Εισαγωγή στις Μαρκοβιανές Διαδικασίες Συνεχούς Χρόνου

Ι. Δημητρίου

Πανεπιστήμιο Πατρών
Τμήμα Μαθηματικών

idimit@math.upatras.gr

Περιεχόμενα

1. Εισαγωγή στις Μαρκοβιανές αλυσίδες συνεχούς χρόνου

2. Πίνακας μεταβάσεων (Transition probability function)

3. Οριακή συμπεριφορά (Limiting behavior)

Εισαγωγή

- Χρησιμοποιώντας ιδιότητες της διαδικασίας Poisson & της εκθετικής κατανομής.
- Θα δώσει την γενική ιδέα για το πως "λειτουργεί" μια Μαρκοβιανή διαδικασία και μετά θα αναφερθούμε στον "ακριβή" ορισμό.
- (Ross, ασκ. 48, pp. 345-346) Έστω ένα $M/M/n/n$ σύστημα, όπου πελάτες καταφθάνουν σύμφωνα με την διαδικασία Poisson παραμέτρου λ, ενώ κάθε υπάλληλος παρέχει εξυπηρέτηση, που προέρχεται από την $\exp(\mu)$. Αν μια άφιξη βρίσκει όλους τους υπάλληλος απασχολημένους. Ποιος ο αναμενόμενος αριθμός απασχολημένων υπαλλήλων;
- $T_k =$ αναμ. αριθμός απασχολημένων υπαλλήλων που βλέπει η 1η άφιξη, όταν έχουμε k απασχολημένους ($T_n = ?$).
- $T_0 = 0$ (αν έχω 0 απασχολημένους, η επόμενη άφιξη θα βρει σίγουρα 0).
- $T_1 = (1)\frac{\lambda}{\lambda+\mu} + (0)\frac{\mu}{\lambda+\mu} = \frac{\lambda}{\lambda+\mu}$ (αμνήμονη ιδιότητα).

Εισαγωγή

- Γενικά, "Δεσμεύοντας" στο τι θα συμβεί πρώτα:

$$T_k = T_{k-1}\frac{k\mu}{\lambda + k\mu} + k\frac{\lambda}{\lambda + k\mu}, k = 1, 2, \ldots$$

- **Ερμηνεία:** Όταν έχουμε k απασχολημένους, υπάρχουν $k+1$, εκθετικά κατανεμημένα "χρονόμετρα που τρέχουν" και αυτό που θα 'ολοκληρωθεί' γρηγορότερα θα καθορίσει και την κατάσταση που θα μεταβεί η διαδικασία που μετρά τους απασχολημένους υπάλληλους.
  1. Υπάρχουν k $\exp(\mu)$ 'ρολόγια' για κάθε υπολοιπόμενο χρόνο εξυπηρέτησης.
  2. Ένα $\exp(\lambda)$ 'ρολόι' για την επερχόμενη άφιξη.
  3. Χρόνος μέχρι την επόμενη εξυπηρέτηση: $\exp(k\mu)$.
  4. Χρόνος μέχρι την επόμενη άφιξη: $\exp(\lambda)$.
  5. Πιθανότητα να συμβεί πρώτα άφιξη: $\frac{\lambda}{\lambda+k\mu}$.
  6. Πιθανότητα να συμβεί πρώτα εξυπηρέτηση: $\frac{k\mu}{\lambda+k\mu}$.

Παρατηρήσεις

- Όταν έχουμε $i < n$ busy servers: Υπάρχουν $i+1$ εκθετικά κατανεμημένα ¨ρολόγια¨ (i από αυτά είναι $\exp(\mu)$ και 1 $\exp(\lambda)$).
    1. Χρόνος μέχρι την επόμενη μετάβαση: $\exp(\lambda + i\mu)$.
    2. Αν $i = n \Rightarrow \exp(n\mu)$
- Όταν η διαδικασία φύγει από την $i < n$, μεταβαίνει στην $i+1$ με πιθ. $\lambda/(\lambda+i\mu)$, είτε στην $i-1$ με πιθ. $i\mu/(\lambda+i\mu)$. Όταν $i = n$, η διαδικασία μεταβαίνει στην $n-1$ με πιθ. $n\mu/n\mu = 1$.
- όταν ολοκληρωθεί η μετάβαση από την κατάσταση i, η όλη διαδικασία επαναλαμβάνεται και *νέα* εκθετικά κατανεμημένα ¨ρολόγια¨ αρχίζουν να ¨τρέχουν¨ ξανά (λόγω αμνήμονης ιδιότητας).
- **Οποτεδήποτε** εισέρχεται η διαδικασία στην κατάσταση i, η κατανομή του χρόνου παραμονής παραμονής σε αυτή καθώς και οι πιθανότητες μετάβασης παραμένουν ίδιες (χρονική ομογένεια).

