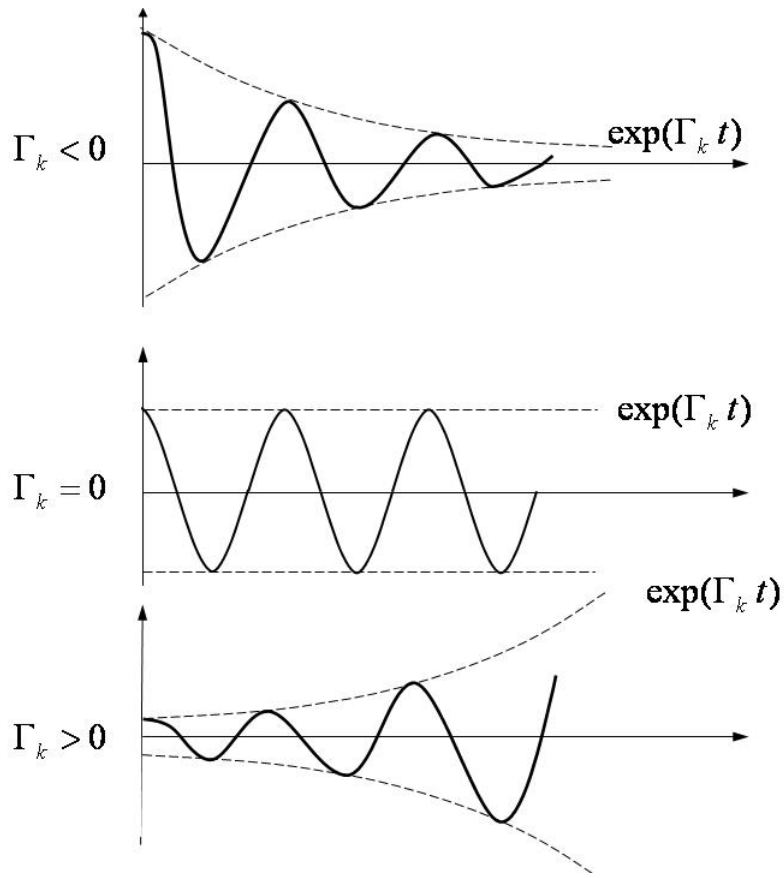
$$w(x, y, t) = \sum_{k=0}^n \left\{ w_k(x, y) e^{(\Gamma_k + i\Omega_k)t} + w_k^*(x, y) e^{(\Gamma_k - i\Omega_k)t} \right\} \quad (3.11)$$

όπου $w_k^*(x, y)$ είναι ο συζυγής μιγαδικός του $w_k(x, y)$. Δηλαδή $w(x, y, t)$ είναι πραγματικός αριθμός και κάθε εύρος μετατόπισης $w_k(x, y)$ εκφράζεται μονοσήμαντα σαν ένα γραμμικός συνδυασμός ιδιοσχημάτων της μορφής

$$w_k(x, y) = \sum_{i=0}^n \bar{\xi}_i^{(k)} \varphi_i(x, y) \quad k = 0, 1, \dots, n \quad (3.12)$$

όπου το εύρος $\bar{\xi}_i^{(k)}$ προσδιορίζονται από τις αρχικές συνθήκες.

Η k συνιστώσα της γενικής λύσης που δίνεται από την Εξ.(3.11) είναι μια απλή αρμονική ταλάντωση πολλαπλασιασμένη με ένα εκθετικό και η μορφή της εξαρτάται από την τιμή του Γ_k στο εκθετικό όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα για $\Omega_k = 0$



Σχ. 2.10 Συμπεριφορά τυπικών ιδοσχημάτων όταν $\Omega_k \neq 0$

Η μορφή ταλάντωσης για $\Gamma_k < 0$ είναι δυναμικά ευσταθής και οι αποκλίνουσες ταλαντώσεις για $\Gamma_k > 0$ είναι δυναμικά ασταθείς ενώ η περίπτωση $\Gamma_k = 0$ είναι το όριο μεταξύ ευσταθών και ασταθών ταλαντώσεων. Η δυναμικά ασταθής ταλάντωση ονομάζεται πτερυγισμός και το όριο που αντιστοιχεί στις απλές αρμονικές ταλαντώσεις ονομάζεται όριο πτερυγισμού της πτέρυγας.

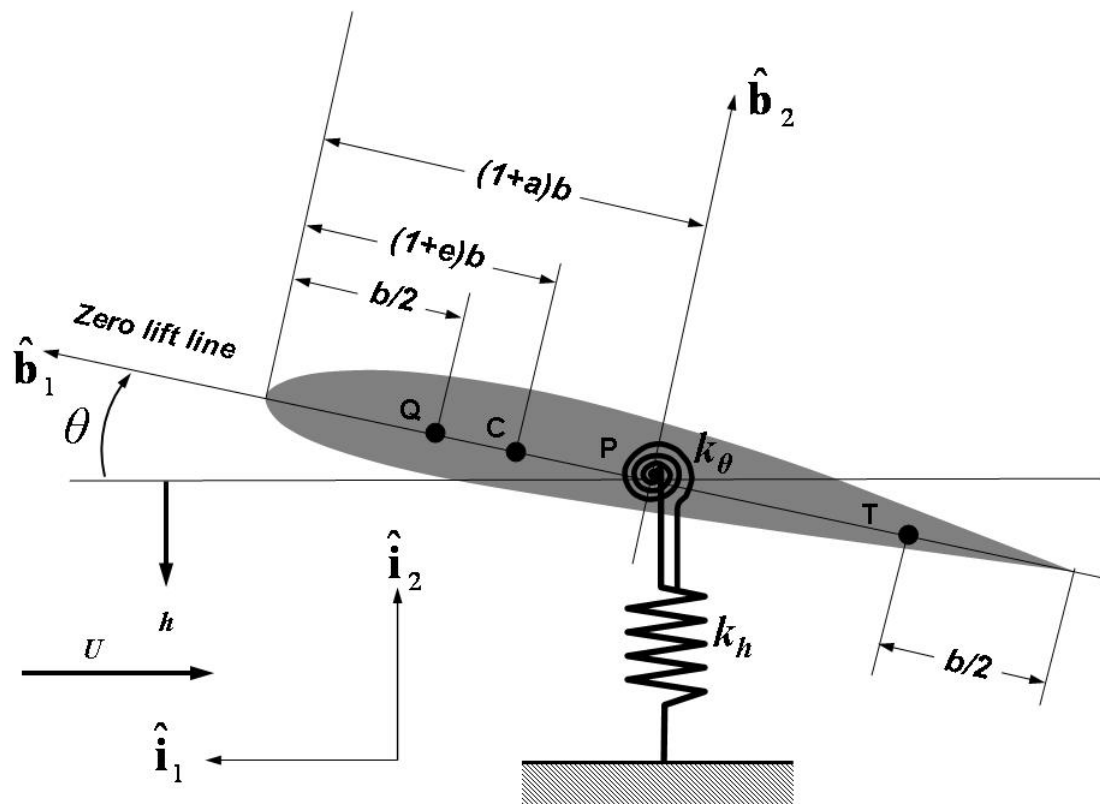
Οι δυνατοί συνδυασμοί ταλάντωσης για διάφορους συνδυασμούς τιμών Γ_k και Ω_k και τα αντίστοιχα χαρακτηριστικά ευσταθείς δίνονται στον παρακάτω πίνακα.

Γ_k	Ω_k	Τύπος κίνησης	Χαρακτήρας
< 0	$= 0$	Συνεχής σύγκλιση	Ευστάθεια
< 0	$\neq 0$	Συγκλίνουσες ταλαντώσεις	Ευσταθής
$= 0$	$= 0$	Ανεξάρτητη του χρόνου	Όριο ευστάθειας
$= 0$	$\neq 0$	Αρμονική	Όριο ευστάθειας
> 0	$\neq 0$	Αποκλίνουσες ταλαντώσεις	Αστάθεια
> 0	$= 0$	Συνεχής απόκλιση	Αστάθεια

Η μέθοδος ανάλυσης ευστάθειας που περιγράψαμε αναφέρεται συχνά ως p μέθοδος ανάλυσης ευστάθειας διότι βασίζεται στην ιδιοτιμή $p = bv/u$ που εμφανίζεται στην Εξ. (3.9). Η εφαρμογή της p - μεθόδου απαιτεί ακριβή γνώση των αεροδυναμικών φορτίων που επάγονται στην αεροδυναμική επιφάνεια από την ασταθή ροή. Στα παρακάτω κεφάλαια παρουσιάζονται απλές εφαρμογές της p μεθόδου

3.2. Αεροελαστική ανάλυση λεπτής αεροτομής

Στο κεφάλαιο αυτό εφαρμόζεται η p μέθοδος στην ανάλυση πτερυγισμού γραμμικού αεροελαστικού συστήματος λεπτής, μη ελαστικής αεροτομής που στηρίζεται με στρεπτικό και διαμήκες ελατήριο όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



Σχ. 2.11 Σχηματική αναπαράσταση πτέρυγας με ελεύθερη κίνηση σε στρέψη και κάμψη.

Η στήριξη της μη-ελαστικής αεροτομής του παραπάνω σχήματος αποτελεί μοντέλο πτέρυγας σε αεροσήραγγα η πτέρυγα με βαθμούς ελευθερίας σε

στρέψη και κάμψη. Τα σημεία P, C, Q και T είναι : P σημείο μέτρης εύρους μετατόπισης h κάθετα προς το διάνυσμα ταχύτητας U, C κέντρο μάζας, Q αεροδυναμικό κέντρο που στην θεωρία λεπτής αεροτομής είναι στο 1/4 της χορδής, και T το σημείο σε απόσταση 3/4 χορδής.

Οι εξισώσεις κίνησης του μοντέλου καταστρώνονται συστηματικά με την χρήση των εξισώσεων Lagrange. Αρχικά υπολογίζονται η κινητική και η δυναμική ενέργεια του συστήματος καθώς και οι γενικευμένες δυνάμεις που προκύπτουν από τα αεροδυναμικά φορτία. Η δυναμική ενέργεια είναι

$$P = \frac{1}{2} k_h h^2 + \frac{1}{2} k_\theta \theta^2 \quad (3.13)$$

Ο υπολογισμός της κινητικής ενέργειας απαιτεί την εύρεση της ταχύτητας του κέντρου μάζας C που είναι

$$\vec{V}_c = \vec{V}_p + \dot{\theta} \vec{b}_3 \times b \{ (1+a) - (1-e) \} \vec{b}_1 \quad (3.14)$$

όπου η ταχύτητα \vec{V}_p είναι

$$\vec{V}_p = -\dot{h} \vec{i}_2 \quad (3.15)$$

δηλαδή

$$\vec{V}_c = -\dot{h} \vec{i}_2 + b \dot{\theta} (a-e) \vec{b}_2 \quad (3.16)$$

και η κινητική ενέργεια είναι

$$K = \frac{1}{2} m \vec{v}_c \cdot \vec{v}_c + \frac{1}{2} I_c \dot{\theta}^2 \quad (3.17)$$

όπου I_c είναι η ροπή αδράνειας γύρω από το σημείο C. Από τις σχέσεις στροφής συστήματος αξόνων $\vec{b}_1 = \cos \theta \vec{i}_1 + \sin \theta \vec{i}_2$ $\vec{b}_2 = -\sin \theta \vec{i}_1 + \cos \theta \vec{i}_2$ και για μικρή γωνία θ ($\vec{b}_1 = \vec{i}_1$, $\vec{b}_2 = \vec{i}_2$) βρίσκουμε

$$\begin{aligned}
k &= \frac{1}{2}m(\dot{h}^2 + b^2 x_\theta^2 \dot{\theta}^2 + 2bx_\theta \dot{h} \dot{\theta}) + \frac{1}{2}I_c \dot{\theta}^2 \\
&= \frac{1}{2}m(\dot{h}^2 + 2bx_\theta \dot{h} \dot{\theta}) + \frac{1}{2}I_p \dot{\theta}^2, \quad I_p = I_c + mb^2 x_\theta^2
\end{aligned}
\tag{3.18}$$

Οι γενικευμένες δυνάμεις που αντιστοιχούν στους βαθμούς ελευθερίας h και θ βρίσκονται υπολογίζοντας το έργο που εκτελεί η άντωση κατά την δυνατή μετατόπιση του αεροδυναμικού κέντρου Q και της ροπής γύρω από το σημείο Q κατά την δυνατή περιστροφή γύρω από το σημείο Q . Η ταχύτητα του σημείου Q είναι

$$\vec{V}_Q = -\dot{h} \vec{i}_2 + b\dot{\theta} \left(\frac{1}{2} + a \right) \vec{b}_2
\tag{3.19}$$

Οπότε η δυνατή μετατόπιση είναι

$$\delta_Q = -(\delta h) \vec{i}_2 + b(\delta \theta) \left(\frac{1}{2} + a \right) \vec{b}_2
\tag{3.20}$$

Η δυνατή περιστροφή είναι $(\delta \theta) \vec{b}_3$ διότι η γωνιακή ταχύτητα είναι $\dot{\theta} \vec{b}_3$. Συνεπώς το δυνατό έργο των αεροδυναμικών φορτίων είναι

$$(\delta W) = L \left[(\delta h) + b \left(\frac{1}{2} + a \right) (\delta \theta) \right] + M_{1/4} (\delta \theta)
\tag{3.21}$$

με γενικευμένες δυνάμεις

$$Q_h = -L
\tag{3.22}$$

$$Q_\theta = M_{1/4} + b \left(\frac{1}{2} + a \right) L$$

Οι εξισώσεις Lagrange για την κινητική ενέργεια K που εξαρτάται μόνο από $\dot{q}_1 = \dot{h}$ και $\dot{q}_2 = \dot{\theta}$ είναι

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial K}{\partial \dot{q}_i} \right) + \frac{\partial P}{\partial q_i} = Q_i \quad i=1,2
\tag{3.23}$$

και οι εξισώσεις κίνησης δίνονται από

$$m(\ddot{h} + b x_\theta \ddot{\theta}) + k_h h = -L \quad (3.24)$$

$$I_p \ddot{\theta} + m b x_\theta \ddot{h} + k_\theta \theta = M_{1/4} + b \left(\frac{1}{2} + a \right) L$$

Για την συμμετρική πτέρυγα και μικρή γωνία πρόσπτωσης τα αεροδυναμικά φορτία είναι

$$L = 2\pi \theta \rho_\infty b U^2 \quad (3.25)$$

$$M_{1/4} = 0$$

Ορίζονται οι παρακάτω φυσικές συχνότητες για $u = 0$

$$\omega_h = \sqrt{\frac{k_h}{m}}, \quad \omega_\theta = \sqrt{\frac{k_\theta}{I_p}} \quad (3.26)$$

Οπότε οι εξισώσεις κίνησης γράφονται υπό μορφή μητρώων ως

$$\begin{bmatrix} mb^2 & mb^2 x_\theta \\ mb^2 x_\theta & I_p \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{h}/b \\ \ddot{\theta} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} mb^2 \omega_h^2 & 2\pi \rho_\infty b^2 v^2 \\ 0 & I_p \omega_\theta^2 - 2(1/2 + a) \pi \rho_\infty b^2 u^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} h/b \\ \theta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (3.27)$$

Ακολουθώντας την p-μέθοδο για λύσεις $h = \bar{h} e^{vt} = \bar{h} e^{s\omega_\theta t}$ $\theta = \bar{\theta} e^{vt} = \bar{\theta} e^{s\omega_\theta t}$ όπου s είναι η άγνωστη μιγαδική ιδιοτιμή $s = v/\omega_\theta$ βρίσκουμε

$$\begin{bmatrix} mb^2 s^2 \omega_\theta^2 + mb^2 \omega_h^2 & -mb^2 x_\theta s \omega_\theta^2 + 2\pi \rho_\infty b^2 u^2 \\ mb^2 x_\theta s^2 \omega_\theta^2 & I_p s^2 \omega_\theta^2 + I_p \omega_\theta^2 - 2(1/2 + a) \pi \rho_\infty b^2 u^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{h}/b \\ \bar{\theta} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (3.28)$$

Οι συμβολισμοί απλοποιούνται με τους παρακάτω ορισμούς

$$r^2 = \frac{I_p}{mb^2}, \quad \sigma = \frac{\omega_h}{\omega_\theta}, \quad \mu = \frac{m}{\rho_\infty \pi b^2}, \quad V = \frac{U}{b\omega_\theta} \quad (3.29)$$

Που είναι αδιάστατοι αριθμοί και εκφράζουν: r την ακτίνα περιστροφής γύρω από το σημείο P , σ τον λόγο συχνοτήτων, μ την μάζα μοντέλου δια της μάζας που επηρεάζει η πτέρυγα, και V την ανοιγμένη συχνότητα (reduced frequency). Με την χρήση των αδιάστατων αριθμών r , σ , μ , V οι εξισώσεις κίνησης είναι

$$\begin{bmatrix} s^2 + \sigma^2 & s^2 x_\theta + 2V^2/\mu \\ s^2 x_\theta & r^2 s^2 + r^2 - 2V^2(0.5 + \alpha)/\mu \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{h}/b \\ \bar{\theta} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (3.30)$$

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Α

Γενικευμένες Συντεταγμένες και Εξισώσεις Lagrange

Στο παράρτημα αυτό παρουσιάζονται τα απαραίτητα στοιχεία της δυναμικής των κατασκευών (structural dynamics) που απαιτούνται για την θεωρία της αεροελαστικότητας. Η περιοχή της δυναμικής των κατασκευών καλύπτει τις δυναμικές παραμορφώσεις των συνεχών μέσων. Στην γενική περίπτωση η σχέση φορτίου–παραμόρφωσης στις κατασκευές αεροσκαφών είναι μη γραμμική, διότι οι παραμορφώσεις, ή οι αποκλίσεις από την κατάσταση ισορροπίας χωρίς φορτίο δεν είναι πάντοτε μικρές. Θα θεωρήσουμε όμως μόνο μικρές παραμορφώσεις έτσι ώστε να καταστεί δυνατή η αναλυτική επίλυση των προβλημάτων που θα διαπραγματευτούμε. Πρέπει να σημειωθεί ότι η θεωρία των γραμμικών ελαστικών συστημάτων καλύπτει μεγάλο εύρος της τυπικής κατάστασης πτήσης.

Η δυναμική των κατασκευών είναι ένα πολύ ευρύ πεδίο και διαπραγματεύεται τον προσδιορισμό φυσικών συχνοτήτων (natural frequencies) και των χαρακτηριστικών μορφών ή ιδιομορφών (mode shapes), της απόκριση σε αρχικές συνθήκες, της απόκρισης σε δυναμική καταπόνηση κ.λ.π. Στα προβλήματα απόκρισης που θα μας απασχολήσουν στα επόμενα κεφάλαια, μερικά από τα φορτία είναι αεροδυναμικής προέλευσης οπότε η απόκριση είναι αεροελαστική. Γενικά η αεροδυναμική φόρτιση εξαρτάται από την παραμόρφωση της κατασκευής και η παραμόρφωση με την σειρά της μεταβάλλει τα αεροδυναμικά φορτία κατά την διάρκεια του αεροελαστικού κύκλου απόκρισης. Τα αεροδυναμικά φορτία είναι επίσης γενικά μη γραμμικά, στα αεροελαστικά προβλήματα που θα μας απασχολήσουν θεωρούμε όμως χάριν απλούστευσης ότι και τα αεροδυναμικά φορτία είναι γραμμικά.

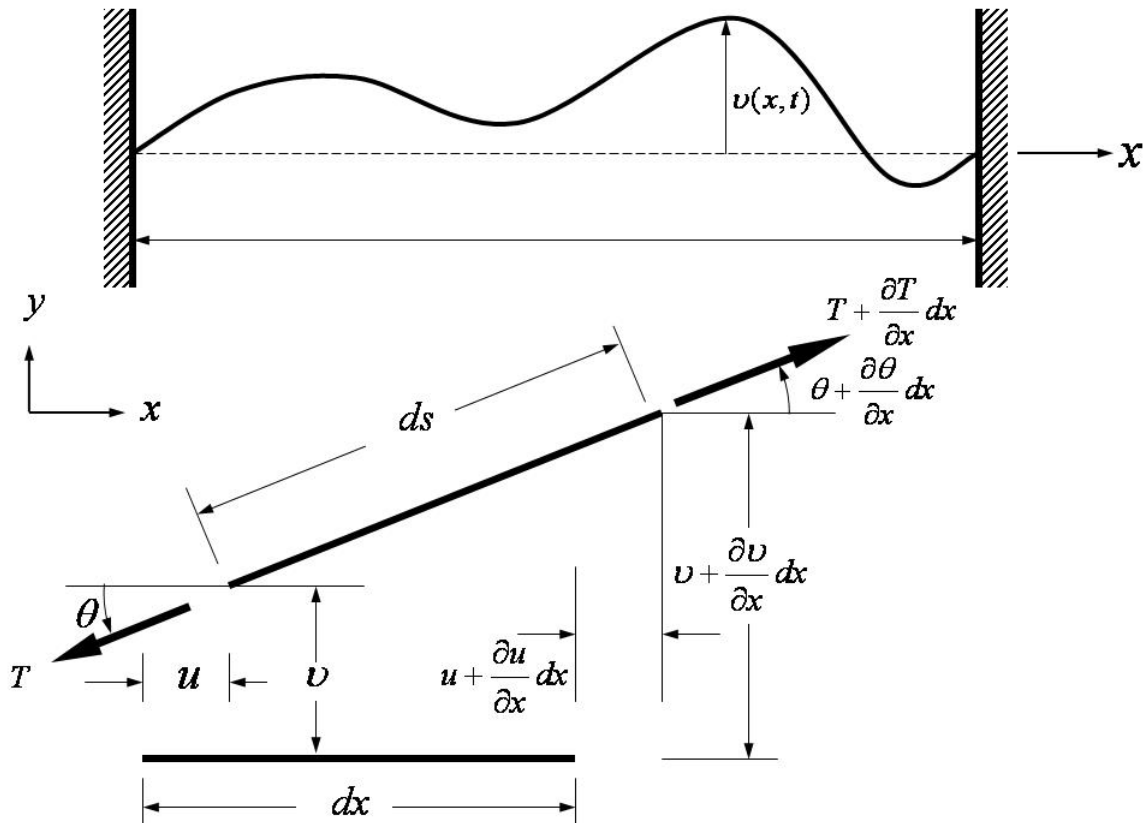
Υπάρχουν πολλές μέθοδοι υπολογισμού της παραμόρφωσης κατασκευών. Θα περιοριστούμε στην παρουσίαση της μεθόδου χαρακτηριστικών παραμορφώσεων (modal shapes) και θα δείξουμε την χρήση του στην περιγραφή της δυναμικής συμπεριφοράς συνεχών ελαστικών συστημάτων. Η μεθοδολογία που θα ακολουθήσουμε είναι παρόμοια με εκείνη που χρησιμοποιείται ευρέως για την ανάλυση ολοκληρωμένων αεροπορικών κατασκευών. Χάριν απλότητας την ανάλυση μας θα διαπραγματευτούμε μόνο μονοδιάστατα παραδείγματα.

A.1 Δυναμική ομοιόμορφης χορδής

Αρχικά παρουσιάζεται το κλασικό παράδειγμα της ταλαντευόμενης χορδής ως εισαγωγή στην μαθηματική ανάλυση και στην μεθοδολογία που θα χρησιμοποιηθεί για την μελέτη της δυναμικής αεροελαστικής συμπεριφοράς.

A.1.2 Εξισώσεις κίνησης

Θεωρούμε μια ομοιόμορφη χορδή αρχικού μήκους l_0 που βρίσκεται υπό τάση κατά την κατεύθυνση x μεταξύ των υποστηριγμάτων στα σημεία $x=0$ και $x=l > l_0$. Η τάση που αναπτύσσεται στην χορδή είναι T . Θεωρούμε την μικρή μετατόπιση $v(x,t)$ της χορδής κατά μήκος του κάθετου άξονα. Το διάγραμμα ισορροπίας ενός στοιχειώδους τμήματος dx απεικονίζεται στο Σχ. A.1. Στο δεξί άκρο του στοιχειώδους τμήματος dx , οι τιμές της γωνίας θ και της τάσης, T , βρίσκονται από ανάπτυγμα Taylor όπου διατηρείται μόνο ο πρώτος όρος και οι όροι που εξαρτώνται από dx^2 ή και μεγαλύτερες δυνάμεις παραλείπονται.



Σχ. A.1 Σχηματική αναπαράσταση ταλαντευόμενης χορδής.

