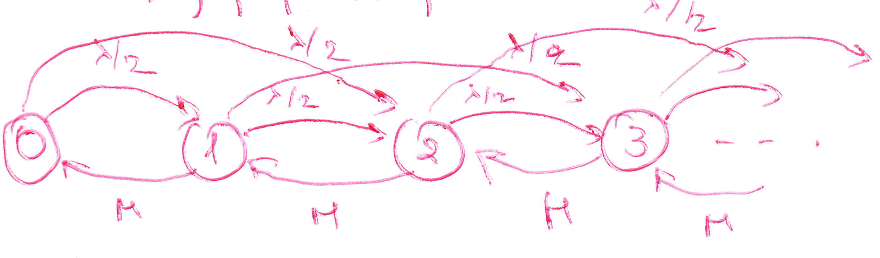
ΛΥΣΕΙΣ ΙΟΥΝΙΟΥ 2019

1 Έστω $N(t) \equiv \#$ πελατών στο σύστημα την χ.σ. t

Η $\{N(t), t \geq 0\}$ είναι Μαρκοβιανή με χ.κ. $E = \{0, 1, 2, \ldots\}$



Έστω p_j η στάσιμη πιθ/τα να έχουμε j πελάτες στο σύστημα. Οι ολικές εξισ. ισορροπίας είναι

$$\left.\begin{aligned} \lambda p_0 &= \mu p_1 \\ (\lambda+\mu) p_1 &= \frac{\lambda}{2} p_0 + \mu \cdot p_2 \\ (\lambda+\mu) p_j &= \frac{\lambda}{2} p_{j-1} + \frac{\lambda}{2} p_{j-2} + \mu p_{j+1}, \ j \geq 2. \end{aligned}\right\} (1)$$

α) Έστω $P(z) = \sum_{j=0}^{\infty} p_j z^j, \ |z| \leq 1.$

Χρησιμοποιώντας την (1) έχουμε,

2

$$\lambda P(z) + \mu\left(P(z) - P_0\right) = \frac{\mu}{z}\left(P(z) - P_0\right) + \frac{\lambda}{2} z P(z) + \frac{\lambda z^2}{2} P(z) \Rightarrow$$

$$P(z)\left[\mu\left(1 - \frac{1}{z}\right) + \lambda\left(1 - \frac{z}{2} - \frac{z^2}{2}\right)\right] = \mu P_0\left(1 - \frac{1}{z}\right) \Rightarrow$$

$$P(z)\left[2\mu(z-1) + \lambda z\left(2 - z - z^2\right)\right] = 2\mu P_0 (z-1) \Rightarrow$$

$$P(z)\left[2\mu(z-1) - \lambda z (z-1)(z+2)\right] = \mu P_0 (z-1) 2 \Rightarrow$$

$$P(z)\left[2\mu - \lambda z (z+2)\right] = \mu P_0 2 \Rightarrow$$

$$P(z) = \frac{2\mu P_0}{2\mu - \lambda z (z+2)}.$$

Όμως $P(1) = 1 \to 2\mu P_0 = 2\mu - 3\lambda \Rightarrow$

$P_0 = 1 - \frac{3}{2} \cdot \frac{\lambda}{\mu} \Rightarrow P_0 = 1 - \rho$, όπου

$\rho = \frac{3}{2}\frac{\lambda}{\mu}$. Παρατήρηση ότι ο μέσος αριθμός των πελατών που φθάνουν στη μονάδα του χρόνου είναι $\frac{\lambda}{2} \cdot 1 + \frac{\lambda}{2} \cdot 2 = \frac{3\lambda}{2} = \bar{\lambda}$ οπότε $\rho = \frac{\bar{\lambda}}{\mu} = \frac{3\lambda}{2\mu}$.

β) $\rho < 1 \Rightarrow \dfrac{3\lambda}{2\mu} < 1$.