Γενίκευση

- Οποτεδήποτε η διαδικασία είναι στην κατάσταση i, υπάρχουν n_i εκθετικά κατανεμημένα ¨ρολόγια¨ που ¨τρέχουν¨ και το πρώτο που θα ¨τελειώσει¨ θα καθορίσει την επόμενη κατάσταση. Έστω $q_{i,j_1}, q_{i,j_2}, \ldots, q_{i,j_{n_i}}$ οι ρυθμοί των εκθετικά κατανεμημένων ¨ρολογιών¨ με $j_1, j_2, \ldots, j_{n_i}$ οι n_i καταστάσεις στις οποίες μπορεί να μεταβεί η διαδικασία.
  $\Rightarrow$ Ο χρόνος μέχρι την επόμενη μετάβαση: $\exp(v_i)$, $v_i = \sum_{m=j_1}^{j_{n_i}} q_{i,m}$.
- Όταν η διαδικασία φύγει από την i, μεταβαίνει στην j_l με πιθ. $q_{i,j_l}/v_i$, $l = 1, 2, \ldots, n_i$.
- όταν ολοκληρωθεί η μετάβαση από την κατάσταση i, η όλη διαδικασία επαναλαμβάνεται και νέα εκθετικά κατανεμημένα ¨ρολόγια¨ αρχίζουν να ¨τρέχουν¨ ξανά (λόγω αμνήμονης ιδιότητας).

Παραδείγματα

- **Διαδικασία Poisson:** $E = \{0, 1, 2, \ldots\}$. Κάθε φορά που είμαστε στην i μπορεί μα μεταβεί μόνο στην $i + 1$. Υπάρχει ένα εκθετικά κατανεμημένο ρολόι με ρυθμό $q_{i,i+1} = \lambda$. Ο χρόνος μέχρι την επόμενη μετάβαση είναι $\exp(v_i) \equiv \exp(\lambda)$. Μεταβαίνει στην $i + 1$ με πιθ. $q_{i,i+1}/v_i = v_i/v_i = 1$.
- **Διαδικασία γεννήσεων Pure birth process:** Γενίκευση της διαδικασίας Poisson με $q_{i,i+1} = \lambda_i$.
- **Διαδικασία γεννήσεων-θανάτων Birth-Death process:** Επιτρεπόμενες μεταβάσεις από την i, μόνο στις $i - 1$, $i + 1$. Οπετεδήποτε είμαστε στην κατάσταση i, υπάρχουν 2 ανεξάρτητα εκθετικά κατανεμημένα ρολόγια: $q_{i,i+1} = \lambda_i$, $q_{i,i-1} = \mu_i$ και $v_i = \lambda_i + \mu_i$, $(i > 0)$. Όταν $i = 0$, τότε μπορούμε να μεταβούμε μόνο στην 1, $q_{0,1} = \lambda_0$.
- Κάθε στοχ. διαδικασία που "λειτουργεί" με αυτόν τον τρόπο είναι Μαρκοβιανή διαδικασία.

Formal definition

Ορισμός 1

Μια στοχ. διαδ. συνεχούς χρόνου $\{X(t) : t \geq 0\}$ με χώρο καταστάσεων E έχει την *Μαρκοβιανή ιδιότητα* αν

$$\begin{aligned} P(X(t+s) = j | X(s) = i, X(u), 0 \leq u < s) = & \; P(X(t+s) = j | X(s) = i) \\ := & \; p_{i,j}(s, t+s) \end{aligned}$$

- Μαρκοβιανή ιδιότητα$\Rightarrow$ Δοθείσης της παροντικής κατάστασης $X(s)$, η μελλοντική κατάσταση $X(t+s)$ είναι ανεξάρτητη των παρελθοντικών: $X(u) = x(u); u < s$.
- Στόχος ο καθορισμός *συναρτήσεων μετάβασης* $P(X(t+s) = j | X(s) = i)$
  $\Rightarrow$ για κάθε $t, s \geq 0$ και για κάθε ζεύγος καταστάσεων (i,j), $i,j \in E$.

Χρονική ομογένεια

Ορισμός 2

Μια Μαρκοβιανή διαδικασία είναι *χρονικά ομογενής* (time-homogeneous) αν για κάθε $s \leq t$ και για κάθε $i, j \in E$

$$P(X(t+s) = j | X(s) = i) = P(X(t) = j | X(0) = i) := p_{i,j}(t).$$

- Οποτεδήποτε η διαδικασία εισέρχεται στην κατάσταση i, ο τρόπος με τον οποίο εξελίσσεται πιθανοθεωρητικά από αυτό το σημείο, είναι ο ίδιος όπως αν η διαδικασία ξεκινούσε από την κατάσταση i την χρ. στιγμή 0.
- Η χρονική ομογένεια και η Μαρκοβιανή ιδιότητα απλοποιούν την ανάλυση.
- Ο πίνακας $\mathbb{P}(t) := (p_{i,j}(t))_{i,j \in E}$ καλείται πίνακας μεταβάσεων.

Transition times

- $T_i :=$ χρόνος παραμονής της $\{X(t) : t \geq 0\}$ στην $i \in E$.
- T_i είναι ο συνολικός χρόνος που απαιτείται μέχρι την μετάβαση από την i σε μια οποιαδήποτε άλλη κατάσταση $j \in E$.

Πρόταση 1

Η T_i προέρχεται από την εκθετική κατανομή.