Οι εξισώσεις κίνησης κατά την οριζόντια, x , και την κάθετη, y κατεύθυνση με μετατοπίσεις u και v αντίστοιχα είναι :

$$\frac{\partial}{\partial x}[T \cos \vartheta] = m \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (\text{A.1.1})$$

$$\frac{\partial}{\partial y}[T \sin \vartheta] = m \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}$$

όπου $m = \rho A$ είναι η μάζα ανά μονάδα μήκους. Θεωρούμε ότι η επιμήκυνση είναι e οπότε $ds = (1+e)dx$ και

$$\cos \theta = \frac{1}{1+e} \left(1 + \frac{\partial u}{\partial x} \right) \quad (\text{A.1.2})$$

$$\sin \theta = \frac{1}{1+e} \frac{\partial v}{\partial x}$$

δηλαδή η επιμήκυνση e δίνεται από την σχέση :

$$e = \frac{\partial s}{\partial x} - 1 = \sqrt{\left(1 + \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2} - 1 \quad (\text{A.1.3})$$

και επειδή η χορδή είναι γραμμικά ελαστική έχουμε :

$$T = E A e \quad (\text{A.1.4})$$

όπου EA είναι η σταθερά της κατά μήκος δυσκαμψίας (longitudinal stiffness) της χορδής.

Υποθέτουμε ότι υπάρχει μια κατάσταση ισορροπίας χωρίς παραμόρφωση της χορδής και η ισορροπία εκφράζεται από τις σχέσεις

$$\begin{aligned}
u(x,t) &= \bar{u} \\
v(x,t) &= 0 \\
\theta(x,t) &= 0 \\
e(x,t) &= \bar{e}(x) \\
T(x,t) &= \bar{T}(x)
\end{aligned}
\tag{A.1.5}$$

οπότε όταν $\bar{u}(0) = 0$ τότε :

$$\begin{aligned}
\bar{T}(x) &= T_o \\
\bar{e}(x) &= e_o = \frac{T_o}{EA} = \frac{\delta}{l_o}
\end{aligned}
\tag{A.1.6}$$

$$\bar{u}(x) = e_o x$$

όπου $\delta = l - l_o$ είναι η αλλαγή μήκους μετά από την εφαρμογή της τάσης T_o .

Οι αποκλίσεις από την κατάσταση ισορροπίας λόγω εφαρμογής της επιπρόσθετης τάσης $\hat{T}(x,t)$ υποτίθεται ότι είναι μικρές. Οι μικρές αποκλίσεις συμβολίζονται ως (^). Με αυτή την παραδοχή οι μεταβλητές του προβλήματος γράφονται ως

$$\begin{aligned}
u(x,t) &= \bar{u}(x) + \hat{u}(x,t) \\
v(x,t) &= \hat{v}(x,t) \\
\theta(x,t) &= \hat{\theta}(x,t)
\end{aligned}
\tag{A.2.7}$$

$$l(x,t) = \bar{e}(x) + \hat{e}(x,t)$$

$$T(x,t) = \bar{T}(x) + \hat{T}(x,t)$$

και από τις Εξ. (A.1.2) βρίσκουμε :

$$\hat{\theta} = \frac{1}{1+e_o} \frac{\partial \hat{v}}{\partial x} \tag{A.1.8}$$

Με αντικατάσταση των Εξ. (A.1.7) και (A.1.8) στην Εξ. (A.1.1) βρίσκουμε ότι η κίνηση της χορδής περιγράφεται από τις παρακάτω γραμμικές διαφορικές εξισώσεις

$$EA \frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial x^2} = m \frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial t^2} \quad (\text{A.1.9})$$

$$\frac{T_o}{1+e_o} \frac{\partial^2 \hat{v}}{\partial x^2} = m \frac{\partial^2 \hat{v}}{\partial t^2}$$

Δηλαδή με την παραδοχή των μικρών διαταραχών βρίσκουμε ότι οι εξισώσεις κίνησης είναι γραμμικές και μη συζευγμένες σε αντίθεση με τις γενικές Εξ. (A.1.1) που είναι μη γραμμικές και συζευγμένες. Επί πλέον επειδή $AE \gg T_o$ και $e_o \ll 1$ $\delta \ll l_o$ το εύρος ταλάντωσης \hat{u} κατά την κατεύθυνση x είναι πολύ πιο μικρό από το εύρος \hat{v} κατά την κατεύθυνση y και η εξίσωση της κατά πλάτος ταλάντωσης είναι :

$$T_o \frac{\partial^2 \hat{v}}{\partial x^2} = m \frac{\partial^2 \hat{v}}{\partial t^2} \quad (\text{A.1.10})$$

Η παραπάνω κυματική εξίσωση υπόκειται σε οριακές συνθήκες

$$\hat{v}(0,t) = \hat{v}(l,t) = 0 \quad (\text{A.1.11})$$

Η λύση της Εξ. (A.10) είναι ένα πρόβλημα ιδιοτιμών, που βρίσκουμε με χωρισμό μεταβλητών όπως θα δείξουμε αμέσως παρακάτω.

A.1.3 Λύση στατικών κυμάτων (Standing wave solution)

Εφαρμογή της μεθόδου χωρισμού μεταβλητών δίνει την λύση της Εξ. (A.1.10) σαν λύση δυο συνήθων διαφορικών με την αντικατάσταση

$$v(x,t) = X(x)Y(t) \quad (\text{A.1.12})$$

βρίσκουμε ότι η διαφορική εξίσωση με μερικές παραγώγους, Εξ. (A.1.10), γράφεται ως ακολούθως

$$TX''(x)Y(t) = mX(x)\ddot{Y}(t) \quad (\text{A.1.13})$$

όπου X'' είναι η δεύτερη χωρική παράγωγος και \ddot{Y} είναι η παράγωγος ως προς τον χρόνο. Η παραπάνω εξίσωση γράφεται ως

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{m}{T} \frac{\ddot{Y}(t)}{Y(t)} = -a^2 \quad (\text{A.1.14})$$

Στην παραπάνω σχέση a είναι μία σταθερά διότι το κάθε μέλος της Εξ. (A.1.14) είναι συνάρτηση διαφορετικής ανεξάρτητης μεταβλητής. Το σύστημα (A.1.14) είναι ένα σύστημα συνήθων διαφορικών εξισώσεων και ανάγεται στην επίλυση των δύο παρακάτω συνήθων διαφορικών.

$$\frac{d^2X}{dx^2} + a^2x = 0 \quad (\text{A.1.15})$$

$$\frac{d^2Y}{dt^2} + a^2 \frac{T}{m} y = 0$$

Οι συνήθεις διαφορικές (A.1.1.5) έχουν γενική λύση

$$X(x) = A \sin(ax) + B \cos(ax)$$

$$Y(t) = C \sin\left(\sqrt{\frac{T}{m}} at\right) + D \cos\left(\sqrt{\frac{T}{m}} at\right) \quad (\text{A.1.16})$$

Με εφαρμογή των οριακών συνθηκών βρίσκουμε ότι οι σταθερές A, B, C, D είναι

$$v(0,t) = X(0)Y(t) = 0 \Rightarrow X(0) = 0 \Rightarrow B = 0 \quad (\text{A.1.17})$$

$$v(l,t) = X(l)Y(t) = 0 \Rightarrow X(l) = 0 \Rightarrow A \sin(al) = 0 \quad (\text{A.1.18})$$

Η σταθερά A πρέπει όμως να είναι διαφορετική του μηδενός διότι εάν $A=0$ τότε η μετατόπιση v είναι μηδενική για κάθε θέση x και χρόνο t . Η λύση της πρώτης των Εξ. (A.1.16) η οποία έχει πρακτικό ενδιαφέρον (και προκύπτει όταν η σταθερά A είναι διάφορη του μηδενός, $A \neq 0$) είναι

$$\sin(\alpha l) = 0 \quad (\text{A.1.19})$$

Η παραπάνω σχέση ονομάζεται *χαρακτηριστική εξίσωση* και έχει άπειρες λύσεις που δίνονται από

$$\alpha_i = \frac{i\pi}{l}, \quad i = 1, 2, \dots \quad \text{ιδιοτιμές} \quad (\text{A.1.20})$$

Οι λύσεις που δίνονται από την Εξ. (A.1.20) ονομάζονται *ιδιοτιμές*. Για κάθε ακέραιη τιμή του δείκτη i υπάρχει μια ιδιοτιμή (eigenvalue) α_i που σχετίζεται με την λύση X_i που αντιστοιχεί στο σχήμα της χορδής (ιδιομορφή) και ονομάζεται *ιδιοσυνάρτηση* (eigenfunction). Δηλαδή :

$$v_i(x, t) = X_i(x)Y_i(t) \quad (\text{A.1.21})$$

όπου

$$\begin{aligned} X_i(x) &= A_i \sin(\alpha_i x) && \text{ιδιοσυνάρτηση} \\ Y_i(t) &= C_i \sin\left(\sqrt{\frac{T}{m}} \alpha_i t\right) + D_i \cos\left(\sqrt{\frac{T}{m}} \alpha_i t\right) \end{aligned} \quad (\text{A.1.22})$$

Η γενική λύση για την μετατόπιση $v(x, t)$ περιλαμβάνει συνεισφορά από όλες τις ιδιοτιμές οπότε :

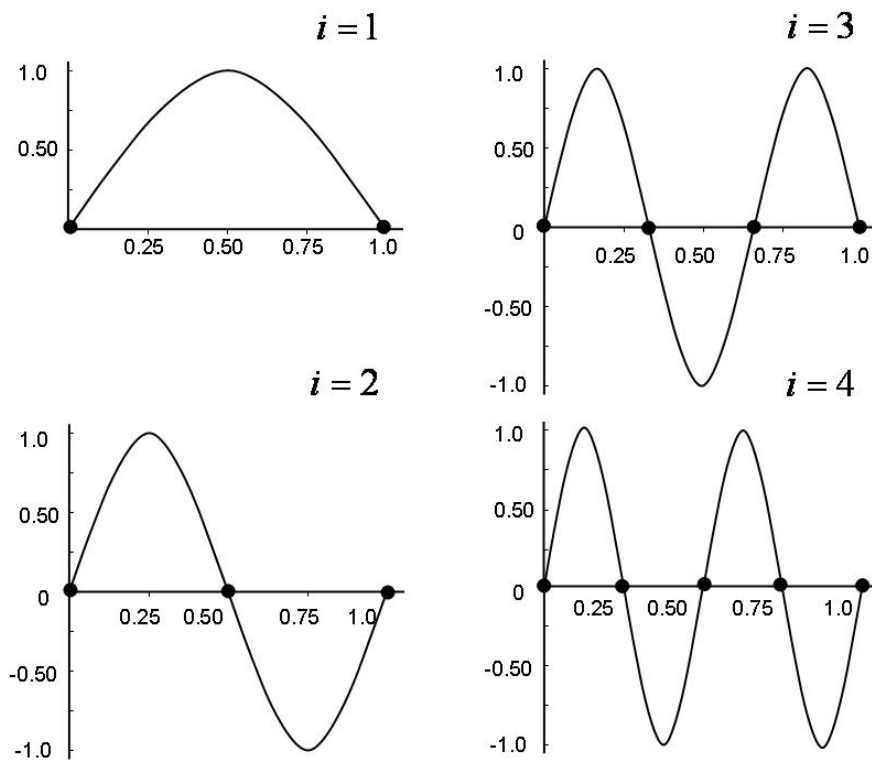
$$v(x, t) = \sum_{i=1}^{\infty} v_i(x, t) = \sum_{i=1}^{\infty} \sin\left(\frac{i\pi x}{l}\right) \left[E_i \sin\left(\sqrt{\frac{T}{m}} \frac{i\pi t}{l}\right) + F_i \cos\left(\sqrt{\frac{T}{m}} \frac{i\pi t}{l}\right) \right] \quad (\text{A.1.23})$$

όπου $E_i = A_i C_i$, $F_i = A_i D_i$.

Όπως φαίνεται από την Εξ. (A.1.23) η μετατόπιση $v(x, t)$ της χορδής σε κάθε χρονική στιγμή συνίσταται από άπειρα σχήματα το εύρος των οποίων έχει οριστεί. Το κάθε σχήμα αντιστοιχεί σε μια ιδιομορφή και ονομάζεται *σχήμα ιδιομορφής* (mode shape). Τα σχήματα ιδιομορφής ή *ιδιοσχήματα* συμβολίζονται με $\varphi_i(x)$ και είναι.

$$\varphi_i(x) = \sin\left(\frac{i\pi x}{l}\right) \quad \text{ιδιοσχήματα ή ιδιομορφές} \quad (\text{A.1.24})$$

Οι ιδιομορφές που περιγράφονται από την Εξ. (A.1.24) απεικονίζονται στο Σχ. Α.2 όπου παρατηρούμε ότι με την αύξηση της τάξης του ιδιοσχήματος υπάρχουν περισσότερα σημεία όπου η ιδιομορφή τέμνει τον άξονα x . Τα σημεία μηδενισμού της ιδιομορφής ονομάζονται κόμβοι (nodes).



Σχήμα Α2. Οι πρώτες τέσσερις χαρακτηριστικές μορφές ταλαντευόμενης χορδής.

Κάθε ιδιομορφή στην Εξ. (A.1.23) πολλαπλασιάζεται με μια συνάρτηση του χρόνου $\xi_i(t)$. Η συνάρτηση $\xi_i(t)$ ονομάζεται *γενικευμένη συντεταγμένη* και είναι:

$$\xi_i(t) = E_i \sin\left(\sqrt{\frac{T}{m}} \frac{i \pi t}{l}\right) + F_i \cos\left(\sqrt{\frac{T}{m}} \frac{i \pi t}{l}\right) \quad \text{γενικευμένη συντεταγμένη} \quad (\text{A.1.25})$$

Στο συγκεκριμένο πρόβλημα οι γενικευμένες συντεταγμένες είναι αρμονικές συναρτήσεις. Επειδή δε δεν έχουμε επιβολή εξωτερικής φόρτισης, η λύση που βρήκαμε ονομάζεται ομοιογενής λύση (homogeneous solution).

Όταν υπάρχουν εξωτερικά φορτία οι γενικευμένες συντεταγμένες ξ_i εξαρτώνται και από το φορτίο.

Η συνολική μετατόπιση της χορδής εκφράζεται σαν άθροισμα συνεισφορών από την σχέση :

$$v(x,t) = \sum_{i=1}^{\infty} \varphi_i(x) \xi_i(t) \quad (\text{A.1.26})$$

Στην παραπάνω ομοιογενή λύση του προβλήματος της ταλαντευμένης χορδής, η χρονική μεταβολή των γενικευμένων συντεταγμένων είναι αρμονική και για κάθε μια ιδιοτιμή αντιστοιχεί μια μοναδική συχνότητα. Οι συχνότητες αυτές ονομάζονται *φυσικές συχνότητες* (natural frequencies or natural modes) και συμβολίζονται με ω_i . Για την ταλαντευόμενη χορδή οι φυσικές συχνότητες είναι :

$$\omega_i = \frac{i\pi}{l} \sqrt{\frac{T}{m}} \quad i=1,2,\dots \quad \text{φυσικές συχνότητες} \quad (\text{A.1.27})$$

Η ολική μετατόπιση της χορδής που συνίσταται από άθροισμα γινομένων των γενικευμένων συντεταγμένων $\xi_i(t)$, και των ιδοσχημάτων $\varphi_i(x)$. Τα ιδιοσχήματα έχουν ορισμένες ιδιότητες που θα εξετάσουμε αμέσως παρακάτω.

A.1.3 Ορθογωνιότητα των ιδιοσχημάτων

Η πιο σημαντική ιδιότητα των ιδιοσχημάτων (modal shapes) είναι ότι αποτελούν ένα σύνολο συναρτήσεων που είναι ορθογώνιες. Η συνθήκη ορθογωνιότητας είναι:

$$\int_0^l m \varphi_i(x) \varphi_j(x) dx \begin{cases} 0 & i \neq j \\ \neq 0 & i = j \end{cases}$$

Η απόδειξη της ορθογωνιότητας για τις συνιστώσες $v_i(x,t) = \varphi_i(x) \xi_i(t)$ επιτυγχάνεται με αντικατάσταση στην εξίσωση κύματος

$$T v_{xx} = m v_{tt}$$

Η γενικευμένη συντεταγμένη ξ_i είναι αρμονική οπότε

$$\ddot{\xi}_i = -\omega_i^2 \xi_i$$

και η εξίσωση κύματος γίνεται

$$T\varphi_i''(x)\xi_i(t) = -m\omega_i^2\varphi_i(x)\xi_i(t)$$

ή

$$T\varphi_i''(x) = -m\omega_i^2\varphi_i(x)$$

και παρόμοια για την συνεισφορά από την j ιδιοσυχνότητα

$$T\varphi_j''(x) = -m\omega_j^2\varphi_j(x)$$

από τις δύο παραπάνω σχέσεις μετά από πολλαπλασιασμό με $\varphi_i(x)$ και $\varphi_j(x)$ και αφαίρεση κατά μέλη βρίσκουμε :

$$(\omega_i^2 - \omega_j^2)m \int_0^l \varphi_i(x)\varphi_j(x) dx = T \int_0^l [\varphi_i\varphi_j''(x) - \varphi_j\varphi_i''(x)] dx$$

μετά από ολοκλήρωση κατά μέρη της παραπάνω σχέσης βρίσκουμε:

$$(\omega_i^2 - \omega_j^2)m \int_0^l \varphi_i\varphi_j dx = T(\varphi_i\varphi_j' - \varphi_j\varphi_i') \Big|_0^l - T \int_0^l (\varphi_i'\varphi_j' - \varphi_i'\varphi_j') dx$$

Το δεξί μέλος της παραπάνω σχέσης είναι μηδέν διότι $\varphi_i = 0$ στα όρια $x = 0$ και $x = l$ λόγω οριακών συνθηκών και επειδή $\omega_i \neq \omega_j$ έχουμε :

$$m \int_0^l \varphi_i(x)\varphi_i(x) dx = 0$$

και

$$m \int_0^l \varphi_i^2(x) dx = M_i \qquad \text{γενικευμένη μάζα του } i \text{ ιδιοσχήματος}$$

όπου M_i είναι η γενικευμένη μάζα του i ιδιοσχήματος

A.1.4 Χρήση ορθογωνιότητας

Υποθέτουμε ότι γνωρίζουμε την αρχική απόκλιση $v(x,0)$ και την αρχική κατανομή ταχύτητας της χορδής

$$v(x,0) = f(x) \tag{A.1.28}$$

$$\frac{\partial v(x,0)}{\partial t} = g(x)$$

Με εφαρμογή αυτών των αρχικών συνθηκών βρίσκουμε

$$v(x,0) = \sum_{i=1}^{\infty} F_i \sin\left(\frac{i\pi x}{l}\right) = f(x) \tag{A.1.29}$$

$$\frac{\partial v(x,0)}{\partial t} = \sum_{i=1}^{\infty} E_i \frac{i\pi}{l} \sin\left(\frac{i\pi x}{l}\right) = g(x)$$

ή

$$\sum_{i=1}^{\infty} F_i \varphi_i(x) = f(x)$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} E_i \frac{i\pi}{l} \varphi_i(x) = g(x)$$

και χρησιμοποιώντας την ιδιότητα της ορθογωνιότητας

$$\int_0^l f(x) \varphi_j(x) dx = \frac{F_j l}{2}$$

$$\int_0^l g(x) \varphi_j(x) dx = \frac{E_j i\pi}{2} \sqrt{\frac{T}{m}}$$

ή

$$E_j = \frac{2}{i\pi} \sqrt{\frac{m}{T}} \int_0^l g(x) \sin\left(\frac{i\pi x}{l}\right) dx \quad (\text{A.2.30})$$

$$F_j = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin\left(\frac{i\pi x}{l}\right) dx$$

οπότε για δεδομένες αρχικές συνθήκες $f(x)$ και $g(x)$ η μετατόπιση της χορδής είναι :

$$v(x,t) = \sum_{i=1}^{\infty} \sin\left(\frac{i\pi x}{l}\right) [E_i \sin(\omega_i t) + F_i \cos(\omega_i t)] \quad (\text{A.1.31})$$

A.1.5 Λύση κινούμενου κύματος (traveling wave solution)

Θεωρούμε την λύση της ταλαντευόμενης χορδής για γνωστή αρχική μετατόπιση και μηδενική αρχική ταχύτητα χωρίς αρχικό φορτίο. Για την περίπτωση αυτή οι συντελεστές E_i είναι μηδέν και η μετατόπιση είναι :

$$v(x,t) = \sum_{i=1}^{\infty} \sin\left(\frac{i\pi x}{l}\right) F_i \cos\left(\sqrt{\frac{T}{m}} \frac{i\pi t}{l}\right) \quad (\text{A.1.32})$$

όπου οι συντελεστές F_i υπολογίζονται από τις αρχικές μετατοπίσεις

$$F_i = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin\left(\frac{i\pi x}{l}\right) dx \quad (\text{A.1.33})$$

Το αρχικό σχήμα της χορδής δίνεται σύμφωνα με την Εξ. (A.1.32) από την σχέση :

$$v(x,0) = f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} F_i \sin\left(\frac{i\pi x}{l}\right) \quad (\text{A.1.34})$$

που είναι ουσιαστικά η αναπαράσταση της συνάρτησης $f(x)$ σε σειρά Fourier.

Με την χρήση των ταυτοτήτων $\sin(a \pm \beta) = \sin a \cos \beta \pm \cos a \sin \beta$ και $\sin a \cos \beta = [\sin(a + \beta) + \sin(a - \beta)]/2$ η γενική λύση της Εξ. (A.1.32) γράφεται ως :

$$v(x,t) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{\infty} F_i \left\{ \sin \left[\frac{i\pi}{l} \left(x + \sqrt{\frac{T}{m}} t \right) \right] + \sin \left[\frac{i\pi}{l} \left(x - \sqrt{\frac{T}{m}} t \right) \right] \right\} \quad (\text{A.1.3.5})$$

Η παραπάνω σχέση έχει την ίδια μορφή με την Εξ. (A.1.34) και μπορεί να γραφεί ως :

$$v(x,t) = \frac{1}{2} \left[f \left(x + \sqrt{\frac{T}{m}} t \right) + f \left(x - \sqrt{\frac{T}{m}} t \right) \right] \quad (\text{A.1.36})$$

Η σχέση αυτή υποδηλώνει ότι έχουμε λύση κινουμένου κύματος (traveling wave solution). Η μορφή ταξιδεύοντος κύματος της λύσης φαίνεται καλύτερα όταν ορίσουμε τις νέες συντεταγμένες

$$x_L(x,t) = x + \sqrt{\frac{T}{m}} t \quad (\text{A.1.37})$$

$$x_R(x,t) = x - \sqrt{\frac{T}{m}} t$$

οπότε η λύση κινουμένου κύματος της Εξ. (A.1.36) γράφεται :

$$v(x,t) = \frac{1}{2} [f(x_L) + f(x_R)] \quad (\text{A.1.38})$$

Η παραπάνω σχέση υποδηλώνει ότι το σχήμα της χορδής για χρόνο $t > 0$ είναι η σύνθεση δυο σχημάτων που είναι όμοια με το αρχικό σχήμα και έχουν το μισό του μεγέθους του.

Το σύστημα συντεταγμένων x_L κινείται προς τα αριστερά με ταχύτητα $\sqrt{T/m}$ ενώ το σύστημα x_R προς τα δεξιά με ταχύτητα $\sqrt{T/m}$. Συνεπώς το κύμα $f(x_L)/2$ μεταδίδεται προς τα αριστερά ενώ το κύμα $f(x_R)/2$ μεταδίδεται προς τα δεξιά. Η ταχύτητα μετάδοσης των κυμάτων είναι σταθερή $c = \sqrt{T/m}$ οπότε η λύση γράφεται στην μορφή

$$v(x,t) = \frac{1}{2} [f(x+ct) + f(x-ct)] \quad (\text{A.1.39})$$

Η μορφή αυτή της λύσης κινουμένου κύματος είναι γνωστή και ως μορφή d' Alambert.

Όταν οι κυματομορφές $f(x \pm ct)$ φθάσουν στα όρια $x=0$ και $x=l$ τότε η μετατόπιση πρέπει να μηδενίζεται για να ικανοποιηθούν οι οριακές συνθήκες του αρχικού προβλήματος. Η παραπάνω συνθήκη αντιστοιχεί στην ανάκλαση των κυματομορφών κατά την αντίθετη κατεύθυνση στα όρια $x=0$ και $x=l$.

