ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΑΤΡΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
Ουρές Αναμονής

Ημερομηνία: 19-6-2019 **Ώρα: 18:00-21:00**

Εξεταστής: Ι. Δημητρίου

1. (2 μονάδες) Θεωρείστε ένα $M/M/1/\infty$ σύστημα όπου οι πελάτες καταφθάνουν σύμφωνα με την διαδικασία Poisson παραμέτρου λ ως εξής: με πιθανότητα 1/2 φθάνει ένας πελάτης, ενώ με πιθανότητα 1/2 δυο πελάτες. Οι πελάτες εξυπηρετούνται ένας -ένας και ο χρόνος εξυπηρέτησης προέρχεται από την εκθετική κατανομή παραμέτρου μ.

   (α′) Να υπολογιστεί η πιθανογεννήτρια της στασιμης κατανομής του αριθμού των πελατών.

   (β′) Να βρεθεί η συνθήκη στατιστικής ισορροπίας.

   (γ′) Να βρεθεί η οριακή κατανομή του αριθμού των πελατών στο σύστημα.

   (δ′) Ποις ο μέσος αριθμός πελατών στο σύστημα;

2. (2 μονάδες) **Α)** Προϊοντα καταφθάνουν σε μια γραμμή παραγωγής με μια μηχανή σύμφωνα με την διαδικασία Poisson με ρυθμό 8 προιόντα ανα ώρα. Η μηχανή εξυπηρετεί ένα-ένα τα προιόντα σύμφωνα με την σειρά που φθάνουν μετά από εκθετικά κατανεμημένο χρονικό διάστημα με ρυθμό 14 προιόντα ανά ώρα.

   (α′) Προσδιόρισε τον μέσο χρόνο παραμονής ενός προιόντος στην γραμμή παραγωγής (mean production lead time).

   (β′) Ποιο το ποσοστό των προιόντων με χρόνο παραμονής διπλάσιο του μέσου χρόνου παραμονής;

   Β) Για το απλό M/M/1 σύστημα με παραμέτρους λ, μ, να εξετάσετε πως θα επηρεαστεί ο μέσος αριθμός πελατών στο σύστημα και ο μέσος χρόνος παραμονής σε αυτό, όταν οι εν λόγω παραμετροι διπλασιαστούν.

3. (2.5 μονάδες) Θεωρείστε το M/M/1 σύστημα με παραμέτρους λ, μ. Έστω $N(t)$ ο αριθμός των πελατών στο σύστημα την χρ. στιγμή t με $N(0) = 0$. Αν $p_n(t)$ η πιθανότητα να έχουμε n πελάτες την χρ. στιγμή t, να δείξετε ότι ο Laplace μετασχηματισμός, $\pi_n(s) = \int_0^\infty e^{-st} p_n(t)dt$, $Re(s) > 0$, δίνεται από

$$\pi_n(s) = \frac{(1-\beta(s))\beta(s)^n}{s},\ n = 0, 1, ...,$$

   όπου $\beta(s)$ η μικρότερη κατά μέτρο ρίζα της $\mu x^2 - (s + \lambda + \mu)x + \lambda = 0$. Με αυτό το αποτέλεσμα να δείξετε ότι $\lim_{n\to\infty} p_n(t) = (1-\rho)\rho^n$, $\rho = \lambda/\mu$.

4. (2 μονάδες) Θεωρείστε ένα δίκτυο δύο σταθμών απείρης χωρητικότητας συνδεδεμένων σε σειρά (tandem). Οι σταθμοί διαθέτουν έναν υπάλληλο και οι πελάτες φθάνουν μόνο στον σταθμό 1 σύμφωνα με την κατανομή Poisson παραμέτρου λ, ενώ η εξυπηρέτηση τους πρέρχεται από την εκθετική κατανομή παραμέτρου μ_1. Μετά το πέρας της εξυπηρέτησης τους στον σταθμό 1, με πιθανότητα q_1 προωθούνται στον σταθμό 2, ενώ με $1-q_1$ επαναλαμβάνουν την εξυπηρέτηση τους στον σταθμό 1. Η εξυπηρέτησης στο σταθμό 2 προέρχεται από την εκθετική κατανομή παραμέτρου μ_2 και μετά το πέρας αυτής, ο πελάτης με πιθανότητα q_{20} αναχωρεί από το σύστημα, με πιθανότητα q_{21} μεταβαίνει στην ουρά του σταθμού 1 και με πιθανότητα $q_{22} = 1 - q_{20} - q_{21}$ επαναλαμβάνει την εξυπηρέτηση στον σταθμό 2. Να βρεθεί ο μέσος αριθμός πελατών στο δίκτυο καθώς και ο μέσος χρόνος παραμονής ενός πελάτη σε αυτό.

5. (2.5 μονάδες) Θεωρήστε το $M/G/1$ σε ευστάθεια ($\rho = \lambda E(B) < 1$). Έστω N_{bp} ο αριθμός των πελατών που εξυπηρετούνται στην διάρκεια της περιόδου συνεχούς απασχόλησης με $f_n = P(N_{bp} = n)$ και $F_{bp}(z) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n z^n$, $|z| \leq 1$. Να δειχθεί ότι

   (α′) η $F_{bp}(z)$ ικανοποιεί την εξίσωση

$$F_{bp}(z) = z\beta^*(\lambda - \lambda F_{bp}(z)), \tag{1}$$

   όπου $\beta^*(s) = \int_0^\infty e^{-st} b(t)dt$, $Re(s) > 0$.

   (β′) Να δειχθεί ότι $E(N) = \frac{1}{1-\rho}$.

   (γ′) Να λυθεί η (1) όταν $b(t) = \mu e^{-\mu t}$.