Απόδειξη: Για $s \geq 0$, το γεγονός $\{T_i > s\}$ είναι ισοδύναμο με το $\{X(u) = i, 0 \leq u \leq s\}$. Ομοίως το $\{T_i > t + s\}$ είναι ισοδύναμο με το $\{X(u) = i, 0 \leq u \leq s + t\}$.

$$
\begin{aligned}
P(T_i > t + s | T_i > s) &= P(X(u) = i, u \in [0, t + s] | X(u) = i, u \in [0, s]) \\
&= P(X(u) = i, u \in [s, t + s] | X(u) = i, u \in [0, s]) \\
&= P(X(u) = i, u \in (s, t + s] | X(u) = i, u \in [0, s]) \text{ (Markov property)} \\
&= P(X(u) = i, u \in (0, t] | X(0) = i) \text{ (Time homogeneity)} \\
&= P(T_i > t).
\end{aligned}
$$

Άρα η T_i έχει την αμνήμονη ιδιότητα.

Εναλλακτικός ορισμός

- Μια στ.δ. συνεχούς χρόνου $\{X(t)\}$ είναι Μαρκοβιανή αν
  1. Οι χρόνοι μετάβασης T_i, $i \in E$ είναι $\exp(\nu_i)$.
  2. Όταν συμβαίνουν οι μεταβάσεις, η ς.δ. μεταβαίνει από την i στην j με πιθανότητες $P_{i,j} = q_{i,j}/\nu_i \Leftrightarrow q_{i,j} = \nu_i P_{i,j}$ και

$$\sum_{j \in E} P_{i,j} = 1, \; P_{i,i} = 0.$$

  3. Οι χρόνοι T_i και η κατάσταση j στην οποία μεταβαίνει μετά το πέρας του T_i η στ.δ. είναι ανεξάρτητοι.
- Ο πίνακας $P = (P_{i,j})_{i,j \in E}$ ορίζει μια *εμφυτευμένη Μαρκοβιανή αλυσίδα* στην $\{X(t)\}$, σε χρονικές στιγμές μεταβάσεων.
- Η $\{X(t)\}$ συμπεριφέρεται σαν μια Μαρκοβιανή αλυσίδα διακριτού χρόνου με την διαφορά ότι:
  - Οι μεταβάσεις συμβαίνουν μετά από χρονικό διάστημα $T_i \in \exp(\nu_i)$.
  - Σε αντίθεση με τις Μαρκ. αλυσίδες διακριτού χρόνου, που οι μεταβάσεις συμβαίνουν μετά από *συγκεκριμένα* (fixed) χρ. διαστήματα.

Ρυθμοί μετάβασης

- Μέσος χρόνος μέχρι την επόμενη μετάβαση: $E(T_i) = 1/\nu_i$
  $\Rightarrow$ ν_i είναι ο ρυθμός των μεταβάσεων έξω από την κατάσταση i.
  $\Rightarrow$ Από αυτές τις μεταβάσεις, ένα ποσοστό $P_{i,j}$ είναι στην κατάσταση j.
- **Ορ:** Ορίζονται ως $q_{i,j} = \nu_i P_{i,j}$.
- Αν γνωρίζουμε τα $q_{i,j}$, μπορούμε να έχουμε τα
  1. $\nu_i = \nu_i \sum_{j \in E} P_{i,j} = \sum_{j \in E} \nu_i P_{i,j} = \sum_{j \in E} q_{i,j}$.
  2. $P_{i,j} = q_{i,j}/\nu_i = q_{i,j} \left(\sum_{j \in E} q_{i,j} \right)^{-1}$.

Διαδικασία γεννήσεων-θανάτων

- Έστω $X(t)$, με τιμές $E = \{0, 1, 2, \ldots\}$ (π.χ. αρ. πελατών σε ένα κατάστημα την χ.στ. t).
- Γεννήσεις (αφίξεις) και θάνατοι (εξυπηρετήσεις) συμβαίνουν με ρυθμούς εξαρτώμενους από την κατάσταση της $\{X(t)\}$. Αν $X(t) = i$,
- αφίξεις $\Rightarrow$ Πελάτες φθάνουν μετά από εκθετικά κατανεμημένο χρ. διάστημα με μέση τιμή $1/\lambda_i$.
  $\Rightarrow$ Ρυθμός αφίξεων $= \lambda_i$ πελάτες στη μονάδα του χρόνου.
- εξυπηρετήσεις $\Rightarrow$ Οι εξυπηρετήσεις είναι εκθετικά κατανεμημένες με μέση τιμή $1/\mu_i$.
  $\Rightarrow$ Ρυθμός εξυπηρετήσεων $= \mu_i$ πελάτες στη μονάδα του χρόνου.
- Οι αφίξεις και οι εξυπηρετήσεις είναι ανεξάρτητες.
- Οι διαδ. Γεννήσεων-Θανάτων (Birth-Death process (BD)) είναι Μαρκοβιανές διαδικασίες.