Οι όροι των σειρών Fourier των Εξ. (A. 1. 34) και (A.1.35) περιέχουν μόνο περιττούς αρμονικούς όρους $\sin(\cdot)$, που σημαίνει ότι η συνάρτηση $f(\cdot)$ είναι επίσης περιττή.

$$f(-x) = -f(x) \quad (\text{A.1.40})$$

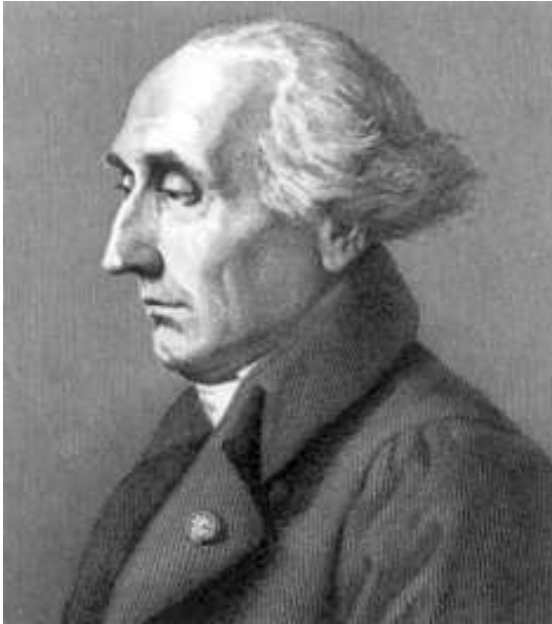
Οι όροι της σειράς Fourier είναι περιοδικοί ως προς x με περίοδο $2l$ οπότε :

$$f(x) = f(x + 2nl) \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (\text{A.1.41})$$

Οι παραπάνω ιδιότητες της συνάρτησης $f(x)$ χρησιμοποιούνται για τον προσδιορισμό των συναρτήσεων $f(x+ct)$, και $f(x-ct)$ για ορίσματα $nl \leq x \pm ct \leq (n+1)l$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

$$f(x \pm ct) = (-1)^m f \left\{ (-1)^n \left[x \pm ct + \frac{(-1)^n - 2n - 1}{2} l \right] \right\} \quad (\text{A.1.42})$$

A. 2. Γενικευμένες Εξισώσεις Κίνησης Lagrange



Ο **Joseph Louis Lagrange** (1736–1813) είναι γνωστός για την συμβολή του στην αναλυτική μηχανική, την αστρονομία, την μαθηματική και αριθμητική ανάλυση, και την θεωρία αριθμών. Ο Lagrange υπήρξε καθηγητής στο E'cole Polytechnique από την αρχή της ιδρύσεως του 1794. Έλαβε πολλές τιμητικές διακρίσεις κατά την διάρκεια της σταδιοδρομίας του όπως διευθυντής της Prussian Academy of Sciences (1766), κατόπιν συστάσεως των Euler και D'Alembert, και του τίτλου του Count of the Empire που του απένειμε ο Napoleon το 1808. Το πιο γνωστό του έργο είναι “Treatise on Analytical Mechanics” (Mécanique Analytique), Paris, 1888-1889.

Στα προηγούμενα κεφάλαια προσδιορίστηκαν οι μορφές ταλάντωσης για την χορδή, που σύμφωνα με τις παραδοχές που έγιναν, είναι ένα γραμμικό συντηρητικό (conservative) σύστημα. Ο προσδιορισμός της απόκρισης της χορδής με εξωτερική φόρτιση επιτυγχάνεται με την βοήθεια των γενικευμένων συντεταγμένων. Κάθε μορφή ταλάντωσης ή ιδιομορφή (modal shape or mode) θεωρείται ως ένας βαθμός ελευθερίας των γενικευμένων εξισώσεων κίνησης για τις συντεταγμένες ξ_i , και όπως θα δείξουμε ικανοποιεί τις εξισώσεις Lagrange.

$$\boxed{\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\xi}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial \xi_i} = \Xi_i, \quad i=1,2,\dots,N} \quad (\text{A.2.1})$$

$L = K - P$	<i>Lagrangian</i>
K	κινητική ενέργεια
P	δυναμική ενέργεια
ξ_i	γενικευμένες συντεταγμένες
Ξ_i	γενικευμένη δύναμη

όπου $L = K - P$ είναι η *Lagrangian*, K είναι η κινητική ενέργεια του συστήματος, P είναι η δυναμική ενέργεια, ξ_i είναι οι γενικευμένες συντεταγμένες, και Ξ_i είναι η γενικευμένη δύναμη.

A.2.1 Εξισώσεις κίνησης Lagrange

Οι εξισώσεις κίνησης ενός συστήματος καταstrώνονται με την εφαρμογή των νόμων του Newton. Η διαδικασία αυτή χρησιμοποιήθηκε στο και κεφάλαιο A.1.2 για να βρούμε τις εξισώσεις κίνησης της χορδής. Στο κεφάλαιο αυτό θα αναπτυχθούν οι εξισώσεις κίνησης κατά Lagrange που έχουν το πλεονέκτημα ότι δεν συμπεριλαμβάνουν δυνάμεις που δεν εκτελούν έργο. Στην περίπτωση που διαπραγματευόμαστε συντηρητικά συστήματα (conservative systems), δηλαδή συστήματα όπου η ολική ενέργεια παραμένει σταθερή, η μέθοδος Lagrange είναι εξαιρετικά βολική για την κατάστρωση των εξισώσεων κίνησης όταν η κινητική και δυναμική ενέργεια του συστήματος είναι γνωστές.

Βαθμοί ελευθερίας

Η μέθοδος Lagrange απαιτεί συστηματικό χαρακτηρισμό του συστήματος. Αρχικά απαιτείται ο προσδιορισμός των ανεξάρτητων συντεταγμένων που περιγράφουν το υπό μελέτη σύστημα. Ένα σύστημα έχει n βαθμούς ελευθερίας όταν απαιτούνται n συντεταγμένες για τον πλήρη προσδιορισμό του. Παραδείγματος χάριν, ένα όχημα που κινείται πάνω σε μια σιδηροδρομική γραμμή έχει ένα βαθμό ελευθερίας διότι η απόστασή του από κάποιο σταθερό σημείο προσδιορίζεται από μια συντεταγμένη, αντίθετα ένα αερόχημα έχει τρεις βαθμούς ελευθερίας διότι για τον προσδιορισμό της θέσης του απαιτούνται τρεις συντεταγμένες.

Γενικευμένες Συντεταγμένες

Ο κοινός τρόπος που κατανοούμε τις συντεταγμένες είναι μέσω μηκών (x, y, z) ή των γωνιών θ, φ σε κυλινδρικό ή σφαιρικό σύστημα συντεταγμένων. Επιπρόσθετα ένα οποιοδήποτε σύνολο παραμέτρων που προσδιορίζει με μοναδικό τρόπο το σύστημα μπορεί να χρησιμοποιηθεί σαν σύστημα συντεταγμένων. Παραδείγματος χάριν, η θέση του εκκρεμούς συνήθως προσδιορίζεται από την γωνία περιστροφής θ από την θέση ισορροπίας. Όμως και η επιφάνεια που σαρώνεται από τον βραχίονα του εκκρεμούς μπορεί επίσης να χρησιμοποιηθεί σαν συντεταγμένη. Η παραπάνω γενίκευση περιγραφής συστημάτων εισάγει την έννοια των *γενικευμένων συντεταγμένων* που μπορεί να είναι εκτός από μήκη ή γωνίες να είναι ταχύτητα, ορμή, εμβαδόν κ. λ. π.

Οι Εξισώσεις Lagrange

Θεωρούμε σύστημα δυο βαθμών ελευθερίας που προσδιορίζεται από δυο γενικευμένες συντεταγμένες q_1 και q_2 με την έννοια που ορίστηκε προηγουμένως. Υποτίθεται ότι το σύστημα αποτελείται από n ανεξάρτητα σωματίδια. Η εφαρμογή του δεύτερου νόμου του Newton για το καθένα από αυτά $i = 1, 2, \dots, n$ εκφράζεται από τις σχέσεις:

$$\begin{aligned} M_i \ddot{x}_i &= X_i \\ M_i \ddot{y}_i &= Y_i \\ M_i \ddot{z}_i &= Z_i \end{aligned} \tag{A.2.2}$$

όπου x_i, y_i, z_i είναι οι Cartesian συντεταγμένες του i^{th} σωματιδίου, που έχει μάζα M_i και επί του οποίου ασκούνται οι δυνάμεις X_i, Y_i, Z_i κατά μήκος των κατευθύνσεων x, y, z , αντίστοιχα.

Πολλαπλασιάζοντας τις εξισώσεις κίνησης του συστήματος του i^{th} σωματιδίου ως προς x, y, z κατευθύνσεις, Εξ. (A.2.2), με τις αντίστοιχες στοιχειώδεις μετατοπίσεις $\delta x_i, \delta y_i, \delta z_i$ βρίσκουμε

$$M_i (\ddot{x}_i \delta x_i + \ddot{y}_i \delta y_i + \ddot{z}_i \delta z_i) = X_i \delta x_i + Y_i \delta y_i + Z_i \delta z_i \tag{A.2.3}$$

Το δεξί μέλος της παραπάνω σχέσης εκφράζει το έργο που πραγματοποιείται από τις δυνάμεις κατά την διάρκεια της δυνατής μετατόπισης $\delta x_i, \delta y_i, \delta z_i$. Δηλαδή οι δυνάμεις που δεν εκτελούν έργο δεν έχουν συνεισφορά και μπορεί να παραλειφθούν από της Εξ. (A.2.3). Η εξίσωση ισορροπίας του συστήματος που αποτελείται από n σωματίδια είναι:

$$\sum_{i=1}^n M_i (\ddot{x}_i \delta x_i + \ddot{y}_i \delta y_i + \ddot{z}_i \delta z_i) = \sum_{i=1}^n (X_i \delta x_i + Y_i \delta y_i + Z_i \delta z_i) \tag{A.2.4}$$

Υποτίθεται όμως ότι το σύστημα περιγράφεται πλήρως από δυο γενικευμένες συντεταγμένες q_1, q_2 οπότε

$$x_i = x_i(q_1, q_2)$$

$$y_i = y_i(q_1, q_2) \tag{A.2.5}$$

$$z_i = z_i(q_1, q_2)$$

οπότε οι ταχύτητες και οι δυνατές μετατοπίσεις εκφράζονται μέσω των γενικευμένων συντεταγμένων από τις παρακάτω σχέσεις

$$\dot{x}_i = \frac{\partial x_i}{\partial q_1} \dot{q}_1 + \frac{\partial x_i}{\partial q_2} \dot{q}_2 \quad \delta x_i = \frac{\partial x_i}{\partial q_1} \delta q_1 + \frac{\partial x_i}{\partial q_2} \delta q_2$$

$$\dot{y}_i = \frac{\partial y_i}{\partial q_1} \dot{q}_1 + \frac{\partial y_i}{\partial q_2} \dot{q}_2 \quad \delta y_i = \frac{\partial y_i}{\partial q_1} \delta q_1 + \frac{\partial y_i}{\partial q_2} \delta q_2$$

$$\dot{z}_i = \frac{\partial z_i}{\partial q_1} \dot{q}_1 + \frac{\partial z_i}{\partial q_2} \dot{q}_2 \quad \delta z_i = \frac{\partial z_i}{\partial q_1} \delta q_1 + \frac{\partial z_i}{\partial q_2} \delta q_2$$

Αντικαθιστώντας τις παραπάνω σχέσεις στην εξίσωση κίνησης του συστήματος, Εξ. (A.2.4), βρίσκουμε:

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^n \left[M_i \left(\ddot{x}_i \frac{\partial x_i}{\partial q_1} + \ddot{y}_i \frac{\partial y_i}{\partial q_1} + \ddot{z}_i \frac{\partial z_i}{\partial q_1} \right) \delta q_1 + M_i \left(\ddot{x}_i \frac{\partial x_i}{\partial q_2} + \ddot{y}_i \frac{\partial y_i}{\partial q_2} + \ddot{z}_i \frac{\partial z_i}{\partial q_2} \right) \delta q_2 \right] = \\ & = \sum_{i=1}^n \left[\left(X_i \frac{\partial x_i}{\partial q_1} + Y_i \frac{\partial y_i}{\partial q_1} + Z_i \frac{\partial z_i}{\partial q_1} \right) \delta q_1 + \left(X_i \frac{\partial x_i}{\partial q_2} + Y_i \frac{\partial y_i}{\partial q_2} + Z_i \frac{\partial z_i}{\partial q_2} \right) \delta q_2 \right] \end{aligned} \tag{A.2.6}$$

Αλλά επειδή οι συντεταγμένες x, y, z είναι συναρτήσεις μόνο των δυο γενικευμένων συντεταγμένων q_1 και q_2 , και ανεξάρτητες από τις χρονικές παραγώγους αυτών \dot{q}_1, \dot{q}_2 , βρίσκουμε ότι η παράγωγος $\partial \dot{x} / \partial \dot{q}_1$ είναι :

$$\frac{\partial \dot{x}}{\partial \dot{q}_1} = \dot{q}_1 \frac{\partial}{\partial \dot{q}_1} \left(\frac{\partial x}{\partial q_1} \right) + \frac{\partial \dot{q}_1}{\partial \dot{q}_1} \left(\frac{\partial x}{\partial q_1} \right) = \dot{q}_1 \frac{\partial}{\partial q_1} \left(\frac{\partial x}{\partial q_1} \right) + \frac{\partial x}{\partial q_1} = \frac{\partial x}{\partial q_1} \tag{A.2.7}$$

διότι $\partial x / \partial \dot{q}_1 = 0$, οπότε

$$\sum_{i=1}^n \left[M_i \left(\ddot{x}_i \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial \dot{q}_1} + \ddot{y}_i \frac{\partial \dot{y}_i}{\partial \dot{q}_1} + \ddot{z}_i \frac{\partial \dot{z}_i}{\partial \dot{q}_1} \right) \delta q_1 + M_i \left(\ddot{x}_i \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial \dot{q}_2} + \ddot{y}_i \frac{\partial \dot{y}_i}{\partial \dot{q}_2} + \ddot{z}_i \frac{\partial \dot{z}_i}{\partial \dot{q}_2} \right) \delta q_2 \right] = \quad (\text{A.2.8})$$

$$\sum_{n=1}^n \left[\left(X_1 \frac{\partial x_i}{\partial q_1} + Y_i \frac{\partial y_i}{\partial q_1} + Z_i \frac{\partial z_i}{\partial q_1} \right) \delta q_1 + \left(X_1 \frac{\partial x_i}{\partial q_2} + Y_i \frac{\partial y_i}{\partial q_2} + Z_i \frac{\partial z_i}{\partial q_2} \right) \delta q_2 \right]$$

Η κινητική ενέργεια του συστήματος είναι :

$$K = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n M_i (\dot{x}_i^2 + \dot{y}_i^2 + \dot{z}_i^2) \quad (\text{A.2.9})$$

Οι όροι στο αριστερό μέλος της Εξ. (A.2.8) σχετίζονται με την παράγωγο της κινητικής ενέργειας, $\partial K / \partial q_1$, ως προς την γενικευμένη συντεταγμένη q_1 , και την παράγωγο, $\partial K / \partial \dot{q}_1$, ως προς την χρονική μεταβολή της γενικευμένης συντεταγμένης, \dot{q}_1 . Οι παράγωγοι $\partial K / \partial \dot{q}_1$ και $\partial K / \partial q_1$ είναι

$$\frac{\partial K}{\partial \dot{q}_1} = \sum_{i=1}^n M_i \left(\dot{x}_i \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial \dot{q}_1} + \dot{y}_i \frac{\partial \dot{y}_i}{\partial \dot{q}_1} + \dot{z}_i \frac{\partial \dot{z}_i}{\partial \dot{q}_1} \right) \quad (\text{A.2.10})$$

$$\frac{\partial K}{\partial q_1} = \sum_{i=1}^n M_i \left(\dot{x}_i \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial q_1} + \dot{y}_i \frac{\partial \dot{y}_i}{\partial q_1} + \dot{z}_i \frac{\partial \dot{z}_i}{\partial q_1} \right) \quad (\text{A.2.11})$$

Οι όροι $\partial \dot{x}_i / \partial \dot{q}_1$ στην Εξ. (A.2.10) υπολογίζονται με διαδοχική παραγωγή

$$\frac{\partial \dot{x}_i}{\partial \dot{q}_1} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial x_i}{\partial q_1} \right) = \frac{\partial^2 x_i}{\partial q_1^2} \dot{q}_1 + \frac{\partial^2 x_i}{\partial q_1 \partial q_2} \dot{q}_2 = \frac{\partial}{\partial q_1} \left(\frac{\partial x_i}{\partial q_1} \dot{q}_1 + \frac{\partial x_i}{\partial q_2} \dot{q}_2 \right) = \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial q_1}$$

Χρησιμοποιώντας την παραπάνω σχέση βρίσκουμε :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial K}{\partial \dot{q}_1} \right) - \frac{\partial K}{\partial q_1} &= \sum_{i=1}^n M_i \left(\ddot{x}_i \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial \dot{q}_1} + \ddot{y}_i \frac{\partial \dot{y}_i}{\partial \dot{q}_1} + \ddot{z}_i \frac{\partial \dot{z}_i}{\partial \dot{q}_1} \right) \\ &+ \sum_{i=1}^n M_i \left[\dot{x}_i \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \dot{x}_i}{\partial \dot{q}_1} \right) + \dot{y}_i \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \dot{y}_i}{\partial \dot{q}_1} \right) + \dot{z}_i \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \dot{z}_i}{\partial \dot{q}_1} \right) \right] \\ &- \sum_{i=1}^n M_i \left(\dot{x}_i \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial q_1} + \dot{y}_i \frac{\partial \dot{y}_i}{\partial q_1} + \dot{z}_i \frac{\partial \dot{z}_i}{\partial q_1} \right) \end{aligned} \quad (\text{A.2.12})$$

αλλά ο δεύτερος και τρίτος όρος της παραπάνω σχέσης απαλείφεται, διότι δείξαμε ότι $d/dt(\partial\dot{x}_i/\partial\dot{q}_1) = \partial\dot{x}_i/\partial q_1$ οπότε αντικαθιστώντας τους όρους του αριστερού μέλους της Εξ. (A.2.6) με την κινητική ενέργεια έχουμε :

$$\left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial K}{\partial \dot{q}_1} \right) - \frac{\partial K}{\partial q_1} \right] \delta q_1 + \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial K}{\partial \dot{q}_2} \right) - \frac{\partial K}{\partial q_2} \right] \delta q_2 =$$

$$= \sum_{i=1}^n \left[\underbrace{\left(X_i \frac{\partial X_i}{\partial q_1} + Y_i \frac{\partial y_i}{\partial q_1} + Z_i \frac{\partial z_i}{\partial q_1} \right)}_{(Q_1)_i} \delta q_1 + \underbrace{\left(X_i \frac{\partial x_i}{\partial q_2} + Y_i \frac{\partial y_i}{\partial q_2} + Z_i \frac{\partial z_i}{\partial q_2} \right)}_{(Q_2)_i} \delta q_2 \right]$$

(A.2.13)

Αλλά οι γενικευμένες συντεταγμένες q_1 και q_2 είναι αναγκαστικά ανεξάρτητες οπότε

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial K}{\partial \dot{q}_1} \right) - \frac{\partial K}{\partial q_1} = \sum_{i=1}^n \left(X_i \frac{\partial x_i}{\partial q_1} + Y_i \frac{\partial y_i}{\partial q_1} + Z_i \frac{\partial z_i}{\partial q_1} \right) = Q_1$$

γενικευμένες
δυνάμεις (A.2.14)

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial K}{\partial \dot{q}_2} \right) - \frac{\partial K}{\partial q_2} = \sum_{i=1}^n \left(X_i \frac{\partial x_i}{\partial q_2} + Y_i \frac{\partial y_i}{\partial q_2} + Z_i \frac{\partial z_i}{\partial q_2} \right) = Q_2$$

Το δεξί μέλος στις Εξ. (A.2.13), όπως αναφέραμε, εκφράζει το έργο που εκτελείται από όλες τις δυνάμεις που ενεργούν στο σύστημα όταν οι Cartesian συντεταγμένες έχουν μικρές μεταβολές $\delta x_i, \delta y_i, \delta z_i$ λόγω των μικρών μεταβολών $\delta q_1, \delta q_2$ των γενικευμένων συντεταγμένων.

Οι συντελεστές Q_1 και Q_2 των μεταβολών $\delta q_1, \delta q_2$ στην Εξ. (A.2.13) ονομάζονται γενικευμένες δυνάμεις. Οι δε, Εξ. (A.2.14) είναι οι εξισώσεις Lagrange για ένα σύστημα που περιγράφεται πλήρως από δυο γενικευμένες συντεταγμένες, δηλαδή ένα σύστημα που έχει δύο βαθμούς ελευθερίας. Η διαδικασία εύρεσης των εξισώσεων Lagrange μπορεί να γενικευθεί για σύστημα N βαθμών ελευθερίας για το οποίο οι εξισώσεις Lagrange είναι:

$$\boxed{\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial K}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial K}{\partial q_j} = Q_j, \quad j=1,2,\dots,N}$$

(A.2.15)

Εξισώσεις Lagrange συντηρητικού συστήματος

Όταν το σύστημα είναι συντηρητικό το έργο που εκτελείται από τις εξωτερικές δυνάμεις μπορεί να υπολογισθεί από την δυναμική ενέργεια P του συστήματος. Η μεταβολή της δυναμικής ενέργειας κατά την διάρκεια μικρής μετατόπισης είναι :

$$\delta P = -Q_1 \delta q_1 - Q_2 \delta q_2 \quad (\text{A.2.16})$$

αλλά οι γενικευμένες συντεταγμένες είναι ανεξάρτητες οπότε όταν $\delta q_2 = 0$ τότε $\delta P = -Q_1 \delta q_1$, δηλαδή

$$Q_1 = -\frac{\partial P}{\partial q_1}, \quad Q_2 = -\frac{\partial P}{\partial q_2} \quad (\text{A.2.17})$$

και οι εξισώσεις Lagrange συστηματικού συστήματος είναι :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial K}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial K}{\partial q_j} + \frac{\partial P}{\partial q_j} = 0 \quad j = 1, 2, \dots, N \quad (\text{A.2.18})$$

Εξισώσεις Lagrange μη-συντηρητικού συστήματος

Όταν το σύστημα δεν είναι συντηρητικό, δηλαδή όταν υπάρχουν επιπλέον δυνάμεις που δεν παράγονται από μια συνάρτηση δυναμικού, τότε χρησιμοποιούμε την συνάρτηση $L = K - P$ που ονομάζεται Lagrangian και οι εξισώσεις Lagrange είναι

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} = \Xi_j \quad (j = 1, 2, \dots, N) \quad (\text{A.2.19})$$

Στην παραπάνω σχέση η γενικευμένη δύναμη Ξ_j συμπεριλαμβάνει μη-συντηρητικές δυνάμεις που συνήθως είναι τα εξωτερικά φορτία τα οποία μπορεί να είναι μεταβλητά στον χρόνο, δηλαδή $\Xi_j = \Xi_j(t)$

A.2.2. Γενικευμένες εξισώσεις κίνησης χορδής

Βρήκαμε ότι η μετατόπιση χορδής εκφράζεται σαν συνάρτηση των γενικευμένων συντεταγμένων ξ_i από την σχέση

$$v(x,t) = \sum_{i=1}^{\infty} \varphi_i(x) \xi_i(t) \quad (\text{A.2.20})$$

Η δυναμική ενέργεια της χορδής εξαρτάται μόνο από την ενέργεια παραμόρφωσης (strain energy) λόγω επιμήκυνσης, εφ' όσον οι δυνάμεις βαρύτητας αμελούνται, δηλαδή

$$P = \frac{1}{2} \int_0^{l_0} EAe^2 dx \quad (\text{A.2.21})$$

όπου $e = \partial s / \partial x - 1 = \sqrt{(1 + \partial u / \partial x)^2 + (\partial v / \partial x)^2} - 1$. Με την χρήση των μικρών μεταβολών όπως στις Εξ. (A.1.7) η δυναμική ενέργεια (ενέργεια παραμόρφωσης) είναι

$$P = \frac{EA}{2} \int_0^{l_0} (\bar{e}^2 + 2\bar{e}\hat{e} + \hat{e}^2) dx \quad (\text{A.2.22})$$

αλλά $\bar{T} = T_0 = EAe_0$, $\bar{e} = e_0$ οπότε :

$$P = T_0 \int_0^{l_0} \hat{e} dx + \frac{EA}{2} \int_0^{l_0} \hat{e}^2 dx$$

αλλά $e(x,t) = \bar{e}(x) + \hat{e}(x,t)$ οπότε η μεταβολή επιμήκυνσης είναι :

$$\hat{e} = \frac{\partial \hat{u}}{\partial x} + \frac{1}{2(1+\bar{e})} \left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial x} \right)^2 + \dots \quad (\text{A.2.24})$$

Με αντικατάσταση της παραπάνω σχέσης βρίσκουμε ότι η ενέργεια παραμορφώσεων είναι :

$$P = T_o \int_0^{l_o} \frac{\partial \hat{u}}{\partial x} dx + \frac{T_o}{2(1+e_o)} \int_0^{l_o} \left(\frac{\partial \hat{v}}{\partial x} \right)^2 dx + \frac{EA}{2} \int_0^{l_o} \left(\frac{\partial \hat{u}}{\partial x} \right)^2 dx + \dots \quad (\text{A.2.25})$$