γ).

$$P(z) = \frac{1-\rho}{1 - \frac{\lambda}{2\mu} z(z+2)} = \frac{1-\rho}{1 - \frac{3\lambda}{2\mu}\cdot\frac{z}{3}(z+2)} \Rightarrow$$

$$P(z) = \frac{1-\rho}{1 - \frac{\rho z(z+2)}{3}} = \frac{1-\rho}{1 - \frac{1}{3}\rho z^2 - \frac{2}{3}\rho z}.$$

Ο παρονομαστής γράφεται ως εξής:

$$\Delta = \frac{4}{9}\rho^2 + \frac{4}{3}\rho = \frac{4}{3}\rho\left(1 + \frac{\rho}{3}\right) > 0$$

Τότε

$$1 - \frac{1}{3}\rho z^2 - \frac{2}{3}\rho z = -\frac{1}{3}\rho(z-z_1)(z-z_2)$$

όπου

$$z_{1,2} = \frac{\frac{2}{3}\rho \pm \sqrt{\frac{4\rho}{9}(3+\rho)}}{-\frac{2\rho}{3}} = \frac{\frac{2}{3}\rho \pm \frac{2}{3}\sqrt{\rho(3+\rho)}}{-\frac{2\rho}{3}} \Rightarrow$$

$$z_{1,2} = \frac{\rho \pm \sqrt{\rho(3+\rho)}}{-\rho}$$

Επιπλέον οι ρίζες z_1, z_2 είναι εκτός του μοναδιαίου κύκλου, δηλαδή $|z_i| > 1$, $i=1,2$.

Πράγματι, αν $f(z) = -\frac{\rho z^2}{3} - \frac{2\rho z}{3}$

και $g(z) = 1$, τότε

$$|f(z)| = \left| -\left(\frac{\rho z^2 + 2\rho z}{3}\right)\right| = \left|\frac{\rho z^2 + 2\rho z}{3}\right|$$

$$\le \frac{\rho}{3}|z|^2 + \frac{2\rho}{3}|z| \overset{|z|=1}{=} \rho < 1 = |g(z)|.$$

υπόθεση

Από Θ. Rouché η $f(z)+g(z)$ και η $g(z)$ έχουν τον ίδιο αριθμό ριζών στο $|z|<1$. Άρα ο παρανομαστής της $P(z)$ ΔΕΝ έχει ρίζες εντός του μοναδιαίου κύκλου, οπότε $|z_i|>1$.

Άρα

$$P(z) = \frac{1-\rho}{-\frac{1}{3}\rho(z-z_1)(z-z_2)} = \frac{A}{z-z_1} + \frac{B}{z-z_2}$$

$$= \frac{(A+B)z - (Az_2 + Bz_1)}{(z-z_1)(z-z_2)}$$

Άρα $\frac{A+B}{-\frac{1}{3}\rho} = 0 \Rightarrow A+B=0$

$$\frac{A z_2 + B z_1}{\frac{1}{3}\rho} = 1-\rho \Rightarrow A z_2 + B z_1 = \frac{1}{3}\rho(1-\rho) \Rightarrow$$

$$A z_2 - z_1 A = \frac{1}{3}\rho(1-\rho) \Rightarrow \boxed{A = \frac{1}{3}\frac{\rho(1-\rho)}{z_2 - z_1}}$$

και $$B = -\frac{1}{3}\frac{\rho(1-\rho)}{z_2 - z_1}$$

Τότε

$$P(z) = \frac{1}{3}\frac{\rho(1-\rho)}{z_2 - z_1}\left[\frac{1}{z - z_1} - \frac{1}{z - z_2}\right]$$

$$= \frac{1}{3}\frac{\rho(1-\rho)}{z_2 - z_1}\left[-\frac{1}{z_1}\cdot\frac{1}{1-\frac{z}{z_1}} + \frac{1}{z_2}\cdot\frac{1}{1-\frac{z}{z_2}}\right] =$$

$$\underset{\left|\frac{z}{z_i}\right|<1}{=} \frac{1}{3}\frac{\rho(1-\rho)}{z_2 - z_1}\left[-\frac{1}{z_1}\sum_{j=0}^{\infty}\left(\frac{z}{z_1}\right)^j + \frac{1}{z_2}\sum_{j=0}^{\infty}\left(\frac{z}{z_2}\right)^j\right]$$

$$= \sum_{j=0}^{\infty}\left\{\frac{1}{3}\frac{\rho(1-\rho)}{z_2 - z_1}\left(\frac{1}{z_2^{j+1}} - \frac{1}{z_1^{j+1}}\right)\right] z^j$$