Transition times and probabilities

- **Q:** Χρόνοι μετάβασης T_i; Αναχωρεί από την κατάσταση $i \neq 0$ όταν συμβεί είτε μια γέννηση, είτε ένας θάνατος.
- Αν T_B, T_D οι χρόνοι μέχρι την επόμενη γέννηση, θάνατο αντίστοιχα. Τότε $T_i = min\{T_B, T_D\}$.
  $\Rightarrow$ αφού T_B, T_D είναι εκθετικά κατανεμημένα, τότε $T_i \sim \exp(\nu_i)$ με $\nu_i = \lambda_i + \mu_i$.
- Όταν φύγει από την i μεταβαίνει στην $i+1$ (άφιξη πρώτα) ή στην $i-1$ (εξυπηρέτηση πρώτα)
  $\Rightarrow$ Η άφιξη συμβαίνει πρώτα με πιθ. $P_{i,i+1} = \frac{\lambda_i}{\lambda_i+\mu_i}$
  $\Rightarrow$ Η εξυπηρέτηση συμβαίνει πρώτα με πιθ. $P_{i,i-1} = \frac{\mu_i}{\lambda_i+\mu_i}$
- Αναχωρεί από την κατ. 0 μόνο με μια άφιξη, οπότε

$$\nu_0 = \lambda_0, \; P_{0,1} = 1 \, .$$

  - Δεν φεύγει από την 0, αν $\lambda_0 = 0$ (model extinction population).

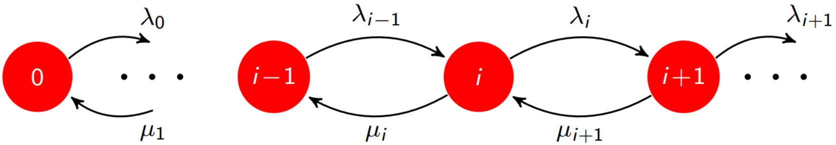
- Μετάβαση από την i στην $i+1$

$$q_{i,i+1} = \nu_i P_{i,i+1} = (\lambda_i + \mu_i)\frac{\lambda_i}{\lambda_i + \mu_i} = \lambda_i.$$

- Μετάβαση από την i στην $i+1$

$$q_{i,i-1} = \nu_i P_{i,i-1} = (\lambda_i + \mu_i)\frac{\mu_i}{\lambda_i + \mu_i} = \mu_i.$$

- Για $i = 0 \Rightarrow q_{0,1} = \nu_0 P_{0,1} = \lambda_0$.
- Όμοια για διαδ. Poisson, $M/M/1$...



Transition probability function

- Δύο ισοδύναμοι ‘ὁρισμοί” για μια ΜΑΣΧ
  1. Γνώση των μέσων χρόνων μετάβασης $1/\nu_i$ + τις πιθανότητες $P_{i,j}$ ή ισοδύναμα τους ρυθμούς μετάβασης $q_{i,j}$.
     $\Rightarrow$ καλύτερη εποπτική εικόνα μελέτης και μοντελοποίησης.
  2. Γνώση των πιθανοτήτων μετάβασης $p_{i,j}(t) = P(X(t) = j | X(0) = i)$.
     $\Rightarrow$ Επιτυγχάνεται πιο “φορμαλιστική” περιγραφή της ΜΑΣΧ.
     $\Rightarrow$ Συνεχής συνάρτηση του t.
     $\Rightarrow$ Συνήθως είναι αδύνατο να βρούμε σε “κλειστή μορφή” τα $P_{i,j}(t)$
     $\Rightarrow$ Μόνο σε ορισμένες ειδικές περιπτώσεις: Διαδ. Poisson(λ):

$$p_{i,j}(t) = P(\text{να γίνουν } j-i \text{ γεγονότα στο } (0,t]) = e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^{j-i}}{(j-i)!}.$$

- ΣΤΟΧΟΣ: Να υπολογιστούν τα $p_{i,j}(t)$ με την βοήθεια των *ρυθμών μετάβασης* $q_{i,j}$ (ή των $P_{i,j}$)
  $\Rightarrow$ με συνθήκη $p_{i,i}(0) = 1$, $p_{i,j}(0) = 0$.

Καθορισμός $p_{i,j}(t)$

- ΣΤΟΧΟΣ: Κατασκευή μιας διαφορικής εξίσωσης με λύση τα $p_{i,j}(t)$
  $\Rightarrow$ Μελέτη των $p_{i,j}(t)$ σε "πολύ μικρές" αλλαγές του χρόνου.
- Διαχωρισμός σε 2 υπο-προβλήματα:
  $\Rightarrow$ πιθ. μετάβασης σε "πολύ μικρό" διάστημα h: $p_{i,j}(h)$
  $\Rightarrow$ πιθ. μετάβασης σε $t+h$, ως συνάρτηση αυτών σε δίαστημα t και h.
- Μπορούμε να συνδυάσουμε τα 2 αποτελέσματα με 2 διαφ. τρόπους:
  1. Μετάβαση απο χ.στ. 0 σε t και μετά στην $t+h$ $\Rightarrow$ *προδρομικές εξισώσεις*
  2. Μετάβαση απο χ.στ. 0 σε h και μετά στην $t+h$ $\Rightarrow$ *οπισθοδρομικές εξισώσεις*

Πιθανότητες μετάβασης σε "άπειροστό" χρόνο

Θεώρημα 3

Οι πιθανότητες $p_{i,j}(t)$, $p_{i,i}(t)$ ικανοποιούν τα παρακάτω όρια καθώς το $t \to 0$

$$\lim_{t\to 0} \frac{p_{i,j}(t)}{t} = q_{i,j}, \quad lim_{t\to 0} \frac{1 - p_{i,i}(t)}{t} = \nu_i. \tag{1}$$