αλλά $\hat{u}(0) = \hat{u}(l_o) = 0$ οπότε ο πρώτος όρος απαλείφεται. Επί πλέον ενδιαφερόμαστε κυρίως για εγκάρσιες ταλαντώσεις που έχουν πολύ μεγαλύτερο εύρος $\hat{v} \gg \hat{u}$, δηλαδή

$$P = \frac{T}{2} \int_0^l \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 dx \quad (\text{A.2.26})$$

διότι $e_o \ll 1$. Στην παραπάνω σχέση ο συμβολισμός (^) που αναφέρεται στις μικρές παραμορφώσεις παραλείπεται. Η Εξ. (A.2.26) σε μορφή γενικευμένων συντεταγμένων είναι :

$$P = \frac{T}{2} \int_0^l \left(\sum_{i=1}^{\infty} \varphi'_i \xi_i \right)^2 dx = \frac{T}{2} \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \xi_i \xi_j \int_0^l \varphi'_i \varphi'_j dx \quad (\text{A.2.27})$$

Δείξαμε όμως προηγουμένως ότι τα ιδιοσχήματα (mode shapes) της χορδής όπως και οι παράγωγοί τους είναι ορθογώνιες συναρτήσεις, δηλαδή,

$$\int_0^l \varphi'_i(x) \varphi'_j(x) dx = 0 \quad (i \neq j)$$

οπότε η δυναμική ενέργεια είναι :

$$P = \frac{T}{2} \sum_{i=1}^{\infty} \xi_i^2 \int_0^l \varphi_i'^2 dx \quad (\text{A.2.28})$$

ολοκληρώνοντας την παραπάνω σχέση κατά μέλη βρίσκουμε ότι

$$\int_0^l \varphi'_i \varphi'_i dx = [\varphi'_i \varphi_i]_{x=0}^{x=l} - \int_0^l \varphi_i \varphi_i'' dx$$

αλλά δείξαμε ότι λόγω ορθογωνιότητας $T \varphi_i'' = -m \varphi_i \omega_i^2$ οπότε

$$T \int_0^l \varphi_i'^2 dx = m \omega_i^2 \int_0^l \varphi_i^2 dx = M_i \omega_i^2 \quad (\text{A.2.29})$$

όπου M_i είναι η γενικευμένη μάζα και ω_i η φυσική συχνότητα της i^{th} ιδιομορφής (πρέπει να σημειωθεί ότι η i^{th} γενικευμένη μάζα εξαρτάται από την i^{th} ιδιομορφή). Συνεπώς η τελική μορφή της δυναμικής ενέργειας είναι

$$P = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{\infty} M_i \omega_i^2 \xi_i^2 \quad (\text{A.2.30})$$

Η κινητική ενέργεια στοιχειώδους μήκους της χορδής είναι

$$dK = \frac{m}{2} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial t} \right)^2 \right] dx \quad (\text{A.2.31})$$

και αμελώντας την μετατόπιση u έχουμε

$$dK = \frac{m}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial t} \right)^2 dx = \frac{m}{2} \left(\sum_{i=1}^{\infty} \varphi_i \dot{\xi}_i \right)^2 dx \quad (\text{A.2.32})$$

οπότε η ολική κινητική ενέργεια είναι :

$$\begin{aligned} K &= \frac{1}{2} \int_0^l m \left(\sum_{i=1}^{\infty} \varphi_i \dot{\xi}_i \right)^2 dx = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^l \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \varphi_i \dot{\xi}_i \varphi_j \dot{\xi}_j m dx = \end{aligned} \quad (\text{A.2.33})$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \dot{\xi}_i \dot{\xi}_j m \int_0^l \varphi_i \varphi_j dx \quad (\text{A.2.34})$$

και με την χρήση της ορθογωνιότητας των ίδιων σχημάτων βρίσκουμε ότι η κινητική ενέργεια είναι :

$$K = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{\infty} M_i \dot{\xi}_i^2 \quad (\text{A.2.35})$$

Με αντικατάσταση των Εξ. (A.2.30) και (A.2.35) στην εξίσωση Lagrange (Εξ. A.2.1) βρίσκουμε ότι η δυναμική συμπεριφορά της χορδής περιγράφεται από την συνήθη διαφορική

$$M_i (\ddot{\xi}_i + \omega_i^2 \xi_i) = \Xi_i \quad i=1,2,\dots \quad (\text{A.2.36})$$

Η γενικευμένη δύναμη $\Xi_i(t)$ αναπαριστά την φόρτιση που σχετίζεται με τις δυνάμεις και ροπές που δεν συμπεριλαμβάνονται στον υπολογισμό της δυναμικής ενέργειας. Η γενικευμένη δύναμη Ξ_i συμπεριλαμβάνει το δυνατό έργο των μη-συντηρητικών δυνάμεων που συνήθως είναι τα εξωτερικά φορτία που μπορεί να είναι και συνάρτηση της απόκρισης ιδιοσχημάτων (modal response). Οι γενικευμένες δυνάμεις μπορεί ακόμα να περιλαμβάνουν και φορτία απόσβεσης.

Η συνεισφορά κατανεμημένων φορτίων $F(x, t)$ προσδιορίζεται με τον υπολογισμό του δυνατού έργου που παράγουν

$$\delta \bar{W} = \int_0^l F(x, t) \delta v(x, t) dx \quad (\text{A.2.37})$$

όπου $\delta v(x, t)$ είναι η δυνατή μετατόπιση που εκφράζεται σε μορφή γενικευμένων συντεταγμένων και ιδιοσχημάτων

$$\delta v(x, t) = \sum_{i=1}^{\infty} \varphi_i(x) \delta \xi_i(t) \quad (\text{A.2.38})$$

όπου $\delta \xi_i(t)$ είναι μια αυθαίρετη μεταβολή της i^{th} γενικευμένης συντεταγμένης, δηλαδή

$$\begin{aligned} \delta \bar{W} &= \int_0^l \sum_{i=1}^{\infty} F(x, t) \varphi_i(x) \delta \xi_i dx \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \delta \xi_i \int_0^l F(x, t) \varphi_i(x) dx \end{aligned} \quad (\text{A.2.39})$$

και ορίζοντας ως γενικευμένη δύναμη

$$\Xi_i(t) = \int_0^l F(x, t) \varphi_i(x) dx \quad (\text{A.2.40})$$

το δυνατό έργο είναι

$$\delta \bar{W} = \sum_{i=1}^{\infty} \Xi_i \delta \xi_i \quad (\text{A.2.41})$$

Στην περίπτωση που τα εξωτερικά φορτία $F_c(t)$ είναι συγκεντρωμένα στα σημεία $x = x_c$ τότε αναπαρίστανται με την βοήθεια της συνάρτησης $\delta(x - x_c)$ (delta Dirac function)

$$F(x, t) = F_c(t) \delta(x - x_c) \quad (\text{A.2.42})$$

Η συνάρτηση $\delta(x)$ έχει τις παρακάτω βασικές ιδιότητες

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x) dx = 1$$

$$\int_a^b f(x) \delta(x - x_o) dx = f(x_o) \quad a < x_o < b$$

Η γενικευμένη δύναμη που οφείλεται σε συγκεντρωμένο φορτίο αναπαρίσταται ως :

$$\Xi_i(t) = \int_0^l F_c(t) \delta(x - x_c) \varphi_i(x) dx = F_c(t) \varphi_i(x_c) \quad (\text{A.2.43})$$

Ένα παράδειγμα εφαρμογής κατανεμημένου φορτίου είναι ο υπολογισμός της μετατόπισης χορδής με κατανεμημένο φορτίο που έχει αρμονική μεταβολή στον χρόνο

$$F(x, t) = \bar{F} \sin(\Omega t) \quad (\text{A.2.44})$$

Υποθέτουμε ότι η αρχική μετατόπιση και ταχύτητα της χορδής είναι μηδενικές. Η γενικευμένη δύναμη είναι

$$\begin{aligned}\Xi_i(t) &= \int_0^l F(x,t) \varphi_i(x) dx = \int_0^l \bar{F} \sin(\Omega t) \sin\left(\frac{i\pi x}{l}\right) dx \\ &= \frac{\bar{F}l}{i\pi} \sin(\Omega t) [1 - \cos(i\pi)] = \begin{cases} \frac{2\bar{F}l}{i\pi} & i = 2k+1 \\ 0 & i = 2k \end{cases}\end{aligned}$$

και η γενικευμένη εξίσωση κίνησης είναι

$$M_i (\ddot{\xi}_i + \omega_i^2 \xi_i) = \begin{cases} \frac{2\bar{F}l}{i\pi} \sin(\Omega t) & i = 2k+1 \\ 0 & i = 2k \end{cases}$$

Επειδή όμως $v(x,0) = \dot{v}(x,0) = 0$ τα ιδιοσχήματα $i = 2k$ δεν διεγείρονται ενώ για τα ιδιοσχήματα $i = 2k+1$ η γενική λύση είναι

$$\xi_i = A_i \sin(\omega_i t) + B_i \cos(\omega_i t) + C_i \sin(\Omega t) \quad (\text{A.2.45})$$

όπου οι δυο πρώτοι όροι αντιστοιχούν στην ομοιογενή λύση ενώ ο όρος $C_i \sin(\Omega t)$ αντιστοιχεί στην ειδική λύση λόγω του κατανεμημένου φορτίου. Οι σταθερές A_i και B_i υπολογίζονται από τις οριακές συνθήκες ως ακολούθως.

$$v(x,0) = \sum_{i=1}^{\infty} \varphi_i(x) \xi_i(0) = \sum_{i=1,3,..}^{\infty} B_i \sin\left(\frac{i\pi x}{l}\right) = 0 \quad (\text{A.2.46})$$

Από την παραπάνω σχέση και με την χρήση της ορθογωνιότητας βρίσκουμε

$$\sum_{i=1,3,..}^{\infty} B_i \int_0^l \sin\left(\frac{i\pi x}{l}\right) \sin\left(\frac{j\pi x}{l}\right) dx = 0 \Rightarrow B_i = 0, \quad i = 1, 3, 5, \dots \quad (\text{A.2.47})$$

Παρόμοια από την συνθήκη μηδενικής αρχικής ταχύτητας έχουμε

$$\dot{v}(x,0) = \sum_{i=1,3,..}^{\infty} \varphi_i(x) \dot{\xi}_i(0) = \sum_{i=1,3,..}^{\infty} (A_i \omega_i + C_i \Omega) \sin\left(\frac{i\pi x}{l}\right) = 0$$

και με εφαρμογή της ορθογωνιότητας βρίσκουμε

$$A_i = -\frac{\Omega C_i}{\omega_i} \quad i = 1, 3, 5, \dots \quad (\text{A.2.48})$$

Από τις Εξ. (A.2.45), (A.2.47), και (A.2.48), βρίσκουμε ότι οι γενικευμένες συντεταγμένες είναι

$$\xi_i = C_i \left[\sin(\Omega t) - \frac{\Omega}{\omega_i} \sin(\omega_i t) \right] \quad i = 1, 3, \dots \quad (\text{A.2.49})$$

και οι γενικευμένες εξισώσεις κίνησης

$$M_i C_i (\omega_i^2 - \Omega^2) \sin(\Omega t) = \frac{2\bar{F}l}{i\pi} \sin(\Omega t)$$

αλλά $M_i = m l / 2$ οπότε

$$C_i = \frac{4\bar{F}}{i\pi m (\omega_i^2 - \Omega^2)}$$

και η μετατόπιση είναι

$$v(x, t) = \sum_{i=1,3}^{\infty} \xi_i(t) \varphi_i(x) = \frac{4\bar{F}}{m\pi} \sum_{i=1,3,\dots}^{\infty} \left[\frac{\sin(\Omega t) - (\Omega/\omega_i) \sin(\omega_i t)}{i(\omega_i^2 - \Omega^2)} \right] \sin\left(\frac{i\pi x}{l}\right) \quad (\text{A.2.50})$$

Στην περίπτωση που η συχνότητα της εξωτερικής φόρτισης, Ω , πλησιάζει μια φυσική συχνότητα ω_i δηλαδή $\Omega \rightarrow \omega_i$, ή $\omega_i = \Omega + \varepsilon_i$, τότε ο όρος στην αγκύλη της Εξ. (A.2.50) είναι

$$\lim_{\varepsilon_i \rightarrow 0} \frac{\sin(\Omega t) - \frac{\Omega}{\Omega + \varepsilon_i} \sin[(\Omega + \varepsilon_i)t]}{i[(\Omega + \varepsilon_i)^2 - \Omega^2]} = \frac{\sin(\Omega t) - \Omega t \cos(\Omega t)}{2i \Omega^2}$$

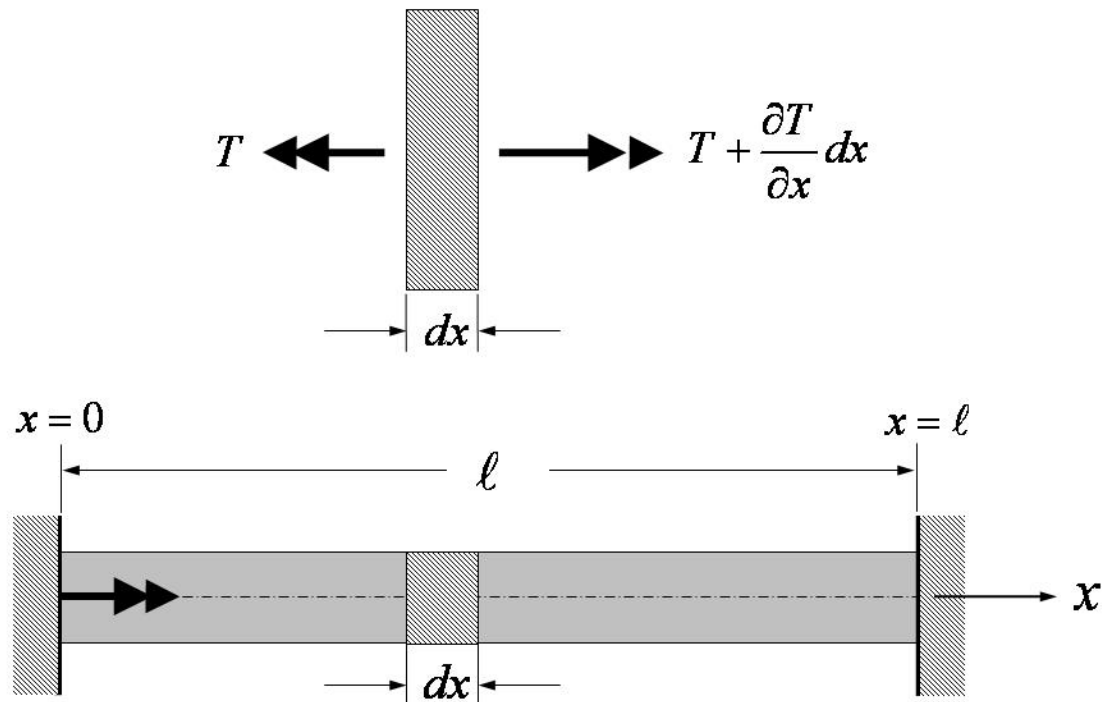
Δηλαδή ο όρος μέσα στην αγκύλη τείνει στο άπειρο για μεγάλους χρόνους και το εύρος απειρίζεται καθώς $t \rightarrow \infty$ δηλαδή επέρχεται συντονισμός (resonance).

A.3. Δυναμική στρεπτικών ταλαντώσεων

Οι βασικές αρχές της δυναμικής ανάλυσης κατασκευών παρουσιάστηκαν χρησιμοποιώντας το απλό παράδειγμα της ταλαντευόμενης χορδής. Οι αρχές αυτές εφαρμόζονται χωρίς ιδιαίτερη δυσκολία για την ανάλυση κατασκευών, που έχουν άμεσο συσχετισμό με αεροπορικές κατασκευές όπως είναι οι στρεπτικές ταλαντώσεις δοκού, οι οποίες χαρακτηρίζουν την δυναμική συμπεριφορά πτερύγων αεροσκαφών και ελικοπτέρων.

A. 3.1 Εξισώσεις κίνησης

Θεωρούμε ότι η δοκός έχει ομοιόμορφες ιδιότητες κατά μήκος του άξονά της, που θεωρείται ότι είναι ο ελαστικός άξονας της δοκού. Δηλαδή ο άξονας είναι η γραμμή που ενώνει τα κέντρα διάτμησης των διατομών της δοκού. Επίσης θεωρούμε ότι η στρέψη είναι ανεξάρτητη από την κάμψη.



Σχήμα A3. Δοκός σε στρεπτική παραμόρφωση.

Η εξίσωση κίνησης της δοκού υπό στρέψη είναι

$$T + \frac{\partial T}{\partial x} dx - T = \rho I_p dx \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} \quad (\text{A.3.1})$$

ή

$$\frac{\partial T}{\partial x} = \rho I_p \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} \quad (\text{A.3.2})$$

όπου I_p είναι η ροπή αδράνειας ανά μονάδα μήκους της δοκού

$$\rho I_p = \int_A \rho (y^2 + z^2) dA \quad (\text{A.3.3})$$

Η στρεπτική ροπή συνδέεται με τον ρυθμό στρέψης με την σχέση

$$T = GJ \frac{\partial \theta}{\partial x} \quad (\text{A.3.4})$$

και η εξίσωση κίνησης μη-ομοιόμορφης δοκού, δηλαδή δοκού με μεταβλητή διατομή στον κατά μήκος άξονα, είναι

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(GJ \frac{\partial \theta}{\partial x} \right) = \rho I_p \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} \quad (\text{A.3.5})$$

όπου $GJ(x)$ είναι η δυσκαμπτότητα σε στέψη (torsional rigidity) της δοκού. Για την ειδική περίπτωση δοκού με ομοιόμορφη διατομή η εξίσωση κίνησης είναι η μονοδιάστατη εξίσωση κύματος.

$$\frac{GJ}{\rho I_p} \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} \quad (\text{A.3.6})$$

που είναι ουσιαστικά η ίδια εξίσωση που περιγράφει τις ταλαντώσεις της χορδής και λύνεται με χωρισμό μεταβλητών $\theta(x,t) = X(x)Y(t)$
 $X''/x = (\rho I_p / GJ)(\ddot{Y}/Y) = -c^2$ που έχει γενική λύση

$$\begin{aligned} X(x) &= A \sin(cx) + B \cos(cx) \\ Y(t) &= C \sin(-\sqrt{c} t) + B \cos(-\sqrt{c} t) \end{aligned} \quad (\text{A.3.7})$$

Οριακές Συνθήκες

Υπάρχουν τέσσερις τύποι οριακών συνθηκών που μπορεί να εφαρμοσθούν στα άκρα της δοκού.

α) Πακτωμένη στο άκρο $x=l$ δοκός

$$\theta(l,t) = 0 = X(l)Y(t) \Rightarrow X(l) = 0$$

β) Ελεύθερη στο άκρο $x=l$ δοκός

Αυτή η οριακή συνθήκη συνεπάγεται ότι η στρεπτική ροπή στο άκρο της δοκού μηδενίζεται

$$T(l,t) = GJ \frac{\partial \theta(l,t)}{\partial x} = 0 \quad \text{ή} \quad \frac{\partial \theta(l,t)}{\partial x} = X'(l)Y(t) = 0 \Rightarrow X'(l) = 0$$

γ) Ελαστικά εδρασμένο άκρο δοκού

Δηλαδή η στρεπτική ροπή στο άκρο της δοκού είναι ίση με την ροπή που εξασκείται από ένα γραμμικό στρεπτικό ελατήριο.

$$T(l,t) = GJ \frac{\partial \theta(l,t)}{\partial x} = -k\theta(l,t)$$

όπου k είναι η σταθερά ελατηρίου, δηλαδή

$$GJX'(l)Y(t) = -kX(l)Y(t) \Rightarrow X'(l) = -\frac{k}{GJ}X(l)$$

δ) Αδρανειακός περιορισμός στο άκρο της δοκού

Ο αδρανειακός περιορισμός στο άκρο της δοκού σημαίνει ότι έχουμε ένα στερεό σώμα προσαρτημένο στο άκρο. Η ροπή αδράνειας του σώματος είναι I_c και η ροπή στο άκρο της δοκού είναι ίση και με αντίθετο πρόσημο της ροπής του σώματος για κάθε γωνιακή επιτάχυνση.

$$T(l,t) = GJ \frac{\partial \theta(l,x)}{\partial x} = -I_c \frac{\partial^2 \theta(l,t)}{\partial t^2}$$

$$GJX'(l)Y(t) = -I_c X(l)\ddot{Y}(t)$$

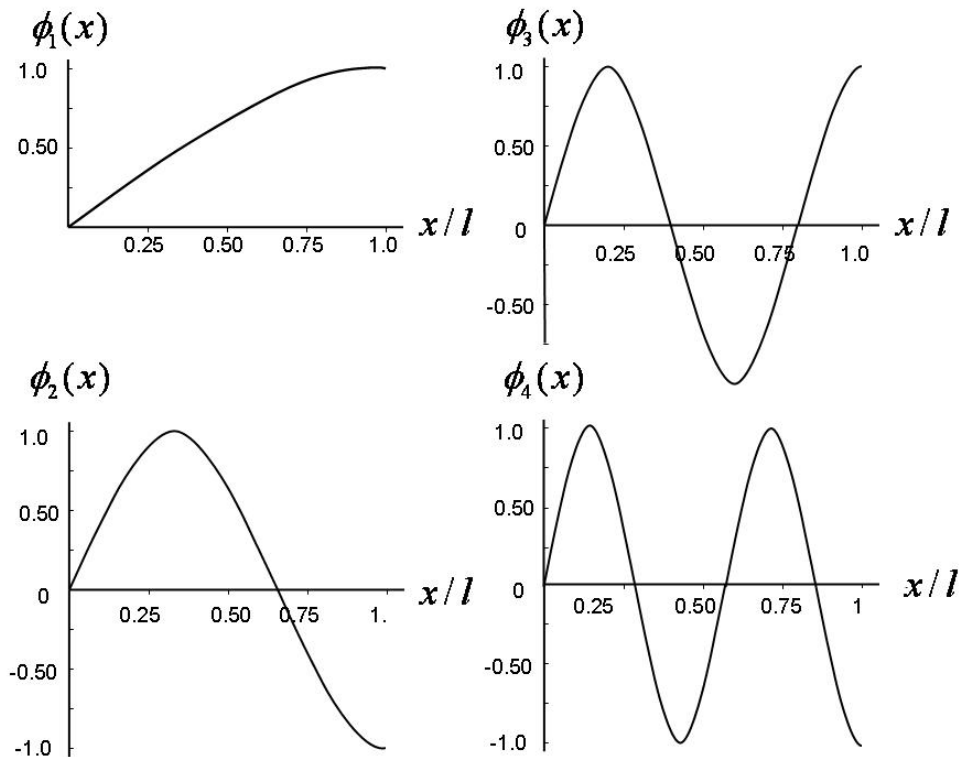
$$Y(t) = -C^2 \frac{GJ}{\rho I_p} Y(t)$$

$$X'(l) = -c^2 \frac{I_c}{\rho I_p} X(l)$$

Η λύση (δες. Εξ. Α.3.7) για δοκό πακτωμένη στο ένα άκρο, $X(0)=0$, και ελεύθερη στο άλλο άκρο, $X'(l)=0$, είναι

$$X(0)=0 \Rightarrow B=0$$

$$X'(l)=0 \Rightarrow cA \cos(cl) = 0 \Rightarrow \cos(cl) = 0 \Rightarrow c_i = \frac{(2i-1)\pi}{2}$$



Σχήμα Α4. Ιδιομορφές δοκού σε στρεπτική ταλάντωση..

Η δοκός εκτελεί αρμονική στρεπτική ταλάντωση με φυσική συχνότητα

$$\omega_i = c_i \sqrt{\frac{GJ}{\rho I_p}} = \frac{(2i-1)\pi}{2l} \sqrt{\frac{GJ}{\rho I_p}}, \quad i = 1, 2, \dots$$

Οι ιδιομορφές (modes shapes) που σχετίζονται με την κάθε ιδιοσυχνότητα c_i είναι

$$\varphi_i(x) = \sin(c_i x) = \sin\left[\frac{(2i-1)\pi x}{2l}\right]$$

Στο Σχ. Α.4 απεικονίζονται οι τέσσερις πρώτες ιδιομορφές στρεπτικής ταλάντωσης.

Α.4. Καμπτικές ταλαντώσεις δοκού

Η ταλάντωση μιας δοκού σε καμπτικές ταλαντώσεις αναφέρεται και σαν διαμήκης ταλάντωση (transverse vibration). Η εξίσωση κίνησης που διέπει τις διαμήκεις ταλαντώσεις είναι διαφορετικού τύπου από την εξίσωση που διέπει τις ταλαντώσεις χορδής και τις στρεπτικές ταλαντώσεις. Οι περισσότερες αεροδυναμικές κατασκευές υπόκεινται σε συνδυασμό στρεπτικής και καμπτικής ταλάντωσης. Στο κεφάλαιο όμως αυτό μελετάμε μόνο καμπτική ταλάντωση.