οπότε $$p_j = \frac{1}{3}\frac{\rho(1-\rho)}{z_2 - z_1}\left(\frac{1}{z_2^{j+1}} - \frac{1}{z_1^{j+1}}\right),$$

2 A α) Αφού αποδειχθεί ότι πρόκειται για ένα M|M|1 με $\lambda = 8$, $\mu = 14$, τότε ψάχνουμε το

$$E(S) = \frac{1}{\mu(1-\rho)} = \frac{1}{14\left(1-\frac{8}{14}\right)} = \frac{1}{6} \text{ ώρες.}$$

β) Θα πρέπει να δειχθεί ότι $S \sim \exp(\mu(1-\rho))$ (θεωρία).

Τότε ψάχνουμε $P\left(S > \frac{1}{3}\right) = 1 - P\left(S \leq \frac{1}{3}\right)$

$$= 1 - \int_0^{1/3} \mu(1-\rho) e^{-\mu(1-\rho)t} dt$$

$$= 1 - \int_0^{1/3} 6 e^{-6t} dt = 1 - \int_0^{1/3} d(-e^{-6t}) =$$

$$= 1 - \left[-e^{-6t}\right]_0^{1/3} = 1 - \left[-e^{-2} + 1\right] = e^{-2}.$$

B) Για το M|M|1

$$E(N) = \frac{\rho}{1-\rho}, \quad E(S) = \frac{1}{\mu(1-\rho)}.$$

Αν διπλασιάσω τα λ, μ, δηλαδή

$$\lambda^* = 2\lambda, \quad \mu^* = 2\mu \Rightarrow \rho^* = \frac{2\lambda}{2\mu} = \frac{\lambda}{\mu} = \rho.$$

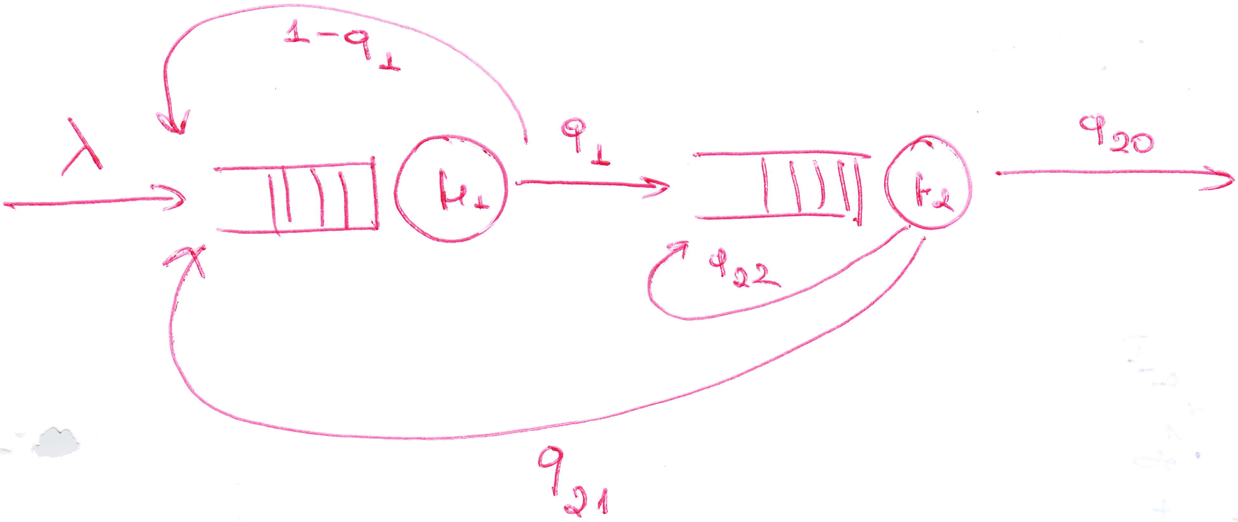
Άρα το $E(N)$ παραμένει σταθερό.