- Αφού $p_{i,j}(0) = 0$, $p_{i,i}(0) = 1$ τα όρια στην (1) είναι οι παράγωγοι στο 0:

$$\frac{d}{dt} p_{i,j}(t)|_{t=0} = q_{i,j}, \quad \frac{d}{dt} p_{i,i}(t)|_{t=0} = -\nu_i.$$

- Τα όρια υποδηλώνουν ότι για "μικρό" h (Taylor)

$$p_{i,j}(h) = q_{i,j}h + o(h), \quad p_{i,i}(h) = 1 - \nu_i h + o(h) \;\; (o(h)/h \to 0 \text{ όταν } h \to 0).$$

- $q_{i,j}$: "άπειροστές" πιθανότητες μετάβασης

Προδρομικές Chapman-Kolmogorov εξισώσεις

Θεώρημα 4

Για κάθε $s, t \geq 0$

$$p_{i,j}(t+s) = \sum_{k \in E} p_{i,k}(t) p_{k,j}(s).$$

- Δηλ. για να μεταβούμε σε χρόνο $t+s$ από την κατάσταση i στην κατάσταση j:
  $\Rightarrow$ Μετάβαση από την i σε κάποια ενδιάμεση κατάσταση k σε χρόνο t $\Rightarrow$ $p_{i,k}(t)$
  $\Rightarrow$ Μετάβαση από την k στην j στον υπολοιπόμενο χρόνο s $\Rightarrow$ $p_{k,j}(s)$
  $\Rightarrow$ άθροισε για όλες τις ενδιάμεσες καταστάσεις k

Απόδειξη:

$$
\begin{aligned}
&P_{ij}(t+s) \\
&\quad = \mathrm{P}\left(X(t+s) = j \,\middle|\, X(0) = i\right) && \text{Definition of } P_{ij}(t+s) \\
&\quad = \sum_{k=0}^{\infty} \mathrm{P}\left(X(t+s) = j \,\middle|\, X(t) = k, X(0) = i\right) \mathrm{P}\left(X(t) = k \,\middle|\, X(0) = i\right) \\
& && \text{Law of total probability} \\
&\quad = \sum_{k=0}^{\infty} \mathrm{P}\left(X(t+s) = j \,\middle|\, X(t) = k\right) P_{ik}(t) && \text{Markov property of CTMC} \\
& && \text{and definition of } P_{ik}(t) \\
&\quad = \sum_{k=0}^{\infty} P_{kj}(s) P_{ik}(t) && \text{Definition of } P_{kj}(s)
\end{aligned}
$$

Συνδυασμός Θεωρ. 3, 4

- Συνδύασε τα Θ. 3, 4 για να προσδιορίσεις το $p_{i,j}(t+h)$ για "μικρό" h.
- Οι C-K εξισώσεις δίνουν

$$p_{i,j}(t+h) = \sum_{k \in E} p_{i,k}(t) p_{k,j}(h) = p_{i,j}(t) p_{j,j}(h) + \sum_{k \neq j} p_{i,k}(t) p_{k,j}(h)$$

- Αντικατέστησε τις "άπειροστές" πιθανότητες για τα $p_{j,j}(h), p_{k,j}(h)$:

$$p_{i,j}(t+h) = p_{i,j}(t)(1 - \nu_j h) + \sum_{k \neq j} p_{i,k}(t) q_{k,j} h + o(h).$$

- Αφαίρεσε από τα δύο μέλη το $p_{i,j}(t)$ και διαίρεσε με h:

$$\frac{p_{i,j}(t+h) - p_{i,j}(t)}{h} = -\nu_j p_{i,j}(t) + \sum_{k \neq j} p_{i,k}(t) q_{k,j} + \frac{o(h)}{h}.$$

- Το αριστερό μέλος υποδηλώνει "παράγωγο"...αν $h \to 0$

Kolmogorov's forward equations

Θεώρημα 5

Για κάθε $i,j \in E$, οι πιθ. μετάβασης $p_{i,j}(t)$ μιας ΜΑΣΧ ικανοποιούν το σύστημα διαφορικών εξισώσεων διαφορών:

$$\frac{d}{dt}p_{i,j}(t) = \sum_{k \neq j} p_{i,k}(t)q_{k,j} - \nu_j p_{i,j}(t). \tag{2}$$

- Ερμηνεία όρων στην (2):
  1. $\frac{d}{dt}p_{i,j}(t)$: ρυθμός αλλαγής της $p_{i,j}(t)$.
  2. $p_{i,k}(t)q_{k,j}$: (μετάβαση στην k από το $0 \to t$)×(ρυθμός μετάβασης από την k στην j την επόμενη χρ. στιγμή)
  3. $\nu_j p_{i,j}(t)$: (μετάβαση στην j από το $0 \to t$)×(ρυθμός μετάβασης έξω από j την επόμενη χρ. στιγμή)

Σε όρους πινάκων, η (2) γράφεται

$$\frac{d}{dt}\mathbb{P}(t) = \mathbb{P}(t)\mathbb{Q}. \tag{3}$$

- Ο πίνακας

$$\mathbb{Q} = \begin{pmatrix} -\nu_0 & q_{0,1} & q_{0,2} & \cdots \\ q_{1,0} & -\nu_1 & q_{1,2} & \cdots \\ q_{2,0} & q_{2,1} & -\nu_2 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \end{pmatrix}$$

καλείται *'άπειροστός" γεννήτορας* της ΜΑΣΧ ή πίνακας *ρυθμών μετάβασης*.