Θεωρούμε κάμψη της δοκού στο επίπεδο $x-y$ με καμπτική παραμόρφωση $v(x,t)$ στην κατεύθυνση y . Ο άξονας x υποτίθεται ευθύς, δηλαδή θεωρούμε μόνο ευθύγραμμες δοκούς.

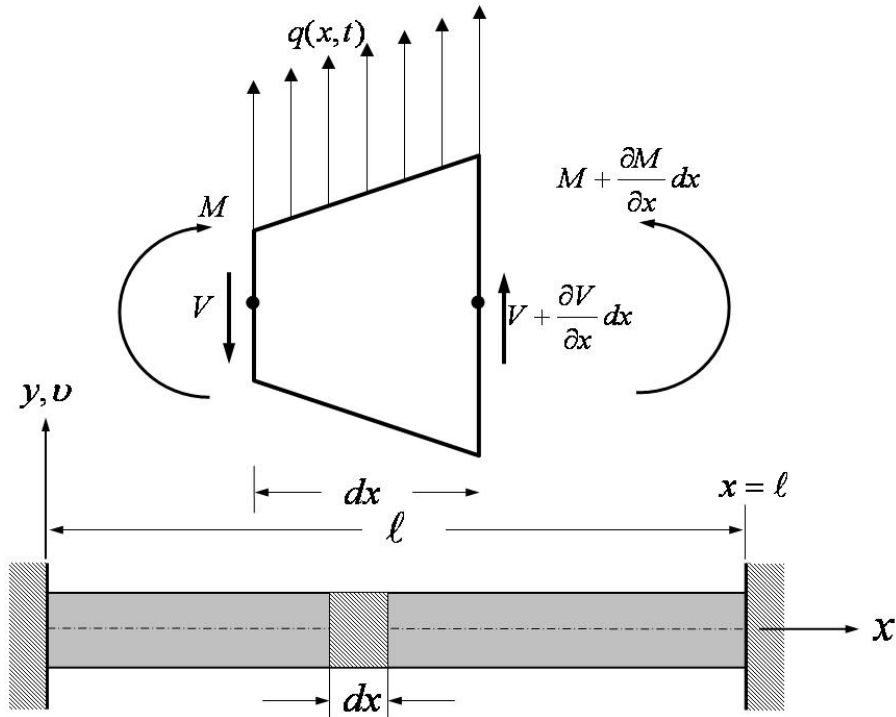
Το διάγραμμα ελεύθερου σώματος (δες Σχ. Α.5) του στοιχειώδους μήκους dx περιλαμβάνει την διατμητική δύναμη V και την καμπτική ροπή M και προκύπτουν από κατανεμημένο φορτίο $q(x,t)$. Η εξίσωση ισορροπίας δυνάμεων είναι

$$q(x,t) dx - V + \left(V + \frac{\partial V}{\partial x} dx \right) = m dx \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \quad (\text{A.4.1})$$

$$\text{ή} \quad -\frac{\partial V}{\partial x} + m \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = q(x,t)$$

η εξίσωση ισορροπίας ροπών είναι

$$-M + \left(M + \frac{\partial M}{\partial x} dx \right) + \left(V + \frac{\partial V}{\partial x} dx \right) dx - \frac{1}{2} m \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} dx^2 = 0 \quad (\text{A.4.2})$$



Σχήμα A5. Δοκός σε κάμψη..

όπου η καμπτική ροπή είναι ανάλογη της τοπικής καμπυλότητας και δίνεται από την σχέση

$$M = EI \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \quad (\text{A.4.3})$$

όπου E είναι το μέτρο ελαστικότητας και I η ροπή αδράνειας ως προς τον άξονα z . Η πρώτη βαθμού προσέγγιση της Εξ. (A.4.2) είναι

$$\frac{\partial M}{\partial x} + V = 0 \quad (\text{A.4.4})$$

Από τις Εξ. (A.4.1) , (A.4.3) και (A.4.4) βρίσκουμε ότι η εξίσωση κίνησης της δοκού σε καμπτικές ταλαντώσεις είναι

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(EI \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) + m \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = q(x, t) \quad (\text{A.4.5})$$

Οι ελεύθερες καμπτικές ταλαντώσεις της δοκού περιγράφονται από την παραπάνω εξίσωση για $q(x,t)=0$. Με την αντικατάσταση $b^4 = EI/m$ η εξίσωση ελεύθερων καμπτικών ταλαντώσεων είναι

$$b^4 \frac{\partial^4 v}{\partial x^4} + \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = 0 \quad (\text{A.4.6})$$

Η γενική λύση της παραπάνω γραμμικής εξίσωσης βρίσκεται με την μέθοδο χωρισμού μεταβλητών, $v(x,t) = X(x)Y(t)$.

$$\frac{X^{iv}}{X} = -\frac{1}{b^4} \frac{\ddot{Y}}{Y} = \beta^4 \quad (\text{A.4.7})$$

ή

$$X^{iv} - \beta^4 X = 0 \quad (\text{A.4.8})$$

$$\ddot{Y} + \beta^4 b^4 Y = 0$$

Η γενική λύση της χρονικής μεταβολής είναι

$$Y(t) = A \sin(\Omega t) + B \cos(\Omega t) \quad (\text{A.4.9})$$

όπου

$$\Omega = (b\beta)^2 = \beta^2 \sqrt{\frac{EI}{m}} = (\beta l)^2 \sqrt{\frac{EI}{ml^4}}$$

Η λύση της χωρικής μεταβολής βρίσκεται υποθέτοντας μια λύση της μορφής $X(x) = e^{\lambda x}$ και με αντικατάσταση στην Εξ. (A.4.8) προκύπτει ότι

$$\lambda^4 - \beta^4 = (\lambda - i\beta)(\lambda + i\beta)(\lambda + \beta)(\lambda - \beta) = 0$$

δηλαδή η γενική λύση της χωρικής μεταβολής έχει την μορφή

$$X(x) = D_1 \sin(\beta x) + D_2 \cos(\beta x) + D_3 \sinh(\beta x) + D_4 \cosh(\beta x) \quad (\text{A.4.9})$$

$$X(x) = E_1 [\sin(\beta x) + \sinh(\beta x)] + E_2 [\sin(\beta x) - \sinh(\beta x)] \\ + E_3 [\cos(\beta x) + \cosh(\beta x)] + E_4 [\cos(\beta x) - \cosh(\beta x)]$$

Απαιτείται ακόμη να εφαρμόσουμε δυο οριακές συνθήκες σε κάθε άκρο της δοκού. Όπως και στην περίπτωση των στρεπτικών ταλαντώσεων δοκού υπάρχουν τέσσερις τύποι οριακών συνθηκών με πρακτικό ενδιαφέρον.

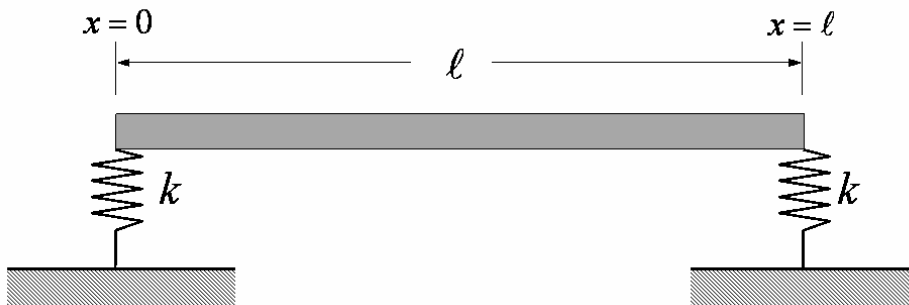
- | | |
|------------------------------|--|
| 1. Καθορισμένη μετατόπιση | $v(x,t) = X(x)Y(t)$ |
| 2. Καθορισμένη κλίση | $\partial v(x,t) / \partial x = X'(x)Y(t)$ |
| 3. Καθορισμένη καμπτική ροπή | $M(x,t) = EI \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = EIX''(x)Y(t)$ |
| 4. Καθορισμένη διάτμηση | $V(x,t) = -EI \frac{\partial^3 v}{\partial x^3} = EIX'''(x)Y(t)$ |

Η υλοποίηση αυτών των οριακών συνθηκών πραγματοποιούνται με τους παρακάτω τρόπους στήριξης.

1. Μετακινούμενος ελαστικός περιορισμός
2. Περιστρεφόμενος ελαστικός περιορισμός
3. Μετακινούμενος αδρανειακός περιορισμός
4. Περιστρεφόμενος αδρανειακός περιορισμός

A.4.1 Μετακινούμενος ελαστικός περιορισμός

Ο περιορισμός αυτός υλοποιείται με ένα ελατήριο όμως φαίνεται στο Σχ. Α6 και εκφράζει ότι η διάτμηση στο άκρο της δοκού είναι ίση με την τάση του ελατηρίου.



Σχήμα Α6. Μετακινούμενος ελαστικός περιορισμός.

$$EI \frac{\partial^3 v}{\partial x^3}(0,t) = -k v(0,t)$$

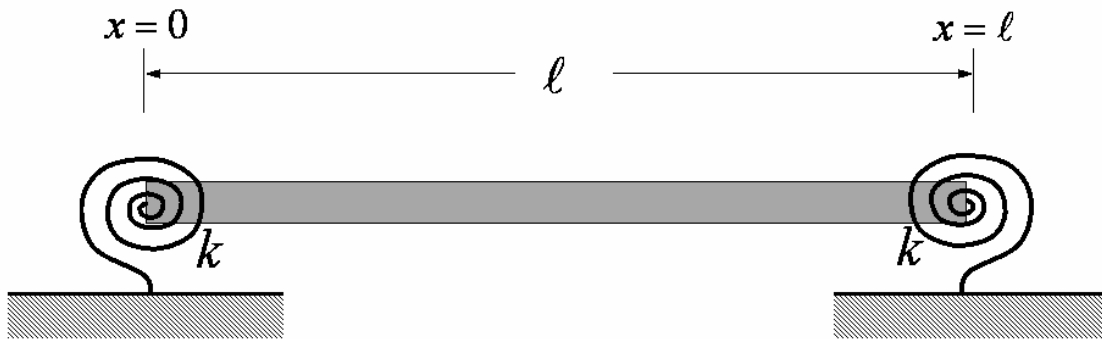
$$EI \frac{\partial^3 v}{\partial x^3}(l,t) = k v(l,t)$$

$$EIX'''(0) = -kX(0)$$

$$EIX'''(l) = kX(l)$$

A.4.2 Περιστρεφόμενος ελαστικός περιορισμός

Ο περιορισμός αυτός υλοποιείται με ένα στρεπτικό ελατήριο όμως φαίνεται στο Σχ. Α6 και εκφράζει ότι η καμπτική ροπή στο άκρο της δοκού είναι ίση με την στρεπτική τάση του ελατηρίου.



Σχήμα Α7. Περιστρεφόμενος ελαστικός περιορισμός.

$$EI \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(0,t) = k \frac{\partial v}{\partial x}(0,t)$$

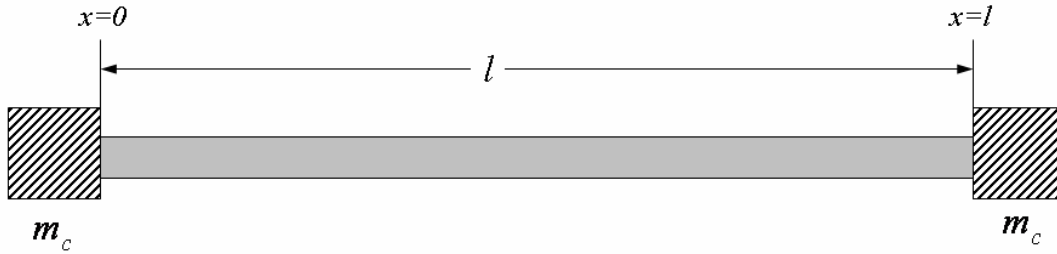
$$EI \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = -k \frac{\partial v}{\partial x}(l,t)$$

$$EIX''(0) = kX'(0)$$

$$EIX''(l) = -kX'(l)$$

A. 4.3 Μετακινούμενος αδρανειακός περιορισμός

Ο περιορισμός αυτός σημαίνει ότι υπάρχει αντίδραση στην επιτάχυνση από σώμα μάζας m_c που είναι προσαρτημένο στο άκρο της δοκού. Η δύναμη αντίδρασης είναι η διατμητική δύναμη στο άκρο



Σχήμα Α8. Περιστρεφόμενος ελαστικός περιορισμός.

$$EI \frac{\partial^3 v}{\partial x^3}(0,t) = -m_c \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}(0,t) \qquad EI \frac{\partial^3 v}{\partial x^3}(l,t) = m_c \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}(l,t)$$

$$EIX'''(0) = m_c b^4 \beta^4 X(0) \qquad EIX'''(l) = -m_c b^4 \beta^4 X(l)$$

Οι παραπάνω οριακές συνθήκες προκύπτουν διότι

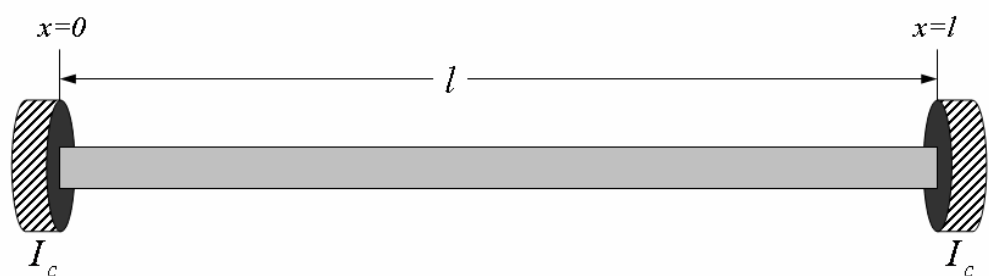
$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = X(x) \ddot{Y}(t) = -\omega^2 X(x) Y(t) = -\omega^2 v = -\beta^4 b^4 v$$

Α.4.4 Περιστρεφόμενος αδρανειακός περιορισμός

Οι οριακές συνθήκες που αντιστοιχούν στον περιορισμό του Σχ. Α9 είναι

$$EI \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(0,t) = I_c \frac{\partial^3 v}{\partial x \partial t}(0,t) = -I_c b^2 \beta^4 \frac{\partial v}{\partial x}(0,t) \Rightarrow EIX''(0) = -\beta^4 b^4 X'(0)$$

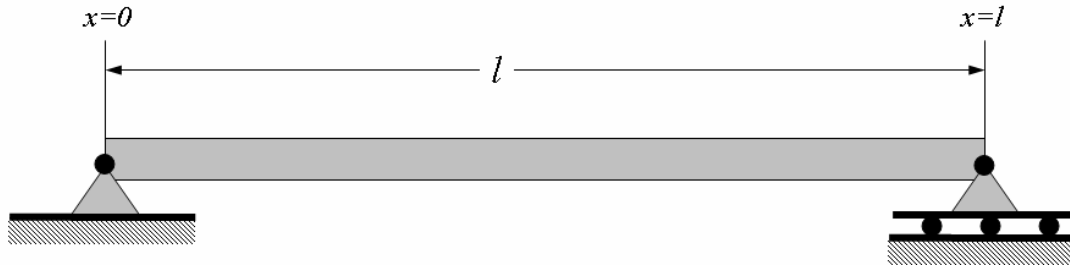
Παρόμοια στο δεξιό άκρο η συνθήκη είναι $EIX''(l) = I_c \beta^4 b^4 X'(l)$



Σχήμα Α9. Περιστρεφόμενος ελαστικός περιορισμός.

Παράδειγμα

Θεωρούμε καμπτική ταλάντωση δοκού του Σχ. Α10 που τα δυο άκρα της είναι ελεύθερα μόνο σε περιστροφή



Σχήμα Α10. Περιστρεφόμενος ελαστικός περιορισμός.

$$X(0) = X''(0) = 0 \quad X(l) = X''(l) = 0$$

Με αντικατάσταση στην γενική λύση των συνθηκών $X(0) = X''(0) = 0$ βρίσκουμε :

$$D_2 + D_4 = 0$$

$$\beta^2 (-D_2 + D_4) = 0$$

αλλά $\beta \neq 0$ οπότε $D_2 = D_4 = 0$ και η λύση είναι

$$X(x) = D_1 \sin(\beta x) + D_3 \sinh(\beta x)$$

Από τις οριακές συνθήκες στο άλλο άκρο της δοκού $x = l$ έχουμε

$$D_1 \sin(\beta l) + D_3 \sinh(\beta l) = 0$$

$$-D_1 \sin(\beta l) + D_3 \sinh(\beta l) = 0$$

που έχει λύση μόνον όταν η ορίζουσα του παραπάνω συστήματος γραμμικών εξισώσεων είναι μηδέν, δηλαδή όταν

$$2 \sin(\beta l) \sinh(\beta l) = 0$$

και επειδή $\beta \neq 0$ η παραπάνω σχέση ικανοποιείται μόνο όταν

$$\sin(\beta l) = 0 \Rightarrow \beta_i = \frac{i\pi}{l}, \quad i = 1, 2, \dots$$

Οπότε οι φυσικές συχνότητες είναι

$$\omega_i^2 = \beta_i^4 b^4 = \frac{EI\beta_i^4}{m}$$

ή

$$\omega_i = \beta_i^2 \sqrt{\frac{EI}{m}} = \left(\frac{i\pi}{l}\right)^2 \sqrt{\frac{EI}{m}} = (i\pi)^2 \sqrt{\frac{EI}{ml^4}}$$

Δηλαδή για την κάθε φυσική συχνότητα υπάρχει ένα μοναδικό σχήμα παραμόρφωσης που ονομάζεται ιδιομορφή (mode shape) που είναι

$$X_i = (D_1)_i \sin\left(\frac{i\pi x}{l}\right) \quad i = 1, 2, \dots$$

όπου το εύρος $(D_1)_i$ είναι αυθαίρετο οπότε μπορούμε να θεωρήσουμε ότι $(D_1)_i = 1$ και η ιδιομορφή είναι

$$\varphi_i = \sin \frac{i\pi x}{l}$$

Που συμβαίνει να είναι και η ιδιομορφές της ταλαντευόμενης χορδής

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Β

Β.1. Μέθοδοι επίλυσης προβλημάτων ταλάντωσης κατασκευών

Ο προσδιορισμός της δυναμικής συμπεριφοράς κατασκευών βασίζεται σε δύο κλασσικές μεθόδους που περιγράφονται σύντομα σ' αυτό το κεφάλαιο. Οι μέθοδοι αυτοί χρησιμοποιούν τις ιδιομορφές ή άλλες συναρτήσεις. Σύντομη ανασκόπηση των ιδιομορφών και των εξισώσεων κίνησης Lagrange έγινε στο Παράρτημα Α όπου παρουσιάστηκαν και αναλυτικές λύσεις για ορισμένα απλά προβλήματα. Στο κεφάλαιο αυτό παρουσιάζεται μια σύντομη αναδρομή μεθόδων που χρησιμοποιούν ένα πεπερασμένο αριθμό ιδιομορφών για την εύρεση προσεγγιστικής λύσης. Οι δυο βασικές μέθοδοι είναι *μέθοδος Galerkin* και η *μέθοδος Ritz* που βασίζεται στην αρχή των δυνατών έργων. Η εφαρμογή αυτών των μεθόδων δίνει τα ίδια αποτελέσματα σε ορισμένες περιπτώσεις. Αρχικά παρουσιάζεται η μέθοδος Ritz που βασίζεται στην θεωρία των εξισώσεων Lagrange που παρουσιάστηκε στο παράρτημα Α.

Β.1.1 Η μέθοδος Ritz

Η μέθοδος Ritz βασίζεται στις εξισώσεις Lagrange

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L_i}{\partial \dot{\xi}_i} \right) - \frac{\partial L_i}{\partial \xi_i} = \Xi_i \quad , \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (\text{B.1.1})$$

όπου L είναι η Lagrangian του συστήματος $L = K - P$, που όπως και προηγουμένως K είναι η ολική κινητική ενέργεια, P είναι η δυναμική ενέργεια n είναι ο αριθμός των γενικευμένων συντεταγμένων ξ_i που θεωρούμε, και Ξ_i είναι οι γενικευμένες δυνάμεις. Η δυναμική ενέργεια P αντιπροσωπεύει τις συντηρητικές δυνάμεις, ενώ οι γενικευμένες δυνάμεις Ξ_i περιλαμβάνουν οποιαδήποτε είδους φόρτιση συμπεριλαμβανομένης και της απόσβεσης. Το δυνατό έργο συνδέεται με τις γενικευμένες δυνάμεις με την σχέση

$$\overline{\delta w} = \sum_{i=1}^n \Xi_i \delta \xi_i \quad (\text{B.1.2})$$

όπου $\delta \xi_i$ είναι μια αυθαίρετη μεταβολή της i γενικευμένης συντεταγμένης. Η μέθοδος Ritz θα παρουσιασθεί θεωρώντας σαν παράδειγμα την δοκό.

Η ολική κινητική ενέργεια της δοκού που υπόκεινται σε καμπτικό φορτίο περιλαμβάνει την κινητική ενέργεια της δοκού και όλων των προσαρτημένων σ' αυτήν σωμάτων. Η κινητική ενέργεια της δοκού είναι

$$K_b = \frac{1}{2} \int_0^l m \left(\frac{\partial v}{\partial t} \right)^2 dx \quad (\text{B.1.3})$$

όπου m είναι η μάζα ανά μονάδα μήκους.

Η δυναμική ενέργεια P περιλαμβάνει την ενέργεια παραμόρφωσης του δοκού (internal strain energy of the beam) που συμβολίζεται με U και την δυναμική ενέργεια, V , που οφείλεται στην βαρύτητα, ελαστικές εδράσεις της δοκού και στατικά επιβεβλημένα φορτία. Όλα τα άλλα φορτία όπως αεροδυναμικά φορτία, αποσβέσεις, κλπ. εκφράζονται με την βοήθεια της γενικευμένης δύναμης.

Η ενέργεια παραμόρφωσης της δοκού είναι

$$U = \frac{1}{2} \int_0^l EI \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right)^2 dx \quad (\text{B.1.4})$$

ενώ η έκφραση της δυναμικής ενέργειας V εξαρτάται από την φόρτιση και τις οριακές συνθήκες του συγκεκριμένου προβλήματος.

Το δυνατό έργο είναι

$$\overline{\delta w} = \int_0^l f(x,t) \delta v(x,t) dx \quad (\text{B.1.5})$$

όπου $f(x,t)$ είναι η κατανομημένη δύναμη ανά μονάδα μήκους και θεωρείται θετική όταν έχει φορά στην θετική v κατεύθυνση, και δv είναι μια μεταβολή της μετατόπισης v για σταθερό χρόνο.

Η εφαρμογή της μεθόδου Ritz απαιτεί την έκφραση των ποσοτήτων K , P και $\overline{\delta w}$ με πεπερασμένες σειρές. Για μια δοκό που υπόκειται σε κάμψη η μετατόπιση $v(x,t)$ εκφράζεται ως

$$v(x,t) = \sum_{i=1}^n \xi_i(t) \varphi_i(x) \quad (\text{B.1.6})$$

Οι συναρτήσεις $\varphi_i(x)$ (ιδιομορφές) έχουν τα παρακάτω χαρακτηριστικά :

1. Κάθε συνάρτηση $\varphi_i(x)$ πρέπει να ικανοποιεί τις οριακές συνθήκες για την μετατόπιση και την περιστροφή. Ο τύπος αυτός των οριακών συνθηκών αναφέρεται και ως γεωμετρικές οριακές συνθήκες. Πρέπει να σημειωθεί ότι η εύρεση συναρτήσεων που να ικανοποιούν όλες τις οριακές συνθήκες δεν είναι εύκολη.
2. Οι συναρτήσεις $\varphi_i(x)$ πρέπει να είναι συνεχείς και παραγωγίσιμες p φορές όπου p είναι η τάξη της ανώτερης χωρικής παραγώγου που εμφανίζεται στην Lagrangian. Επιπλέον η p τάξης παράγωγος τουλάχιστον μια συνάρτηση πρέπει να είναι διαφορετική του μηδενός. Στο παράδειγμα της δοκού σε κάμψη η ανώτερης τάξης παράγωγος είναι η δευτέρας τάξης παράγωγος Εξ. (1.4) και $p = 2$.
3. Οι συναρτήσεις $\varphi_i(x)$ πρέπει να είναι πλήρεις (complete) που σημαίνει, ότι κάθε συνάρτηση στο διάστημα $0 \leq x \leq l$, που ικανοποιεί τις ίδιες οριακές συνθήκες με το πρόβλημα, μπορεί να εκφρασθεί σαν γραμμικός συνδυασμός του συνόλου $\varphi_i(x)$ με οποιονδήποτε επιθυμητό βαθμό ακρίβειας. Παραδείγματα πλήρων συνόλων συναρτήσεων βάσης στο διάστημα $0 \leq x \leq l$ είναι $1, x, x^2, \dots$ και $\sin(\pi x/l), \sin(2\pi x/l)$.
4. Οι συναρτήσεις βάσης πρέπει να είναι γραμμικά ανεξάρτητες δηλαδή

$$\sum_{i=0}^n a_i \varphi_i(x) = 0 \Rightarrow a_i = 0 \forall_i$$

Χρησιμοποιώντας ένα σύνολο συναρτήσεων με τις παραπάνω ιδιότητες η μετατόπιση που έχει άπειρους βαθμούς ελευθερίας μπορεί να εκφρασθεί με ένα πεπερασμένο ανάπτυγμα σειράς. Η χρήση αναπτύγματος σειράς οδηγεί στην λύση ενός συστήματος ή συνήθων διαφορικών αντί για μια εξίσωση με μερικές παραγώγους. Το πλήθος των όρων του αναπτύγματος n αυξάνεται μέχρι να επιτευχθεί σύγκλιση. Στην συνέχεια θα δείξουμε την χρήση των συναρτήσεων φ_i για το παράδειγμα της δοκού.