Όμως το νέο $E(S^*) = \dfrac{1}{2\mu(1-\rho)} = \dfrac{E(S)}{2}$.

Ο νέος μέσος χρόνος παραμονής μειώνεται στο μισό.

3) Θεωρία: χρονικά εστραμμένη συμπεριφορά M/M/1.

(4) (8)



Πρόκειται για ένα ~~σύστημα~~ tandem δίκτυο Jackson. Ο συνολικός ρυθμός αφίξεων:

$$\left.\begin{aligned} \Lambda_1 &= \lambda + \Lambda_1 \cdot (1-q_1) + \Lambda_2 \cdot q_{21} \\ \Lambda_2 &= \Lambda_1 \cdot q_1 + \Lambda_2 \cdot q_{22} \end{aligned}\right\} \Longrightarrow$$

$$\left.\begin{aligned} \Lambda_1 \cdot q_1 &= \lambda + \Lambda_2 q_{21} \\ \Lambda_2 (1-q_{22}) &= \Lambda_1 q_1 \end{aligned}\right\} \Longrightarrow$$

$$\Lambda_2 (1-q_{22}) = \lambda + \Lambda_2 q_{21} \Longrightarrow$$

$$\Lambda_2 (1-q_{22}-q_{21}) = \lambda \Longrightarrow \boxed{\Lambda_2 = \frac{\lambda}{q_{20}}}$$

και $\Lambda_1 = \dfrac{\lambda + \dfrac{\lambda q_{21}}{q_{20}}}{q_1} = \dfrac{\lambda (q_{21}+q_{20})}{q_{20}\, q_1}$

όπου

$$\boxed{\Lambda_1 = \frac{\lambda(1-q_{22})}{q_1}}$$

οπότε

$$\pi(n_1, n_2) = (1-\rho_1)(1-\rho_2)\,\rho_1^{n_1}\rho_2^{n_2}$$ με

$$\rho_1 = \frac{\Lambda_1}{\mu_1}, \quad \rho_2 = \frac{\Lambda_2}{\mu_2}$$

τότε $E(N_1) = \dfrac{\rho_1}{1-\rho_1}$, $E(N_2) = \dfrac{\rho_2}{1-\rho_2}$.

$$E(N) = \frac{\rho_1}{1-\rho_1} + \frac{\rho_2}{1-\rho_2}$$

$$E(S) = \frac{E(N)}{\lambda}$$

5) α), β) Θεωρία.

γ) Αν $b(t) = \mu e^{-\mu t} \Rightarrow B^*(s) = \dfrac{\mu}{\mu + s}$, $Re\, s > 0$

Άρα

$$F_{bp}(z) = z \cdot \frac{\mu}{\mu + \lambda - \lambda F_{bp}(z)} \Rightarrow$$

$$(\lambda + \mu) F_{bp}(z) - \lambda \left(F_{bp}(z)\right)^2 = z\mu \Rightarrow$$

$$\lambda \left(F_{bp}(z)\right)^2 - (\lambda + \mu) F_{bp}(z) + z\mu = 0 \quad (1)$$

$$\Delta = (\lambda + \mu)^2 - 4\lambda z \mu.$$

$$F_{bp}(z) = \frac{\lambda + \mu - \sqrt{(\lambda + \mu)^2 - 4\lambda z \mu}}{2\lambda}$$

$\downarrow$

Η μικρότερη ρίζα της (1).

* Παρατήρηση ότι $F_{bp}(1) = 1$