1. $q_{i,j} \geq 0$
2. $-\nu_i + \sum_{j \neq i} q_{i,j} = 0$ (άθροισμα των στοιχείων κάθε γραμμής ίσο με 0).

- Αφού $p_{i,j}(0) = 0,\ p_{j,j} = 1 \ \Rightarrow \mathbb{P}(0) = \mathbb{I}$.
- Από την (3),

$$\mathbb{P}(t) = e^{\mathbb{Q}t} = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{Q}^n \frac{t^n}{n!}. \quad (4)$$

- Δύσκολη έως αδύνατη η εύρεση του $\mathbb{P}(t)$ σε "κλειστή" μορφή.
- Σπουδαίος ο ρόλος του $\mathbb{Q}$.

ΜΑΣΧ δύο καταστάσεων: το M/M/1/1

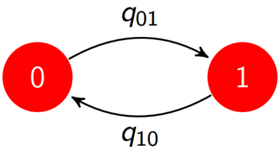
- $X(t)$: αρ. πελατών στο σύστημα τη χ.στ. t, $E = \{0, 1\}$.
- Ρυθμοί μετάβασης: $q_{0,1} = \lambda$ και $q_{1,0} = \mu$.
- Γνωρίζοντας τα $q_{0,1}$, $q_{1,0}$ μπορούμε να βρούμε τους χρόνους 'έξόδου' από οποιαδήποτε κατάσταση:

$$\nu_0 = \sum_j q_{0,j} = q_{0,1} = \lambda, \quad \nu_1 = \sum_j q_{1,j} = q_{1,0} = \mu.$$

- Χρησιμοποίησε τις προδρομικές εξισώσεις Kolmogorov για να βρεις τις πιθανότητες μετάβασης

$$p_{0,0}(t), p_{0,1}(t), p_{1,0}(t), p_{1,1}(t).$$

- Παρατήρησε ότι: $p_{0,0}(t) + p_{0,1}(t) = 1$, $p_{1,0}(t) + p_{1,1}(t) = 1$.



Εξισώσεις Kolmogorov

- Ο γεννήτορας της $\{X(t)\}$ είναι

$$\mathbb{Q} = \begin{pmatrix} -\lambda & \lambda \\ \mu & -\mu \end{pmatrix}$$

- Αν $\frac{d}{dt}p_{i,j}(t) = p'_{i,j}(t)$ τότε

$$\begin{aligned} p'_{0,0}(t) &= -\lambda p_{0,0}(t) + \mu p_{0,1}(t), \quad p_{0,0}(0) = 1, \\ p'_{0,1}(t) &= -\mu p_{0,1}(t) + \lambda p_{0,0}(t), \quad p_{0,1}(0) = 0, \\ p'_{1,0}(t) &= -\lambda p_{1,0}(t) + \mu p_{1,1}(t), \quad p_{1,0}(0) = 0, \\ p'_{1,1}(t) &= -\mu p_{1,1}(t) + \lambda p_{1,0}(t), \quad p_{1,1}(0) = 1. \end{aligned}$$

- Δεν χρειάζεται να λύσουμε ταυτόχρονα και τις 4. Αρκεί να πάρουμε π.χ. τις δυο πρώτες και να χρησιμοποιήσουμε την $p_{0,0}(t) + p_{0,1}(t) = 1$.

ΜΑΣΧ δύο καταστάσεων: το M/M/1/1 (συνεχ.)

- Αντικαθιστώντας την $p_{0,1}(t) = 1 - p_{0,0}(t)$ στην 1η:

$$p'_{0,0}(t) = -\lambda p_{0,0}(t) + \mu(1 - p_{0,0}(t)) = -(\lambda + \mu)p_{0,0}(t) + \mu.$$

- Πρόκειται για μια μη-ομογενή δ.ε. 1ης τάξης με σταθερούς συντελεστές και λύση ($p_{0,0}(0) = 1$)

$$\begin{aligned} p_{0,0}(t) &= e^{-\frac{\lambda+\mu}{1}t}\left[p_{0,0}(0)e^{-\frac{\lambda+\mu}{1}0} + \int_0^t \frac{\mu}{1}e^{-\frac{\lambda+\mu}{1}u}du\right] \\ &= e^{-\frac{\lambda+\mu}{1}t}\left[1 + \frac{\mu}{\lambda+\mu}\int_0^t de^{-(\lambda+\mu)u}\right] \\ &= \frac{\mu}{\lambda+\mu} + \frac{\lambda}{\lambda+\mu}e^{-(\lambda+\mu)t}. \\ p_{0,1}(t) &= 1 - p_{0,0}(t) = \frac{\lambda}{\lambda+\mu}(1 - e^{-(\lambda+\mu)t}). \end{aligned}$$

- Ομοίως τα υπόλοιπα (άσκηση...)