Θεωρούμε ένα σύνολο συναρτήσεων $\varphi_i, i = 1, 2, \dots$ που είναι πλήρες, p – φορές παραγωγίσιμες, γραμμικά ανεξάρτητες, και ικανοποιούν τις οριακές συνθήκες μετατόπισης.

Η ενέργεια μετατόπιση U εκφράζεται με σειρά η ορών ως

$$U = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \xi_i \xi_j \int_0^l EI \varphi_i'' \varphi_j'' dx \quad (\text{B.1.7})$$

Η κινητική ενέργεια της δοκού εκφράζεται επίσης ως

$$K_b = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \dot{\xi}_i \dot{\xi}_j \int_0^l m \varphi_i \varphi_j dx \quad (\text{B.1.8})$$

Το δυνατό έργο περιλαμβάνει όλα τα συγκεντρωμένα και κατανεμημένα φορτία που προέρχονται από απόσβεση ή αεροδυναμική σύζευξη και εκφράζεται ως

$$\overline{\delta w} = \sum_{i=1}^n \delta \xi_i \left[\int_0^l f(x,t) \varphi_i dx + F_c(x_o,t) \varphi_i(x_o) \right] \quad (\text{B.1.9})$$

όπου x_o είναι η συντεταγμένη x όπου ενεργεί το συγκεντρωμένο φορτίο. Στην Εξ. (B.1.9) ο πρώτος όρος $f(x,t)$ αντιστοιχεί στο κατανεμημένο φορτίο $f(x,t)$ στο εσωτερικό της δοκού και ο δεύτερος όρος στο συγκεντρωμένο φορτίο. Στις αεροελαστικές εφαρμογές υπάρχει ακόμα εξάρτηση των φορτίων $f(x,t)$ και $F_c(x_o,t)$ από την μετατόπιση.

Τα ολοκληρώματα στις Εξ. (B.1.7) – (B.1.9) περιέχουν μόνο τις συναρτήσεις βάσεις και τις παραγώγους των, που μπορεί να υπολογισθούν αναλυτικά. Με τις παραπάνω αντικαταστάσεις οι εξισώσεις κίνησης Lagrange γράφονται στην μορφή.

$$[M]\{\ddot{\xi}\} = [C]\{\dot{\xi}\} + [K]\{\xi\} = \{F\} \quad (\text{B.1.10})$$

Στο παραπάνω σύστημα συνήθων διαφορικών ως προς τον χρόνο όπου οι ποσότητες που εμφανίζονται συμβολίζουν

$\{\xi\}$ είναι το διάνυσμα των γενικευμένων συντεταγμένων

$\{F\}$ είναι το διάνυσμα των γενικευμένων δυνάμεων.

$[M]$ είναι ένα μητρώο και ονομάζεται *μητρώο μάζας* (mass matrix) της κινητικής ενέργειας.

$[C]$ είναι μητρώο και ονομάζεται το *μητρώο απόσβεσης*, και

$[K]$ είναι μητρώο και ονομάζεται *μητρώο δυσκαμπτότητας* (stiffness matrix) ή ενέργεια παραμόρφωσης.

Οι σημαντικές συνεισφορές στο μητρώο μάζας $[M]$ προέρχονται από την κινητική ενέργεια και είναι συμμετρικές. Οι σημαντικές συνεισφορές στο μητρώο δυσκαμπτότητας $[K]$ προέρχονται από την ενέργεια παραμόρφωσης και την δυναμική ενέργεια εδράσεων ελατηρίου που ανθίσταται στην μετατόπιση. Η απόσβεση συνεισφέρει στο μητρώο $[C]$ δια μέσου του δυνατού έργου. Τα αεροδυναμικά φορτία έχουν συνεισφορές στα μητρώα $[M]$, $[C]$, και $[K]$.

Μια ειδική μορφή της μεθόδου Ritz προκύπτει όταν η φόρτιση είναι συντηρητική. Τότε η μέθοδος αναφέρεται ως Rayleigh –Ritz (R-R) μέθοδος και έχει αποτελέσει αντικείμενο εκτεταμένης μαθηματικής μελέτης. Η μέθοδος R-R συνδυασμένη με την ανάλυση πεπερασμένων στοιχείων, γνωστή και ως R-R μέθοδος πεπερασμένων στοιχείων (the Rayleigh –Ritz finite element method), που βασίζεται στην αρχή ελαχιστοποίησης της δυναμικής ενέργειας, αποδείχτηκε δε ότι είναι ιδιαίτερα επιτυχής στην αντιμετώπιση προβλημάτων ελαστικότητας, μεταφοράς θερμότητας και στατικού ηλεκτρομαγνητισμού. Γι' αυτό τον λόγο έχει γίνει η κύρια μέθοδος αριθμητικής επίλυσης περίπλοκων πρακτικών προβλημάτων σ' αυτές τις περιοχές έρευνας και εφαρμογής. Η μέθοδος Rayleigh –Ritz μπορεί όμως να εφαρμοσθεί μόνο για εξισώσεις, ή συστήματα εξισώσεων, που οι τελεστές τους είναι αυτό-συζυγείς (self-adjoint operators). Η μέθοδος Galerkin, που θα περιγράψουμε στο επόμενο κεφάλαιο, αποδείχτηκε επιτυχής για την κατάστρωση αλγορίθμων αριθμητικής επίλυσης με την μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων μεγάλης ποικιλίας προβλημάτων.

B.1.3. Η Μέθοδος Galerkin

Η μέθοδος Galerkin είναι ουσιαστικά μία μέθοδος βάρους υπολοίπου (weighted residual) που βασίζεται στην αρχή των δυνατών έργων και προκύπτει απ' ευθείας από την εξίσωση κίνησης που συμβολίζεται ως

$$L[v(x,t)] = 0 \quad (\text{B.1.11})$$

όπου L αναπαριστά ένα τελεστή μερικών παραγώγων με ανώτερη τάξη παραγωγίσιμης q . Στα προβλήματα δυναμικής των κατασκευών που

παρουσιάστηκαν είναι $q = 2p$ όπου p είναι η τάξη της παραγώγου στην Lagrangian, αλλά στην γενική περίπτωση $q \neq 2p$.

Παρόμοια με την μέθοδο Ritz η μετατόπιση εκφράζεται σε ανάπτυγμα σειράς συναρτήσεων βάσης.

$$v(x,t) = \sum_{j=1}^n \xi_j(t) \varphi_j(x) \quad (\text{B.1.12})$$

Οι συναρτήσεις βάσης που χρησιμοποιούνται στην μέθοδο Galerkin απαιτείται να ικανοποιούν πιο περιορισμένες συνθήκες από εκείνες των συναρτήσεων βάσης στην μέθοδο Ritz. Οι συνθήκες αυτές είναι

1. Κάθε συνάρτηση βάσης πρέπει να ικανοποιεί τις οριακές συνθήκες του προβλήματος. Η ικανοποίηση αυτής της συνθήκης δεν είναι εύκολη.
2. Κάθε συνάρτηση βάσης πρέπει να είναι q φορές διαφορίσιμη και η q^{th} τάξης παράγωγος τουλάχιστον μιας συνάρτησης βάσης πρέπει να είναι μηδέν.
3. Οι συναρτήσεις βάσεις πρέπει να αποτελούν πλήρες σύνολο (complete set).
4. Οι συναρτήσεις βάσεις πρέπει να είναι γραμμικά ανεξάρτητες.

Η διαφορική εξίσωση μερικών παραγώγων (ΔΜΠ) ή το σύστημα ΔΜΠ που ικανοποιούν οι εξισώσεις κίνησης πολλαπλασιάζεται με τις συναρτήσεις βάσης φ_j και ολοκληρώνεται στο χωρίο ορισμού των ανεξάρτητων μεταβλητών (που για την δοκό είναι $0 \leq x \leq l$). Κατόπιν αυτών από την ΔΜΠ προκύπτει ένα σύστημα n συνήθων διαφορικών ή ένα σύστημα n αλγεβρικών εξισώσεων αν η εξίσωση κίνησης είναι μια συνήθης διαφορική.

Παραδείγματος χάριν όταν θεωρήσουμε την κάμψη της δοκού η εξίσωση κίνησης είναι

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(EI \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) + m \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - f(x,t) = 0 \quad (\text{B.1.13})$$

όπου EI είναι η δυσκαμπτότητα της δοκού (flexural rigidity), m είναι η μάζα ανά μονάδα μήκους, και $f(x,t)$ είναι η φόρτιση που σε αεροελαστικές εφαρμογές μπορεί να εξαρτάται και από την μετατόπιση.

Οι εξισώσεις που προκύπτουν από την μέθοδο Galerkin έχουν την ίδια μορφή με τις εξισώσεις που προκύπτουν από την μέθοδο Ritz.

$$[M]\{\ddot{\xi}\} + [C]\{\dot{\xi}\} + [K]\{\xi\} = \{F\} \quad (\text{B.1.14})$$

όπου πάλι

- $\{\xi\}$ είναι το διάνυσμα γενικευμένων συντεταγμένων.
- $\{F\}$ είναι το διάνυσμα γενικευμένων δυνάμεων που δεν εξαρτώνται από τις γενικευμένες συντεταγμένες
- $[M]$ είναι το μητρώο μάζας,
- $[C]$ είναι το μητρώο απόσβεσης
- $[K]$ είναι το μητρώο δυσκαμπτότητας.

Η εφαρμογή της μεθόδου Galerkin παρουσιάζεται για το παράδειγμα της δοκού όπου θεωρούμε ένα πλήρες σύνολο συναρτήσεων βάσης $\varphi_j, j=1,2,\dots$ που είναι γραμμικά ανεξάρτητο και 4 φορές παραγωγίσιμο. Μετά αντικατάσταση της Εξ. (B.1.12) στην Εξ. (B.1.13) και ολοκλήρωση έχουμε

$$\int_0^l \varphi_i \left[\sum_{j=1}^n \xi_j (EI \varphi_j'') + \sum_{j=1}^n \ddot{\xi}_j m \varphi_j - f(x,t) \right] dx = 0, \quad i=1,2,\dots \quad (\text{B.1.15})$$

ή

$$\sum_{j=1}^n \left(\xi_j \int_0^l EI \varphi_i'' \varphi_j'' dx + \ddot{\xi}_j \int_0^l m \varphi_i \varphi_j dx \right) - \int_0^l f \varphi_i dx = 0 \quad i=1,2,\dots \quad (\text{B.1.16})$$

που προκύπτει με ολοκλήρωση του πρώτου όρου κατά μέλη και εφαρμογή των οριακών συνθηκών.

Θεωρώντας ως οριακές συνθήκες πατωμένο / ελεύθερο άκρο έχουμε $v(0,t) = v'(0,t) = 0$ και $v''(l,t) = v'''(l,t) = 0$. Υποθέτοντας ότι

$$\varphi_i'' = \frac{1}{l^2} \left(1 - \frac{x}{l} \right)^2 \left(\frac{x}{l} \right)^{i-1}$$

που ικανοποιεί τις οριακές συνθήκες στο $x = 0$ και $x = l$ βρίσκουμε με ολοκλήρωση

$$\varphi_i = \frac{(x/l)^{1+i} \left\{ 6 + i^2 (1 - x/l)^2 + i \left[5 + 6x/l + (x/l)^2 \right] \right\}}{i(i+1)(i+2)(i+3)}$$

Τα στοιχεία του μητρώου δυσκαμπτότητας είναι

$$K_{ij} = \int_0^l EI \varphi_i'' \varphi_j'' dx = \frac{24EI}{l^3 (i+j-1)(i+j)(i+j+1)(2+i+j)(3+i+j)}$$

Τα στοιχεία του μητρώου μάζας είναι

$$M_{ij} = \int_0^l m \phi_i \phi_j dx = ml p_1 / p_2$$

$$p_1 = 30240 + 28512(i+j) + 9672(i^2 + j^2) + 1392(i^3 + j^3) + 72(i^4 + j^4)$$

$$+ 20040 i j + 4520(i^2 j + i j^2) + 320(i^3 j + i j^3) + 520 i^2 j^2$$

$$p_2 = i(i+1)(i+2)j(j+1)(j+2)(i+j+3)(i+j+4)(i+j+5)(i+j+6)(i+j+7)$$

Η μέθοδος Galerkin συναντά δυσκολίες όταν εφαρμόζεται σε προβλήματα που δεν διέπονται από αυτό-συζυγείς τελεστές, όπως είναι τα προβλήματα της ρευστομηχανικής. Οι δυσκολίες αυτές σχετίζονται με αριθμητική ευστάθεια, με ταλαντώσεις της αριθμητικής λύσης και κακή προσέγγιση των παραγώγων. Η μέθοδος ελαχίστων τετραγώνων πεπερασμένων στοιχείων (the least-square finite element method LSFEM), που βασίζεται στην ελαχιστοποίηση του L_2 μέτρου των υπολοίπων (L_2 norm of the residuals) ενός συστήματος πρώτης τάξης διαφορικών εξισώσεων, όπως οι εξισώσεις ρευστοδυναμικής, απαλείφει αυτά τα μειονεκτήματα της μεθόδου Galerkin και έλαβε ιδιαίτερη προσοχή τα τελευταία χρόνια.

B.1.4 Η Αρχή του Hamilton

Η αρχή του Hamilton (Hamilton's principle) είναι ακόμη μία γενική μέθοδος επίλυσης προβλημάτων δυναμικής των κατασκευών και επιβάλλει ότι:

Μεταξύ όλων των δυνατών και συμβατών καταστάσεων μετατόπισης που μπορεί να υπάρξουν σε κάποιο χρονικό διάστημα και ικανοποιούν:

- a) Τις συνθήκες συμβατότητας.
- b) Τις κινηματικές οριακές συνθήκες (essential displacement or kinematic boundary conditions).
- c) Τις συνθήκες στον αρχικό, t_1 , και στον τελικό χρόνο, t_2 .

Το διάνυσμα παραμόρφωσης \mathbf{u} που αντιστοιχεί στην λύση καθιστά την Lagrangian L του συστήματος ελάχιστη.

Η μαθηματική έκφραση της αρχής Hamilton είναι:

$$\boxed{\delta \int_{t_1}^{t_2} L dt = 0} \quad (\text{B.1.17})$$

Όπου L είναι το συναρτησιακό (functional) της Lagrangian και ορίζεται ως

$$L = K - P + W_f \quad (\text{B.1.18})$$

Στον παραπάνω ορισμό K είναι η δυναμική ενέργεια, P συμβολίζει την δυναμική ενέργεια, και W_f είναι το έργο που εκτελούν οι εξωτερικές δυνάμεις.

Η κινητική ενέργεια είναι

$$K = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \rho \dot{\mathbf{u}} \dot{\mathbf{u}}^T d\Omega \quad (\text{B.1.19})$$

όπου Ω είναι ο όγκος που καταλαμβάνει η στερεά κατασκευή. Η δυναμική ενέργεια της ελαστικής κατασκευής είναι η ενέργεια παραμόρφωσης (strain energy) και δίνεται από

$$K = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\sigma} d\Omega \quad (\text{B.1.20})$$

όπου η διανυσματική μορφή του τανυστή της τάσης γράφεται ως

$$\boldsymbol{\sigma}^T = \{ \sigma_{xx} \sigma_{yy} \sigma_{zz} \sigma_{yz} \sigma_{xz} \sigma_{xy} \}$$

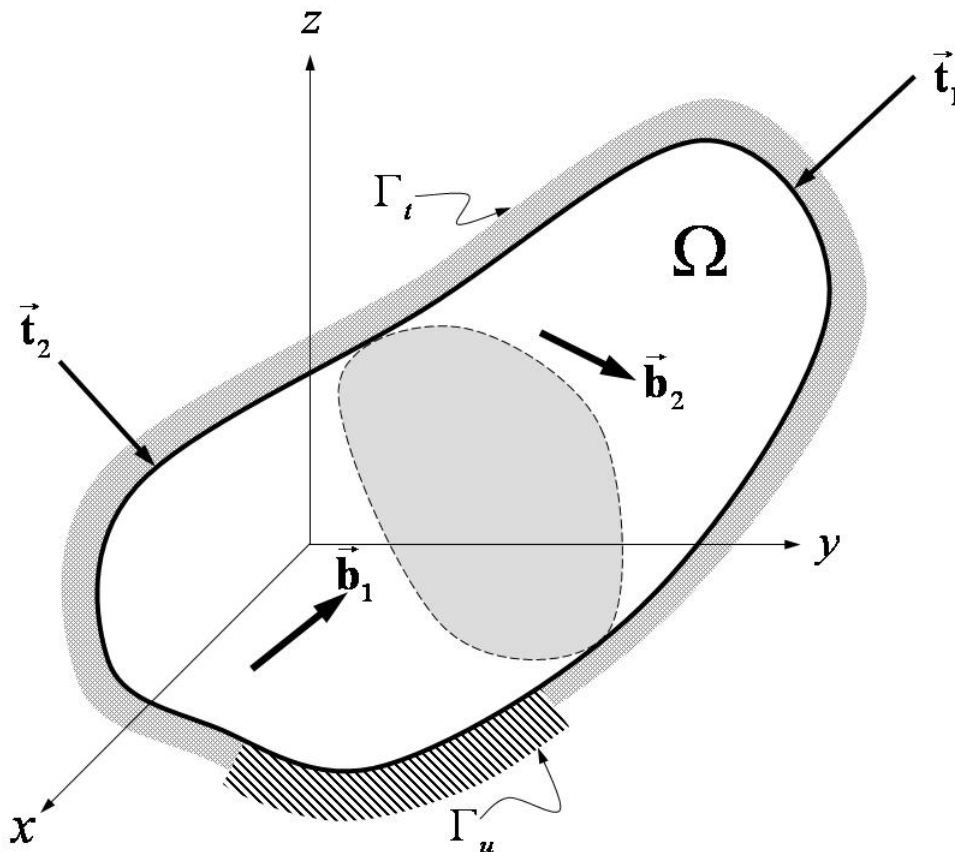
και η διανυσματική μορφή του τανυστή της παραμόρφωσης είναι

$$\boldsymbol{\varepsilon}^T = \{ \varepsilon_{xx} \varepsilon_{yy} \varepsilon_{zz} \varepsilon_{yz} \varepsilon_{xz} \varepsilon_{xy} \} .$$

Το έργο των εξωτερικών δυνάμεων δίνεται από

$$W_f = \int_{\Omega} \mathbf{u}^T \mathbf{b} d\Omega + \int_{\Gamma_t} \mathbf{u}^T \bar{\mathbf{t}} d\Gamma \quad (\text{B.1.21})$$

όπου \mathbf{b} είναι οι δυνάμεις πεδίου (body forces), $\bar{\mathbf{t}}$ οι εξωτερικές επιβεβλημένες φορτίσεις, και Γ_t (δες Σχ. B.1) είναι το σύνορο της ελαστικής κατασκευής όπου ενεργούν οι επιβεβλημένες φορτίσεις,



Σχήμα A11. Φορτίσεις ελαστικής κατασκευής.

Η διαδικασία που ακολουθείται για την επίλυση προβλημάτων με την χρήση της αρχής του Hamilton είναι:

1. Κατάσρωση μιας συνάρτησης μορφής (shape function) που προσεγγίζει τις συναρτήσεις πεδίου στους κόμβους του χωρίου επίλυσης Ω . Οι προσεγγιστικές τιμές των συναρτήσεων μεταβλητών πεδίου πρέπει να είναι συνεπείς (consistent) και αποδεκτές (admissible).
2. Υπολογισμός της κινητικής ενέργειας K , της δυναμικής ενέργειας P και του έργου W_f από τις προσεγγιστικές συναρτήσεις πεδίου.
3. Εύρεση της Lagrangian $L = K - P + W_f$ και αντικατάσταση της στην μαθηματική μορφή της αρχής του Hamilton, $\delta \int_{t_1}^{t_2} L dt = 0$.
4. Διαχωρισμός χρονικών και χωρικών ολοκληρωμάτων και κατάσρωση ενός συστήματος συνήθων διαφορικών ως προς τον χρόνο.
5. Αριθμητική επίλυση του συστήματος συνήθων διαφορικών.

Στα προβλήματα ελαστικότητας η ασθενής μορφή Galerkin μπορεί να βρεθεί με χρήση της αρχής Hamilton. Με την χρήση των Εξ. (B.1.18)-(B.1.21) βρίσκουμε ότι η Lagrangian είναι

$$L = -\frac{1}{2} \int_{\Omega} \boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\sigma} d\Omega + \int_{\Omega} \mathbf{u}^T \mathbf{b} d\Omega + \int_{\Gamma_t} \mathbf{u}^T \bar{\mathbf{t}} d\Gamma + \frac{1}{2} \int_{\Omega} \rho \dot{\mathbf{u}}^T \dot{\mathbf{u}} d\Omega \quad (\text{B.1.22})$$

και με αντικατάσταση στην αρχή Hamilton βρίσκουμε

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} \left\{ -\frac{1}{2} \int_{\Omega} \boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\sigma} d\Omega + \int_{\Omega} \mathbf{u}^T \mathbf{b} d\Omega + \int_{\Gamma_t} \mathbf{u}^T \bar{\mathbf{t}} d\Gamma + \frac{1}{2} \int_{\Omega} \rho \dot{\mathbf{u}}^T \dot{\mathbf{u}} d\Omega \right\} dt = 0 \quad (\text{B.1.23})$$

ή

$$\int_{t_1}^{t_2} \left\{ -\frac{1}{2} \int_{\Omega} \delta(\boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\sigma}) d\Omega + \int_{\Omega} \delta \mathbf{u}^T \mathbf{b} d\Omega + \int_{\Gamma_t} \delta \mathbf{u}^T \bar{\mathbf{t}} d\Gamma + \frac{1}{2} \int_{\Omega} \delta(\rho \dot{\mathbf{u}}^T \dot{\mathbf{u}}) d\Omega \right\} dt = 0 \quad (\text{B.1.24})$$

Μετά από απλοποιήσεις η παραπάνω σχέση γίνεται

$$\int_{t_1}^{t_2} \left\{ -\int_{\Omega} \delta \boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\sigma} d\Omega + \int_{\Omega} \delta \mathbf{u}^T \mathbf{b} d\Omega + \int_{\Gamma_t} \delta \mathbf{u}^T \bar{\mathbf{t}} d\Gamma + \int_{\Omega} \rho \delta \mathbf{u}^T \ddot{\mathbf{u}} d\Omega \right\} dt = 0 \quad (\text{B.1.25})$$

Η εξίσωση αυτή όμως ικανοποιείται για κάθε δυνατή παραμόρφωση \mathbf{u} όταν το χρονικό ολοκλήρωμα είναι μηδέν, δηλαδή όταν

$$\int_{\Omega} \boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\sigma} d\Omega + \int_{\Omega} \delta \mathbf{u}^T \mathbf{b} d\Omega + \int_{\Gamma_f} \delta \mathbf{u}^T \bar{\mathbf{t}} d\Gamma + \int_{\Omega} \rho \delta \mathbf{u}^T \ddot{\mathbf{u}} d\Omega = 0 \quad (\text{B.1.26})$$

Η Εξ. (B.1.26) είναι η γνωστή ασθενής μορφή Galerkin και αποτελεί έκφραση της αρχής των δυνατών έργων η οποία επιβάλλει ότι, όταν ένα ελαστικό σώμα βρίσκεται σε ισορροπία τότε το συνολικό δυνατό έργο που παράγεται από όλες τις τάσεις και εξωτερικές δυνάμεις που ενεργούν επί του ελαστικού σώματος πρέπει να είναι μηδενικό όταν το σώμα υπόκειται σε μία δυνατή μετατόπιση. Η ασθενής μορφή Galerkin για μη εξαρτώμενα από τον χρόνο προβλήματα είναι.

$$\int_{\Omega} \boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\sigma} d\Omega + \int_{\Omega} \delta \mathbf{u}^T \mathbf{b} d\Omega + \int_{\Gamma_f} \delta \mathbf{u}^T \bar{\mathbf{t}} d\Gamma = 0 \quad (\text{B.1.27})$$

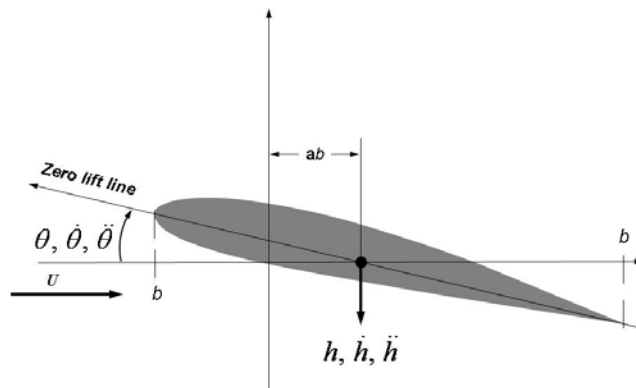
ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Γ

Αναλυτικές προσεγγίσεις σε ασταθούς αεροδυναμικής

Γ.1 Η Θεωρία Theodorensen

Ο Theodorensen (1937) ανέπτυξε μία θεωρία για την πρόβλεψη της εξαρτώμενης από τον χρόνο αεροδυναμικής συμπεριφοράς λεπτής αεροτομής που εκτελεί κίνηση μικρού εύρους, με μεταβολή ως προς την γωνία πρόσπτωσης και με κάθετη στην κατεύθυνση h (δες Σχ. Γ.1) σε ασυμπίεστη ροή. Η άντωση που προβλέπει η θεωρία αυτή περιλαμβάνει όρους που οφείλονται στην κυκλοφορία (στροβιλισμό) και όρους που είναι ανεξάρτητοι της κυκλοφορίας. Οι ανεξάρτητοι της κυκλοφορίας όροι (non-circulatory terms) προέρχονται από αδρανειακές δυνάμεις που δημιουργούνται από την επιταχυνόμενη κίνηση της πτέρυγας. Οι όροι που εξαρτώνται από την κυκλοφορία έχουν πιο σημαντική συνεισφορά στην άντωση και οφείλονται στους στροβιλισμούς που παράγονται κατά την διάρκεια της κίνησης της πτέρυγας. Η άντωση και η στρεπτική ροπή (pitching moment) σύμφωνα με την θεωρία του Theodorensen υπολογίζονται από τις σχέσεις

$$\begin{aligned}
 L &= 2\pi\rho_{\infty}U b C(k) \left[\dot{h} + U\theta + \left(\frac{b}{2} - ab\right)\dot{\theta} \right] + \pi\rho_{\infty}b^2 (\ddot{h} + U\dot{\theta} - ab\ddot{\theta}) \\
 M_{1/4} &= -\frac{\pi\rho_{\infty}b^3}{2} \left[\ddot{h} + 2U\dot{\theta} + \left(\frac{b}{4} - ab\right)\ddot{\theta} \right]
 \end{aligned}
 \tag{Γ.1.1}$$



Σχήμα Γ.1. Αρμονική ταλάντωση αεροτομής.

Ο συντελεστής $C(k)$ στην Εξ. (Γ.1.1) είναι μία μιγαδική συνάρτηση της αδιάστατης συχνότητας k που δίνεται από

$$C(k) = \frac{H_1^{(2)}(k)}{H_1^{(2)}(k) + iH_0^{(2)}(k)} \quad (\Gamma.1.2)$$

Όπου $H_n^{(2)}(k)$ είναι η συναρτήσεις Hankel δεύτερου είδους $H_n^{(2)}$ τάξης n και εκφράζονται με τις συναρτήσεις Bessel του πρώτου, J_n και δεύτερου Y_n είδους σύμφωνα με την σχέση

$$H_n^{(2)}(k) = J_n(k) - iY_n(k) \quad (\Gamma.1.3)$$

Η συνάρτηση $C(k)$ που υπολογίζεται από την Εξ. (Γ.1.2) είναι γνωστή και ως συνάρτηση Theodorensen. Το πραγματικό και το φανταστικό μέρος της συνάρτησης αυτής μπορεί να υπολογισθεί αριθμητικά για δεδομένες τιμές της αδιάστατης συχνότητας (reduced frequency) k . Η συνάρτηση Theodorensen είναι πραγματική όταν δεν υπάρχει εξάρτηση από τον χρόνο, δηλαδή όταν $k=0$ και η τιμή της είναι μονάδα, $C(0)=1$. Το μέτρο της συνάρτησης Theodorensen τείνει προς $1/2$ όταν η τιμή του k είναι μεγάλη, δηλαδή $\lim_{k \rightarrow \infty} \|C(k)\| = 1/2$. Ο πολλαπλασιασμός οποιασδήποτε αρμονικής συνάρτησης με την συνάρτηση Theodorensen, $C(k)$, έχει σαν αποτέλεσμα την μείωση του εύρους και αλλαγή της φάσης.

Η θεωρία Theodorensen προβλέπει ότι η κλίση της άντωσης είναι 2π . Ο πρώτος όρος της άντωσης που υπολογίζεται από την Εξ. (Γ.1.1) οφείλεται στην κυκλοφορία και ο πολλαπλασιασμός του με την συνάρτηση $C(k)$ αντιστοιχεί στους κινούμενους στροβιλισμούς (shed vortices). Ο δεύτερος όρος της άντωσης, $\pi\rho_\infty b^2 (\ddot{h} + U\dot{\theta} - ab\ddot{\theta})$, όπως και οι όροι της ροπής δεν οφείλονται στην κυκλοφορία αλλά εξαρτώνται μόνον από την επιτάχυνση και την γωνιακή επιτάχυνση της λεπτής αεροτομής. Ο όρος όμως της άντωσης που οφείλεται στην κυκλοφορία έχει την πλέον σημαντική συνεισφορά.

Όταν η ροή είναι ανεξάρτητη του χρόνου η συνιστώσα της άντωσης που εξαρτάται από την κυκλοφορία είναι γραμμική συνάρτηση της γωνίας πρόσπτωσης. Όταν όμως η ροή είναι ασταθής (μεταβαλλόμενη με τον χρόνο) τότε υπάρχουν δύο συνεισφορές στην άντωση, διότι η κατεύθυνση του πεδίου ροής κατά μήκος της χορδής διαφέρει ανάλογα με την κλίση του

πεδίου ροής. Ο Theodorenson όρισε για αυτό τον λόγο την ισοδύναμη γωνία πρόσπτωσης (effective angle of attack) η οποία για αρμονική κίνηση είναι:

$$\alpha = C(k) \left[\theta + \frac{h}{U} + \frac{b}{U} \left(\frac{1}{2} - a \right) \dot{\theta} \right] \quad (\Gamma.1.4)$$

Σε ροή ανεξάρτητη από τον χρόνο η ισοδύναμη γωνία πρόσπτωσης είναι ίδια με την κλίση της αεροτομής θ . Όταν όμως η ροή μεταβάλλεται στον χρόνο η ισοδύναμη γωνία πρόσπτωσης εξαρτάται όχι μόνο από την κλίση θ αλλά και από την ταχύτητα μετατόπισης (plunging speed) \dot{h} , τον ρυθμό περιστροφής $\dot{\theta}$ και την αδιάστατη συχνότητα k (reduced frequency). Επίσης ο πολλαπλασιασμός με $C(k)$, για $k \neq 0$ συνεπάγεται διαφορά φάσης και μεταβολή του εύρους στην υπολογιζόμενη άντωση και ροπή.

Η θεωρία του Theodorenson μπορεί να εφαρμοσθεί για να επιτύχουμε πιο ακριβείς προβλέψεις από την κλασική μέθοδο υπολογισμού του πτερυγισμού. Χρησιμοποιώντας τις παραπάνω σχέσεις για την άντωση (δες Εξ. (B.1.1)) και την ροπή μπορούμε να υπολογίσουμε τις γενικευμένες δυνάμεις.

$$\begin{aligned} Q_h &= -L \\ Q_\theta &= M_{1/4} + b \left(\frac{1}{8} + a \right) L \end{aligned} \quad (\Gamma.1.5)$$

Γ.2 Η Θεωρία Peters

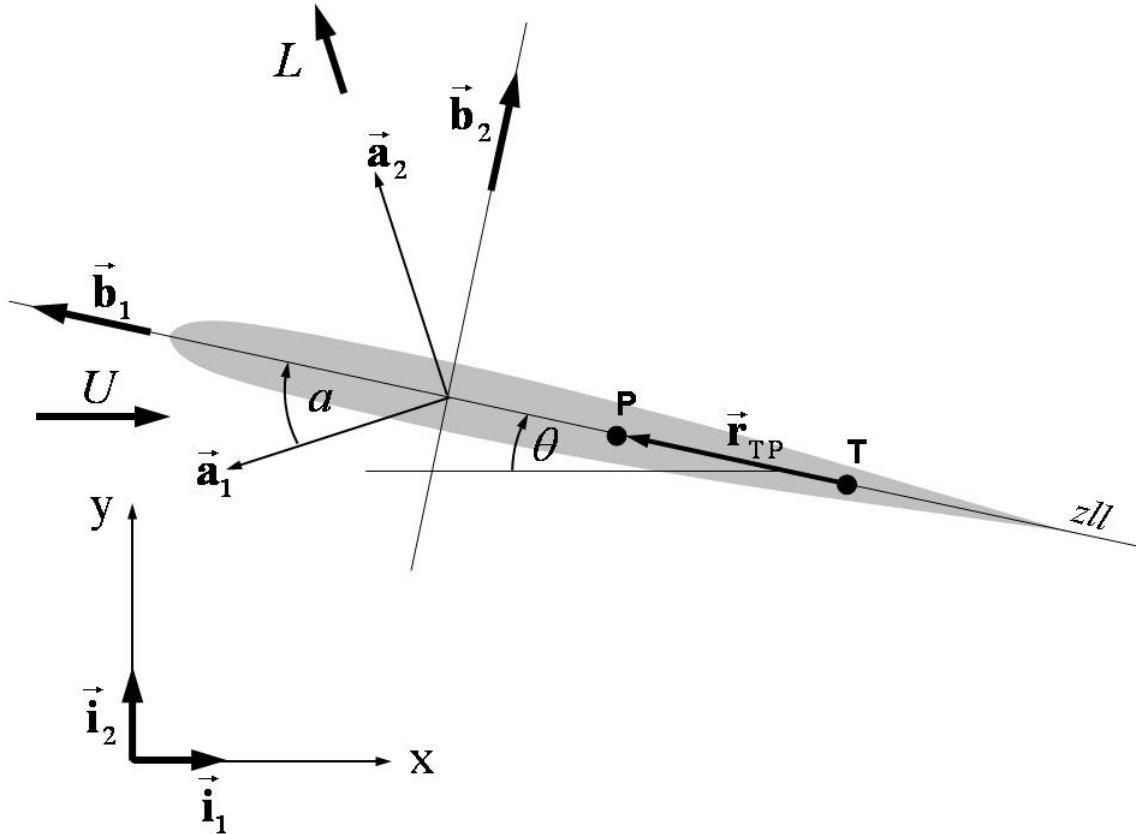
Η θεωρία ασταθούς αεροδυναμικής του Theodorenson προβλέπει την μεταβολή της άντωσης και της ροπής στον χώρο συχνοτήτων (δες συνάρτηση $C(k)$ στην Εξ. (Γ.1.1)). Σε πολλές περιπτώσεις όμως, όπως παραδείγματος χάριν στον σχεδιασμό ενεργών συστημάτων έλεγχου πτερυγισμού απαιτείται να γνωρίζουμε την μεταβολή των αεροδυναμικών φορτίων στον χρόνο. Η θεωρία Peters προβλέπει την μεταβολή φορτίων ασταθούς ροής ως συνάρτηση του χρόνου.

Θεωρούμε την συμμετρική αεροτομή που απεικονίζεται στο Σχ. Γ.2. Τα μοναδιαία διανύσματα που απεικονίζονται στο Σχ. Γ.2 συνδέονται με τις σχέσεις:

$$\begin{cases} \vec{b}_1 \\ \vec{b}_2 \end{cases} = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{cases} \vec{i}_1 \\ \vec{i}_2 \end{cases}, \quad (Γ.2.1)$$

$$\begin{cases} \vec{a}_1 \\ \vec{a}_2 \end{cases} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \begin{cases} \vec{b}_1 \\ \vec{b}_2 \end{cases}$$

Επίσης έχουμε $\vec{i}_3 = \vec{a}_3 = \vec{b}_3 = \vec{b}_1 \times \vec{b}_2$



Σχήμα Γ.2. Γεωμετρία αεροτομής και ορισμοί συστημάτων αναφοράς.

Η θεωρία Peters προσεγγίζει τα αεροδυναμικά φορτία που επάγονται από την ασταθή (μεταβαλλόμενη με τον χρόνο) ροή με στροβιλισμούς που διαχέονται κοντά στην αεροτομή, έτσι ώστε το πεδίο ταχύτητας κοντά στην αεροτομή να συνίσταται από την ταχύτητα του ελευθέρου ρεύματος, U , συν την επαγόμενη από την κίνηση της αεροτομής ροή. Η επαγόμενη ταχύτητα μεταβάλλεται κατά μήκος της χορδής η θεωρία Peters την προσεγγίζει με ένα μέσο όρο λ_o , δηλαδή η τοπική ταχύτητα υπολογίζεται ως

$$-U\vec{i}_1 - \lambda_o \vec{b}_2 \quad (Γ.2.2)$$

όπου λ_o είναι η μέση επαγόμενη ροή (θετικό κατώρευμα κάθετο στην γραμμή μηδενικής άντωσης).

Σύμφωνα με την κλασική αεροδυναμική θεωρία λεπτής αεροτομής, η γωνία προσβολής της αεροτομής υπολογίζεται από το στιγμιαίο διάνυσμα σχετικής ταχύτητας, $W \vec{a}_1$, στο σημείο T που βρίσκεται στα $3/4$ της χορδής. Το διάνυσμα αυτό είναι το διαφορά της αδρανειακής ταχύτητας \mathbf{v}_T μείον την σχετική ταχύτητα στο σημείο T .

$$W \vec{a}_1 = \mathbf{v}_T - (-U \vec{i}_1 - \lambda_o \vec{b}_2) = \mathbf{v}_T + U \vec{i}_1 + \lambda_o \vec{b}_2 \quad (\Gamma.2.3)$$

Η αδρανειακή ταχύτητα στα $3/4$ της χορδής είναι

$$\mathbf{v}_T = \mathbf{v}_P + \dot{\theta} \vec{b}_3 \times \vec{r}_{TP} \quad (\Gamma.2.4)$$

όπου $\dot{\theta} \vec{b}_3$ είναι η αδρανειακή γωνιακή ταχύτητα της αεροτομής. Αλλά το διάνυσμα θέσης \vec{r}_{TP} από το σημείο T στο σημείο P (μέσο της χορδής) είναι

$$\vec{r}_{TP} = \left[\frac{b}{2} + (1+a)b - 2b \right] \vec{b}_1 = b \left(a - \frac{1}{2} \right) \vec{b}_1 \quad (\Gamma.2.5)$$

επί πλέον η αδρανειακή ταχύτητα στο μέσο της χορδής P είναι $\mathbf{v}_P = -\dot{h} \vec{i}_2$, οπότε

$$\mathbf{v}_T = -\dot{h} \vec{i}_2 + b \dot{\theta} \left(a - \frac{1}{2} \right) \vec{b}_2 \quad (\Gamma.2.6)$$

και η σχετική ταχύτητα $W \vec{a}_1$ είναι

$$W \vec{a}_1 = U \vec{i}_1 - \dot{h} \vec{i}_2 + \left[b \dot{\theta} \left(a - \frac{1}{2} \right) + \lambda_o \right] \vec{b}_2 \quad (\Gamma.2.7)$$

αλλά η σχετική ταχύτητα $W \vec{a}_1$ στο σύστημα \vec{b}_1, \vec{b}_2 είναι

$$W \vec{a}_1 = W \cos(\alpha) \vec{b}_1 + W \sin(\alpha) \vec{b}_2$$

$$\tan(\alpha) = -\frac{\vec{a}_1 \cdot \vec{b}_2}{\vec{a}_1 \cdot \vec{b}_1} \quad (\Gamma.2.8)$$

δηλαδή

$$\begin{aligned} W \vec{a}_1 \cdot \vec{b}_1 &= U \cos(\theta) - \dot{h} \sin(\theta) \\ W \vec{a}_1 \cdot \vec{b}_2 &= -U \sin(\theta) - \dot{h} \cos(\theta) + b\dot{\theta}(a - 1/2) + \lambda_o \end{aligned} \quad (\Gamma.2.9)$$

Όλες όμως οι γωνίες είναι μικρές οπότε η ισοδύναμη γωνία πρόσπτωσης είναι

$$\begin{aligned} \alpha &= \theta + \frac{\dot{h}}{U} + \frac{b}{U} \left(\frac{1}{2} - a \right) \dot{\theta} - \frac{\lambda_o}{U} \\ W &= U + (\text{όροι ανώτερης τάξης}) \end{aligned} \quad (\Gamma.2.10)$$

Συνοψίζοντας την παραπάνω ανάλυση: (i) βρήκαμε ότι η ισοδύναμη γωνία πρόσπτωσης βρίσκεται από την σχετική ταχύτητα στα $3/4$ της χορδής και υπολογίζεται με βάση την μέση επαγόμενη ταχύτητα λ_o πάνω στην χορδή της αεροτομής. (ii) Η ισοδύναμη γωνία α δεν είναι ίση με την κλίση θ της αεροτομής διότι λόγω της κίνησης της αεροτομής και της αστάθειας της ροής το επαγόμενο πεδίο ροής δεν είναι σταθερό σε σχέση με το αδρανειακό σύστημα. Όπως φαίνεται και από την Εξ. (B.2.11), η ισοδύναμη γωνία πρόσπτωσης εξαρτάται από τον ρυθμό αλλαγής της γωνίας κλίσης, $\dot{\theta}$, της αεροτομής, από την ταχύτητα, \dot{h} , της αεροτομής κατά την κατακόρυφη κατεύθυνση, και από την μέση επαγόμενη ροή λ_o . Το διάνυσμα της άντωσης είναι κάθετο πάνω στο διάνυσμα σχετικής ταχύτητας \mathbf{W} . Η άντωση και η ροπή μπορεί να υπολογισθούν με ακρίβεια από την ισοδύναμη γωνία α μόνον όταν η ταχύτητα, \dot{h} , της αεροτομής κατά την κατακόρυφη κατεύθυνση είναι μικρή σχετικά με την ταχύτητα U . Αυτή η συνθήκη ικανοποιείται στις περισσότερες εφαρμογές της αεροναυπηγικής, δεν ισχύει όμως για την πτητική κατάσταση εντόμων και μικρών πτηνών που κινούν τα φτερά τους με μεγάλη ταχύτητα σχετικά με το ελεύθερο ρεύμα. Τα συνολικά αεροδυναμικά φορτία (άντωση και η ροπή) συμπεριλαμβανομένων και των αδρανειακών ($(\dot{h} + U\dot{\theta} - ab\ddot{\theta})$) που δεν εξαρτώνται από την κυκλοφορία δίνονται, σύμφωνα με την θεωρία του Peters, από τις παρακάτω σχέσεις

$$\begin{aligned} L &= \pi \rho_\infty b^2 (\dot{h} + U\dot{\theta} - ab\ddot{\theta}) + 2\pi \rho_\infty U b \left[\dot{h} + U\theta \left(\frac{b}{2} - ab \right) \dot{\theta} - \lambda_o \right] \\ M_{1/4} &= -\frac{\pi \rho_\infty b^3}{2} \left[\ddot{h} + 2U\dot{\theta} + \left(\frac{b}{4} - ab \right) \ddot{\theta} \right] \end{aligned} \quad (\Gamma.2.12)$$

Η άντωση και η ροπή που δίνονται από τις παραπάνω σχέσεις χρησιμοποιούνται για τον υπολογισμό των γενικευμένων δυνάμεων. Ο μόνος άγνωστος στις Εξ. (B.2.12) είναι η επαγόμενη ροή λ_o , που στην θεωρία του Peters υπολογίζεται όπως δείχνεται παρακάτω. Η επαγόμενη ροή λ_o αναλύεται σε N συνιστώσες,

$$\lambda_o \approx \frac{1}{2} \sum_{n=1}^N b_n \lambda_n \quad (\Gamma.2.13)$$

Οι συντελεστές b_n βρίσκονται με την προσαρμογή ελαχίστων τετραγώνων. Υποθέτοντας ότι οι στροβιλισμοί που δημιουργούνται από την ασταθή ροή κινούνται στο επίπεδο της αεροτομής με την ταχύτητα της ροής οι όροι λ_n υπολογίζονται από

$$[A]\{\dot{\lambda}\} + \frac{b}{U}\{\lambda\} = \{c\}[\dot{h} + U\dot{\theta} + b(1/2 - a)\ddot{\theta}] \quad (\Gamma.2.14)$$

όπου το μητρώο $[A]$ και το διάνυσμα $\{c\}$ συνδέονται με την σχέση

$$[A] = [D] + \{d\}\{b\}^T + \{c\}\{d\}^T + 1/2\{c\}\{b\}^T \quad (\Gamma.2.15)$$

όπου

$$D_{mn} = \begin{cases} \frac{1}{2n}, & n = m + 1 \\ -\frac{1}{2n}, & n = m - 1 \\ 0, & n \neq m \pm 1 \end{cases} \quad (\Gamma.2.16)$$

$$b_n = \begin{cases} (-1)^{n-1} \frac{(N+n-1)!}{(N-n-1)! (n!)^2}, & n \neq N \\ (-1)^{n-1}, & n = N \end{cases}$$

$$c_n = \frac{2}{n}$$

$$d_n = \begin{cases} \frac{1}{2}, & n = 1 \\ 0, & n \neq 1 \end{cases}$$

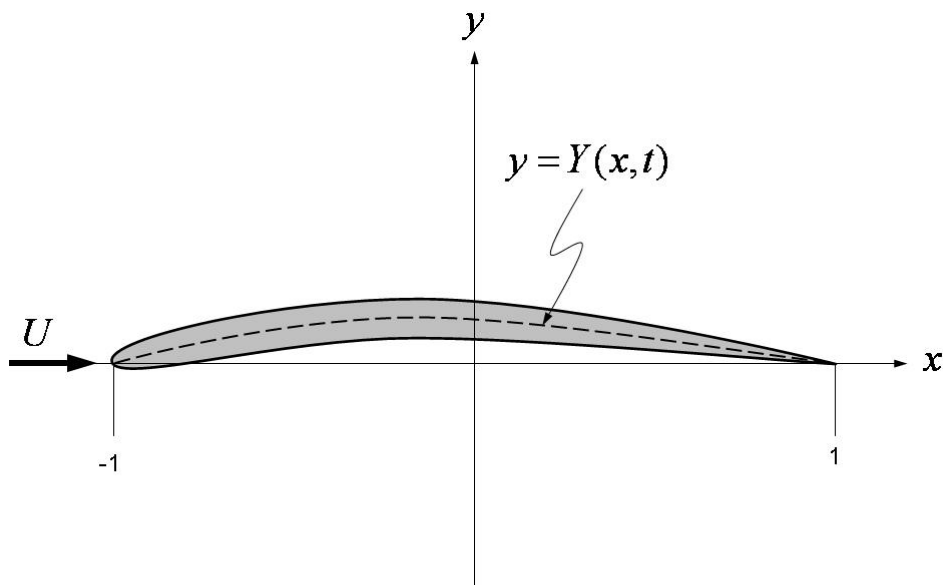
Το αεροδυναμικό μοντέλο του Peters υπολογίζει την μεταβολή των φορτίων στον χρόνο και μπορεί απ' ευθείας να χρησιμοποιηθεί σε υπολογισμούς πτερυγισμού.

Γ.3 Αεροδυναμικά Φορτία Αρμονικά Ταλαντευμένων Αεροτομών

Το παράρτημα αυτό διαπραγματεύεται το πεδίο ροής γύρω από αρμονικά ταλαντευόμενες αεροτομές. Η ανάλυση περιορίζεται στην γραμμική θεωρία που περιγράφει κινήσεις σε γωνίες πρόσπτωσης μικρότερες από την γωνία αποκόλλησης ροής, και παρατίθεται ως απόδειξη των σχέσεων του Theodoresen που παρουσιάστηκαν προηγουμένως.

Γ.3.1 Εξισώσεις Κίνησης και Οριακές Συνθήκες

Θεωρούμε λεπτή αεροτομή μήκους $l=2$ και το σύστημα ορθογωνίων συντεταγμένων με τον άξονα x παράλληλο στην ροή και αρχή στον μέσον της χορδής όπως φαίνεται στο Σχ. Γ.3.