$$\mathbb{P}(t) = \begin{pmatrix} \frac{\mu}{\lambda+\mu} + \frac{\lambda}{\lambda+\mu}e^{-(\lambda+\mu)t} & \frac{\lambda}{\lambda+\mu}(1 - e^{-(\lambda+\mu)t}) \\ \frac{\mu}{\lambda+\mu}(1 - e^{-(\lambda+\mu)t}) & \frac{\lambda}{\lambda+\mu} + \frac{\mu}{\lambda+\mu}e^{-(\lambda+\mu)t} \end{pmatrix}.$$

Οριακή συμπεριφορά των $p_{i,j}(t)$ (συνέχεια)

- Παρατηρούμε ότι τα $p_{i,j}(t)$ συγκλίνουν "έκθετικά" καθώς $t \to \infty$.
  $\Rightarrow$ ο ρυθμός σύγκλισης εξαρτάται από το μέγεθος του $\lambda + \mu$.
- Οι οριακές (στάσιμες) πιθανότητες είναι:

$$\lim_{t\to\infty} p_{0,0}(t) = \tfrac{\mu}{\lambda+\mu}, \quad \lim_{t\to\infty} p_{0,1}(t) = \tfrac{\lambda}{\lambda+\mu},$$
$$\lim_{t\to\infty} p_{1,0}(t) = \tfrac{\mu}{\lambda+\mu}, \quad \lim_{t\to\infty} p_{1,1}(t) = \tfrac{\lambda}{\lambda+\mu}.$$

- Οι οριακές πιθανότητες υπάρχουν και είναι ανεξάρτητες της αρχικής κατάστασης

$$\lim_{t\to\infty} \mathbb{P}(t) = \begin{pmatrix} \frac{\mu}{\lambda+\mu} & \frac{\lambda}{\lambda+\mu} \\ \frac{\mu}{\lambda+\mu} & \frac{\lambda}{\lambda+\mu} \end{pmatrix}.$$

Οριακή συμπεριφορά

- Έχοντας κατά νου την εμφυτευμένη Μαρκοβιανή αλυσίδα (ΜΑΔΧ) σε χρ. στ. *μεταβάσεων* της $\{X(t)\}$
  $\Rightarrow$ οι πιθ. μετάβασης ορίζουν τον πίνακα P
  $\Rightarrow$ Σε αυτόν ισχύει $P_{i,i} = 0$.
- Οι καταστάσεις $i \leftrightarrow j$ (επικοινωνούν) στο πλαίσιο της ΜΑΣΧ αν $i \leftrightarrow j$ σε αυτό της εμφυτευμένης ΜΑΔΧ.
  $\Rightarrow$ Η επικοινωνία όρίζει διαμέριση των καταστάσεων της ΜΑΔΧ
  $\Rightarrow$ Ορίζει επίσης διαμέριση των καταστάσεων της ΜΑΣΧ.
- Η ΜΑΣΧ είναι αδιαχώριστη αν η αντίστοιχη εμφυτευμένη ΜΑΔΧ είναι αδιαχώριστη.
- Η $i \in E$ είναι *επαναληπτική* αν είναι επαναληπτική στο πλαίσιο της εμφυτευμένης ΜΑΔΧ (ανάλογα είναι *παροδική* και *θετικά επαναληπτική*).
- Περιοδικότητα δεν εμφανίζεται στις ΜΑΣΧ.

Οριακή συμπεριφορά

Θεώρημα 6

Έστω μια αδιαχώριστη και θετικά επαναληπτική ΜΑΣΧ με ρυθμούς μεταβάσεων ν_i, $q_{i,j}$. *Τότε τα* $\lim_{t\to\infty} p_{i,j}(t)$, *υπάρχουν και είναι ανεξάρτητα της αρχικής κατάστασης. Δηλ.*

$$\pi_j = \lim_{t\to\infty} p_{i,j}(t) \text{ (υπάρχουν για όλα τα } (i,j) \in E).$$

Επιπλέον, οι οριακές πιθανότητες π_j, $j \in E$ *είναι η μοναδική μη-αρνητική λύση του συστήματος*

$$\nu_j \pi_j = \sum_{k \neq j, k \in E} q_{k,j} \pi_k, \quad \sum_{j \in E} \pi_j = 1\,.$$

- Οι οριακές πιθανότητες υπάρχουν και είναι ανεξάρτητες της αρχικής κατάστασης.
- Αποτελούν λύση ενός συστήματος γραμμικών εξισώσεων.