Σχήμα Γ.3. Αεροτομή και σύστημα αξόνων.

Η χορδή της αεροτομής συμπίπτει με τον άξονα x και η μέση γραμμή της λεπτής αεροτομής δίνεται από την σχέση

$$y = Y(x, t), \quad -1 \leq x \leq 1 \quad (\Gamma.3.1)$$

Η συνάρτηση Y και κλίση της $\partial Y / \partial x$ έχουν μικρές τομές ώστε η απόκλιση από τον οριζόντιο άξονα είναι μικρές. Συνεπώς και οι διαταραχές που προκαλούνται στην ροή από την παρουσία της αεροτομής είναι μικρές. Δηλαδή η ταχύτητα (u, v) του ρευστού συνίσταται από την ταχύτητα U και τις μικρές διαταραχές u', v' .

$$u = U + u' \quad |u'| \ll U \quad (\Gamma.3.2)$$

$$v = v' \quad |v'| \ll u$$

Οι επιταχύνσεις είναι

$$\alpha'_x = \frac{\partial u'}{\partial t} + (U + u') \frac{\partial u'}{\partial x} + v' \frac{\partial u'}{\partial y} = \frac{\partial u'}{\partial t} + U \frac{\partial u'}{\partial x} \quad (\Gamma.3.3)$$

$$\alpha'_y = \frac{\partial v'}{\partial t} + (U + u') \frac{\partial v'}{\partial x} + v' \frac{\partial v'}{\partial y} = \frac{\partial v'}{\partial t} + U \frac{\partial v'}{\partial x}$$

όπου όλοι οι μη-γραμμικοί όροι ανώτερης τάξης $u' \partial u' / \partial x$ κλπ. αμελούνται. Η μεταβολή πίεσης διαταραχής p' για ασυμπίεστο ρευστό $\rho = \text{const}$ συνδέεται με το δυναμικό επιτάχυνσης ϕ' με την σχέση

$$\rho \phi' = p' \quad (\Gamma.3.4)$$

όπου το δυναμικό ικανοποιεί την εξίσωση Laplace

$$\nabla^2 \phi' = \frac{\partial^2 \phi'}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi'}{\partial y^2} = 0 \quad (\Gamma.3.5)$$

Η συνάρτηση ψ' που είναι συζυγής αρμονική του δυναμικού επιτάχυνσης ϕ' μας δίνει το μιγαδικό δυναμικό επιτάχυνσης w

$$w = \phi' + i \psi' = f(x+iy) = f(z) \quad (\Gamma.3.6)$$

που είναι αναλυτική συνάρτηση της μιγαδικής μεταβλητής $z = x+iy$. Επί πλέον οι καμπύλες $\phi'(x,y,t) = c$ και $\psi'(x,y,t) = c$ είναι ορθογώνιες, διότι γνωρίζουμε ότι μια μιγαδική συνάρτηση $f(z) = f(x+iy) = u+iv$ είναι αναλυτική όταν και μόνον όταν οι πραγματικές συναρτήσεις u, v είναι συνεχώς παραγωγίσιμες και ικανοποιούν τις συνθήκες Cauchy-Riemann που είναι $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$

Οι οριακές συνθήκες της Εξ. (Γ.3.5) είναι εφαπτομενική ταχύτητα στην επιφάνεια και $u', v' \rightarrow 0$ σε μεγάλη απόσταση από την αεροτομή. Το διάνυσμα ταχύτητας σε ένα σημείο της αεροτομής είναι $\vec{V}_1 = (0, \partial Y / \partial t)$ όταν υποθέσουμε ότι κατά την διάρκεια της ταλάντωσης κάθε σημείο της αεροτομής κινείται μόνο κατά την κατακόρυφη κατεύθυνση.

Οι οριακές συνθήκες της Εξ. (Γ.3.5) είναι εφαπτομενική ταχύτητα στην επιφάνεια και $u', v' \rightarrow 0$ σε μεγάλη απόσταση από την αεροτομή. Το διάνυσμα ταχύτητας σε ένα σημείο της αεροτομής είναι $\vec{V}_1 = (0, \partial Y / \partial t)$ όταν υποθέσουμε ότι κατά την διάρκεια της ταλάντωσης κάθε σημείο της αεροτομής κινείται μόνο κατά την κατακόρυφη κατεύθυνση.

Το διάνυσμα της ταχύτητας στο ρευστό / στερεό είναι $\vec{V}_2 = (U + u'_a, v'_a)$ όπου οι κάθετες συνιστώσες των \vec{V}_1 και \vec{V}_2 είναι ίσες. Το κάθετο διάνυσμα είναι $\vec{n} = (-\partial y / \partial x, 1)$ δηλαδή $\vec{V}_1 \cdot \vec{n} = \vec{V}_2 \cdot \vec{n}$ ή

$$\frac{\partial Y}{\partial t} = -(U + u'_a) \frac{\partial Y}{\partial x} + v'_a$$

Δηλαδή η οριακή συνθήκη για την ταχύτητα (αμελώντας τους όρους ανώτερης τάξης $u' \partial Y / \partial x$ είναι

$$v'_a = \frac{\partial y}{\partial t} + U \frac{\partial Y}{\partial x} + \frac{DY}{Dt} \quad (\Gamma.3.7)$$

Οι κάθετες συνιστώσες των διανυσμάτων επιτάχυνσης στο ρευστό και στην αεροτομή είναι επίσης ίδιες δηλαδή

$$a'_y = \frac{D^2 Y}{Dt^2} = \frac{\partial^2 Y}{\partial t^2} + 2u \frac{\partial^2 Y}{\partial x \partial t} + u^2 \frac{\partial^2 Y}{\partial x^2} \quad (\Gamma.3.8)$$

Η οριακή συνθήκη της Εξ. (Γ.3.7) για την ταχύτητα εκπεφρασμένης σε δυναμικό επιτάχυνσης επιτυγχάνεται με την σχέση

$$\frac{\partial \phi'}{\partial y} = a'_y = \frac{\partial v'}{\partial t} + U \frac{\partial v'}{\partial x} \quad (\Gamma.3.9)$$

Υποθέτοντας αρμονική ταλάντωση

$$\phi' = \varphi(x, y) e^{i\omega t}, \quad u' = u(x, y) e^{i\omega t}, \quad v' = v(x, y) e^{i\omega t} \quad (\Gamma.3.10)$$

η Εξ. (Γ.1.9) γίνεται

$$\frac{\partial \varphi(x, y)}{\partial y} = i\omega v + U \frac{\partial v}{\partial x} \quad (\Gamma.3.11)$$

Η λύση της παραπάνω διαφορικής για $v = 0$ $x \rightarrow -\infty$ είναι

$$v(x, y) = \frac{1}{u} e^{i\omega(x/u)} \int_{-\infty}^x \frac{\partial \varphi(\xi, y)}{\partial y} e^{i\omega(\xi/u)} d\xi \quad (\Gamma.3.12)$$

που είναι η ταχύτητα από την Εξ. (Γ.3.8). Επί πλέον των οριακών συνθηκών των Εξ. (Γ.1.7) και (Γ.1.8) πρέπει να ικανοποιείται η συνθήκη Kutta – Joukowski που επιβάλλει πεπερασμένη ταχύτητα στο άκρο της πτέρυγας ή ότι η μεταβολή της πίεσης συνεπώς και το δυναμικό επιτάχυνσης ϕ είναι συνεχή.

Γ.4 Δυναμικό επιτάχυνσης

Ο μετασχηματισμός

$$Z = \frac{1}{2} \left(\zeta + \frac{1}{\zeta} \right) \quad (\Gamma.4.1)$$

μετασχηματίζει τον κύκλο μοναδιαίας ακτίνας στο επίπεδο ζ στο ευθύγραμμο τμήμα $|x| \leq 1$ στο επίπεδο Z

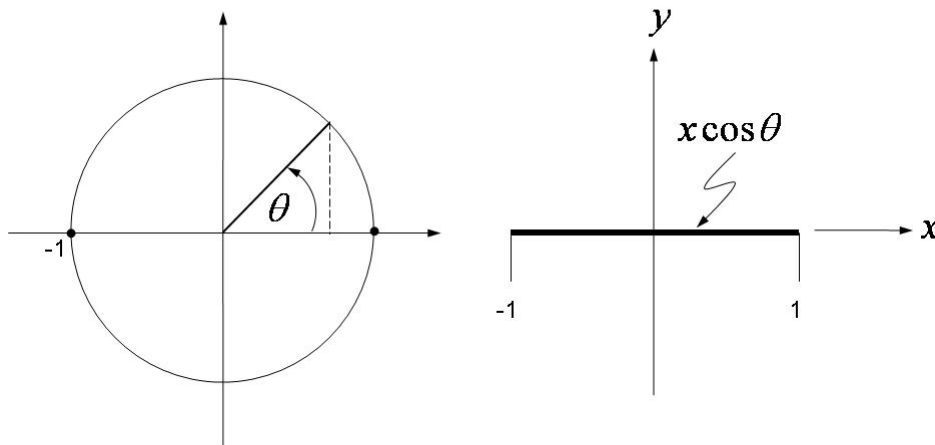
Οι οριακές συνθήκες (Γ.1.7) και (Γ.1.8) ικανοποιούνται πάνω στο ευθύγραμμο τμήμα $(-1, 1)$ στον άξονα x , ενώ ανάλογες συνθήκες ισχύουν πάνω στον μοναδιαίο κύκλο στο επίπεδο ζ .

Η μιγαδική συνάρτηση w μετασχηματίζεται ως

$$\frac{dw}{dz} = \frac{dw}{d\zeta} \frac{d\zeta}{dz} \quad \frac{dw}{d\zeta} = \frac{dw}{dz} \frac{dz}{d\zeta} \quad (\Gamma.4.2)$$

Στις παραπάνω σχέσεις ο όρος $\left| \frac{dz}{d\zeta} \right|$ είναι ο παράγοντας μετασχηματισμού και εκφράζει τον λόγο των μέτρων των διανυσμάτων επιτάχυνσης στα επίπεδα z και ζ . Ο όρος αυτός πάνω στην αεροτομή είναι

$$\left| \frac{dz}{d\zeta} \right|_{\zeta=e^{i\theta}} = \frac{1}{2} \left| 1 - \frac{1}{\zeta^2} \right|_{\zeta=e^{i\theta}} = |\sin \theta| \quad (\Gamma.4.3)$$



Σχήμα Γ.4. Ορισμός μετασχηματισμού.

Δηλαδή όταν η κάθετη συνιστώσα της επιτάχυνσης πάνω στην αεροτομή (επίπεδο z) είναι $\alpha'_y(x, 0, t)$ η αντίστοιχη κάθετη στον μοναδιαίο κύκλο του επίπεδου ζ είναι

$$a'_n(r=1, \theta = \cos^{-1} x, t) = a'_y(x, o, t) \sin \partial \quad (\Gamma.4.4)$$

Το δυναμικό επιτάχυνσης τείνει σε μια σταθερά για $z \rightarrow 0$ διότι το όριο $\lim_{\zeta \rightarrow \infty} |dz/d\zeta| = 1/2$, δηλαδή

$$\varphi' \Big|_{z \rightarrow \infty} = \lim_{|\zeta| \rightarrow \infty} R(w) = \cos t \quad (\Gamma.4.5)$$

Το μιγαδικό δυναμικό που αναζητούμε πρέπει να ικανοποιεί τις συνθήκες (Γ.4.4) (Γ.4.5) την Εξ. (Γ.3.7) και την συνθήκη Kutta–Joukowski, (K-J).

Το μιγαδικό δυναμικό μπορεί να γραφεί υπό μορφή σειράς ως

$$w(\zeta) + \frac{A_1}{\zeta} + \frac{A_2}{\zeta^2} + \frac{A_3}{\zeta^3} + \dots \quad (\Gamma.4.6)$$

όπου οι συντελεστές πρέπει να ικανοποιούν την οριακή συνθήκη της Εξ. (Γ.4.4), ενώ η συνθήκη K-J ικανοποιείται όταν η σειρά της Εξ.(Γ.4.4) συγκλίνει στο σημείο $J = 1$ του άκρου της αεροτομής.

Το δυναμικό

$$w(\zeta) = \frac{iA_o}{\zeta + 1} \quad (\Gamma.4.7)$$

Δημιουργεί μηδέν επιτάχυνση κάθετα στον κύκλο και δίνει πίεση που τείνει στο άπειρο όπως $R^{-1/2}$ στο σημείο πρόσπτωσης της αεροτομής. Το μιγαδικό δυναμικό έχει την μορφή

$$w(\zeta) = \frac{iA_o}{\zeta + 1} + \frac{A_1}{\zeta} + \frac{A_2}{A^2} + \dots \quad (\Gamma.4.8)$$

Γ.5 Αεροτομή που εκτελεί κάθετη μετατόπιση και ταλάντωση περιστροφής

Η επιφάνεια της αεροτομής περιγράφεται από την εξίσωση

$$y = y_o b e^{i\omega t} \quad (\Gamma.5.1)$$

όπου b είναι το μήκος της μέσης χορδής $b = l$ οπότε η αδιάστατη συχνότητα είναι

$$k = \frac{\omega b}{U} = \frac{\omega}{U}$$

Με τον παραπάνω ορισμό η εξίσωση επιφάνειας γράφεται

$$y = y_o e^{iUkt}$$

και η ταχύτητα και επιτάχυνση υπολογίζονται σύμφωνα με τις Εξ. (Γ.3.7) και (Γ.3.8) ως ακολούθως

$$\begin{aligned} v' &= \frac{Dy}{Dt} = iUky_o e^{iUkt} \\ a'_y &= \frac{D^2 y}{Dt^2} = -U^2 k^2 y_o e^{iUkt} \end{aligned} \quad (\Gamma.5.2)$$

και σύμφωνα με την Εξ. (Γ.4.4) έχουμε

$$a'_n (|\zeta| = 1) = -u^2 k^2 y_o \sin \theta \quad (\Gamma.5.3)$$

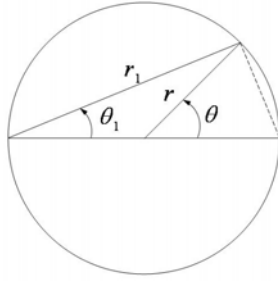
Η μορφή της συνάρτησης w που ικανοποιεί την παραπάνω συνθήκη είναι

$$w(\zeta) = \frac{iA}{\zeta + 1} + \frac{iB}{\zeta} \quad (\Gamma.5.4)$$

Δηλαδή το δυναμικό επιτάχυνσης ϕ και η συζυγής συνάρτηση ψ ικανοποιούν τις σχέσεις

$$\begin{aligned} \phi &= \phi_1 + \phi_2 & \psi &= \psi_1 + \psi_2 \\ \phi_1 &= A \frac{\sin \theta_1}{r_1} & \psi_1 &= A \frac{\cos \theta_1}{r_1} \\ \phi_2 &= B \frac{\sin \theta}{r} & \psi_2 &= B \frac{\cos \theta}{r} \end{aligned} \quad (\Gamma.5.5)$$

όπου r, θ, r_1 και θ_1 ορίζονται στο παρακάτω σχήμα



Σχήμα Γ.5 Ορισμοί μηκών και γωνιών.

Πάνω στην αεροτομή ή στο μοναδιαίο κύκλο του επιπέδου J

$$r = 1 \quad \text{και} \quad r_1 = 2 \cos \theta_1$$

οπότε

$$\left(\frac{\partial \phi}{\partial r} \right)_{r=2 \cos \theta_1} = 0 \quad \left(\frac{\partial \phi_2}{\partial r} \right)_{r=1} = -B \left(\frac{\sin \partial}{r^2} \right)_{r=1} = -B \sin \partial \quad (\Gamma.5.6)$$

Και από τις Εξ. (Γ.5.3) και (Γ.5.6)

$$B = u^2 k^2 y_o \quad (\Gamma.3.8)$$

Από την Εξ. (Γ.3.12) έχουμε

$$v = \frac{e^{-ikx}}{U} \int_{-\infty}^x a_y(\xi) e^{ik\xi} d\xi = -\frac{e^{-ikx}}{U} \int_{-\infty}^x \left(\frac{\partial \psi_1}{\partial \xi} + \frac{\partial \psi_2}{\partial \xi} \right) e^{ik\xi} d\xi \quad (\Gamma.3.8)$$

Δηλαδή στο σημείο $x = -1 + \xi$ πάνω στην αεροτομή ($0 \leq \xi \leq 2$), η οριακή συνθήκη για την ταχύτητα (δες Εξ. (Γ.3.2) και (Γ.3.8)) είναι:

$$iUky_o = -\frac{e^{-ik(-1+\xi)}}{U} \int_{-\infty}^{-1+\xi} e^{ikx} \left(\frac{\partial \psi_1}{\partial x} + \frac{\partial \psi_2}{\partial x} \right) dx \quad (\Gamma.5.9)$$

Η παραπάνω σχέση πρέπει να ικανοποιείται για όλες τις τιμές του ζ . Οι παράγωγοι και των δύο μελών της Εξ. (Γ.5.9) μηδενίζονται στο άκρο του πεδίου ορισμού. Δηλαδή, όταν η Εξ. (Γ.5.9) ικανοποιείται σε ένα σημείο του πεδίου ορισμού, τότε ικανοποιείται παντού μέσα στο πεδίο ορισμού. Υπολογίζοντας το ολοκλήρωμα με ολοκλήρωση κατά μέρη και παίρνοντας το όριο $\xi \rightarrow 0$ βρίσκουμε

$$iUky_o = -e^{ik} \left[e^{ikx} \frac{\psi_1}{U} \right]_{x=-\infty}^{x=-1} + \frac{e^{ik}}{U} \int_{-\infty}^{-1} e^{ikx} \left(ik\psi_1 - \frac{\partial \psi_2}{\partial x} \right) dx \quad (\Gamma.5.10)$$

όπου οι συναρτήσεις ψ_1, ψ_2 υπολογίζονται στο επίπεδο z και πρέπει να μετασχηματισθούν από το επίπεδο ζ χρησιμοποιώντας την Εξ. (Γ.5.5). Αλλά η συνάρτηση ψ_1 είναι σταθερή πάνω στον κύκλο $|\zeta|=1$ ($\psi_1|_{|\zeta|=1} = A/2$, επίσης $\lim_{r_1=|x+1| \rightarrow \infty} \psi_1 = 0$ και ο πρώτος όρος της Εξ. (Γ.5.10) είναι $-A/2U$).

Ο υπολογισμός του ολοκληρώματος πραγματοποιείται με την βοήθεια της σύμμορφης απεικόνισης z και της αντίστροφη της που είναι

$$z = \frac{1}{2} \left(\zeta + \frac{1}{\zeta} \right) \Leftrightarrow \zeta = z + \sqrt{z^2 - 1}$$

όπου έχουμε

$$\left. \begin{array}{l} r = -\zeta \\ r_1 = -\zeta - 1 \\ z = x \quad (x < -1) \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} r = -x + \sqrt{x^2 - 1} \\ r_1 = -x - 1 + \sqrt{x^2 - 1} \end{array}$$

Επίσης για τον αρνητικό άξονα των πραγματικών $\theta = \theta_1 = \pi$. Με αντικατάσταση των παραπάνω στην Εξ. (Γ.3.5) έχουμε για $x < -1$

$$\begin{aligned} \psi_1 &= \frac{-A}{-x - 1 + \sqrt{x^2 - 1}} \\ \psi_2 &= \frac{-B}{-x + \sqrt{x^2 - 1}} = B(x + \sqrt{x^2 - 1}) \end{aligned} \quad (\Gamma.5.11)$$

Δηλαδή

$$\int_{-\infty}^{-1} e^{ikx} \psi_1 dx = \frac{A}{2} \int_1^{\infty} e^{-ikx} \left(1 - \sqrt{\frac{x+1}{x-1}}\right) dx \quad (\Gamma.5.12)$$

Το ολοκλήρωμα όμως της Εξ. (Γ.5.12) μπορεί να εκφρασθεί με τις συναρτήσεις Hankel δεύτερου $H_n^{(2)}$ είδους μηδενικής $H_0^{(2)}$ και πρώτης $H_1^{(2)}$ τάξης που ορίζονται ως

$$H_0^{(2)}(iz) = \int_1^{\infty} \frac{e^{-iz\xi}}{\sqrt{\xi^2 - 1}} d\xi \quad (\Gamma.5.13)$$

$$\begin{aligned} H_1^{(2)}(iz) &= -\frac{dH_0^{(2)}(iz)}{d(iz)} \\ &= \int_1^{\infty} \frac{\xi e^{-iz\xi}}{\sqrt{\xi^2 - 1}} d\xi = \int_1^{\infty} \left(\frac{\sqrt{\xi+1}}{\sqrt{\xi-1}} - \frac{1}{\sqrt{\xi^2 - 1}} \right) e^{-iz\xi} d\xi \end{aligned} \quad (\Gamma.3.14)$$

Από τις Εξ. (Γ.5.12) (Γ.5.13) και Γ.5.15) βρίσκουμε ότι για κάθε μιγαδικό αριθμό που το όρισμά του ικανοποιεί την συνθήκη ($-\pi < \arg k < 0$) ισχύουν

$$\int_{-\infty}^{-1} e^{-ikx} \psi_1 dx = -\frac{A}{2} \left[H_1^{(2)}(ik) + H_0^{(2)}(ik) - \frac{e^{-ik}}{ik} \right] \quad (\Gamma.5.15)$$

$$\int_{-\infty}^{-1} e^{ikx} \frac{\partial \psi_2}{\partial x} dx = B \int_{-\infty}^{-1} e^{ikx} \left(1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}}\right) dx = -U^2 k^2 y_o \left[H_1^{(2)}(ik) - \frac{e^{-ik}}{ik} \right] \quad (\Gamma.5.16)$$

Από τις Εξ. (Γ.5.16), (Γ.5.16) και (Γ.5.10) βρίσκουμε ότι

$$A = -2iU^2 k y_o \mathbf{C}(k) \quad (\Gamma.5.17)$$

όπου $\mathbf{C}(k)$ είναι η συνάρτηση Theodorensen

$$\mathbf{C}(k) = \frac{H_1^{(2)}(k)}{H_1^{(2)}(k) + iH_0^{(2)}(k)} \quad (\Gamma.5.18)$$

Η συνάρτηση $w(\zeta)$ στην Εξ. (Γ.5.4) είναι συνεχής στο άκρο της αεροτομής (tailing edge) και η συνθήκη Kutta ικανοποιείται, δηλαδή το δυναμικό επιτάχυνσης βρίσκεται από την σχέση.

$$\phi = -2iUk^2 y_o \mathbf{C}(k) \frac{\sin \theta_1}{r_1} + U^2 k^2 y_o \frac{\sin \theta}{r} \quad (\Gamma.5.19)$$

Η κατανομή πίεσης στην αεροτομή είναι $p = -\rho\phi$ για ($r=1, r_1 = 2 \cos \theta$) στην παραπάνω σχέση Εξ. (Γ.3.20), και επειδή το δυναμικό είναι αντισυμμετρική συνάρτηση, η άντωση ανά μονάδα μήκους είναι $-2p$, δηλαδή

$$l = 2\rho U y_o \left[-ik \mathbf{C}(k) \tan \frac{\theta}{2} + k^2 \sin \theta \right] \quad (\Gamma.5.20)$$

και η ολική άντωση είναι

$$L = \int_{-1}^{+1} l \, dx = \int_0^\pi l \sin \theta \, d\theta = \pi \rho U^2 y_o k^2 \left[1 - \frac{2i}{k} \mathbf{C}(k) \right] \quad (\Gamma.5.21)$$

και η ροπή γύρω από το $1/2$ της χορδής είναι

$$\begin{aligned} M_{1/2} &= -\int_{-1}^{+1} l x \, dx = -\int_0^\pi l \cos \theta \sin \theta \, d\theta = \\ &= -\pi \rho U^2 i y_o k \mathbf{C}(k) \end{aligned} \quad (\Gamma.5.22)$$

Με περαιτέρω διαχωρισμό των αδρανειακών όρων και των όρων κυκλοφορίας καταλήγουμε στις γενικές σχέσεις για την άντωση και την ροπή που παρουσιάστηκαν που είναι

$$\begin{aligned} L &= 2\pi \rho_\infty U b \mathbf{C}(k) \left[\dot{h} + U\dot{\theta} + \left(\frac{b}{2} - ab \right) \dot{\theta} \right] + \pi \rho_\infty b^2 (\ddot{h} + U\dot{\theta} - ab\ddot{\theta}) \\ M_{1/4} &= -\frac{\pi \rho_\infty b^3}{2} \left[\ddot{h} + 2U\dot{\theta} + \left(\frac{b}{4} - ab \right) \ddot{\theta} \right] \end{aligned} \quad (\Gamma.5.23)$$