Εξισώσεις Kolmogorov

- Όπως και στις ΜΑΔΧ, η δυσκολία προκύπτει στην απόδειξη του ότι **υπάρχουν** τα $\lim_{t\to\infty} p_{i,j}(t)$.
- Σχέση από τις προδρομικές εξισώσεις Kolmogorov

$$\frac{d}{dt}p_{i,j}(t) = \sum_{k\neq j} p_{i,k}(t)q_{k,j} - \nu_j p_{i,j}(t). \tag{5}$$

- Αν οι οριακές πιθανότητες υπάρχουν, τότε ανεξάρτητα από την αρχική κατάσταση

$$\lim_{t\to\infty} \frac{d}{dt}p_{i,j}(t) = 0, \quad \lim_{t\to\infty} p_{i,j}(t) = \pi_j$$

- Για $t \to \infty$ στη (5)

$$0 = \sum_{k\neq j} \pi_k q_{k,j} - \nu_j \pi_j \ \text{(Στάσιμες εξισώσεις)}.$$

- Σε όρους πινάκων, αν $\pi = (\pi_j)_{j\in E}$,

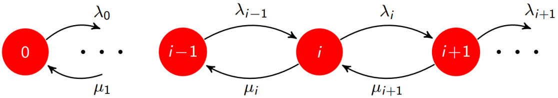
$$\pi\mathbb{Q} = 0, \quad \pi\mathbf{1} = 1.$$

Ολικές εξισώσεις ισορροπίας

- Από τις στάσιμες εξισώσεις $\Rightarrow$ $\nu_j \pi_j = \sum_{k \neq j, k \in E} q_{k,j} \pi_k$.
- π_j : Ποσοστό του χρόνου που περνά η ΜΑΣΧ στην j.
- ν_j : Ρυθμός μετάβασης έξω από την κατάσταση j δοθέντος ότι η ΜΑΣΧ είναι στην j
  $\Rightarrow$ $\nu_j \pi_j$: Ρυθμός μετάβασης έξω από την κατάσταση j (unconditional).
- $q_{k,j}$: Ρυθμός μετάβασης από την k στην j δοθέντος ότι η ΜΑΣΧ είναι στην k
  $\Rightarrow$ $q_{k,j} \pi_k$: Ρυθμός μετάβασης την k στην j (unconditional).
  $\Rightarrow$ $\sum_{k \neq j, k \in E} q_{k,j} \pi_k$: Ρυθμός εισόδου στην j, από όλες τις καταστάσεις.
- Ρυθμός εξόδου από την j=Ρυθμός εισόδου στην j.
- Εξισώσεις ισορροπίας$\Rightarrow$ εξισώνουν τον αρ. των μεταβάσεων μέσα και έξω από μια κατάσταση.

Διαδικασία Γεννήσεων-Θανάτων

- Γεννήσεις/θανάτοι συμβαίνουν με ρυθμούς εξαρτώμενους από την κατάσταση της ΜΑΣΧ. Αν $X(t) = i$,
- Γεννήσεις$\Rightarrow$ ένα νέο μέλος προστίθεται μετα από χρόνο $\exp(\lambda)$.
  $\Rightarrow$ Ρυθμός γεννήσεων: $q_{i,i+1} = \lambda$.
- Θάνατοι$\Rightarrow$ ένα μέλος πεθαίνει μετα από χρόνο $\exp(\mu_i)$.
  $\Rightarrow$ Ρυθμός θανάτων: $q_{i,i-1} = \mu_i$.
- Ρυθμοί εξόδου $\nu_i = \lambda_i + \mu_i$, $i > 0$, $\nu_0 = \lambda_0$.



- Ολικές εξισώσεις ισορροπίας: ρυθμός εξόδου από j=ρυθμός εισόδου στην j

$$\begin{aligned} \lambda_0 \pi_0 &= \mu_1 \pi_1 \\ (\lambda_j + \mu_j)\pi_j &= \lambda_{j-1}\pi_{j-1} + \mu_{j+1}\pi_{j+1}, \; j > 0. \end{aligned}$$

Αναδρομική επίλυση

Λύνοντας το παραπάνω σύστημα *εξισώσεων διαφορών* αναδρομικά

$$\pi_1 = \frac{\lambda_0}{\mu_1}\pi_0.$$

Αντικαθιστώντας στην 2η για $j = 1 \dots$

$$\pi_2 = \frac{\lambda_1}{\mu_2}\pi_1 = \frac{\lambda_0\lambda_1}{\mu_1\mu_2}\pi_0.$$

Συνεχίζοντας,

$$\pi_j = \frac{\lambda_0\lambda_1\dots\lambda_{j-1}}{\mu_1\mu_2\dots\mu_j}\pi_0, j \geq 1.$$

Αναδρομική επίλυση (συνέχεια)

Όμως πρέπει

$$1 = \sum_{j=0}^{\infty} \pi_j = \pi_0[1 + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\lambda_0 \lambda_1 \ldots \lambda_{j-1}}{\mu_1 \mu_2 \ldots \mu_j}].$$

Αν η σειρά

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{\lambda_0 \lambda_1 \ldots \lambda_{j-1}}{\mu_1 \mu_2 \ldots \mu_j} < \infty,$$

τότε

$$\pi_0 = [1 + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\lambda_0 \lambda_1 \ldots \lambda_{j-1}}{\mu_1 \mu_2 \ldots \mu_j}]^{-1}$$

και

$$\pi_j = \frac{\lambda_0 \lambda_1 \ldots \lambda_{j-1}}{\mu_1 \mu_2 \ldots \mu_j} \times [1 + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\lambda_0 \lambda_1 \ldots \lambda_{j-1}}{\mu_1 \mu_2 \ldots \mu_j}]^{-1}, \ j \geq 1 \,.$$

Reading material

1. V. Kulkarni, (2010). Introduction to Modeling and Analysis of Stochastic Systems, Springer. (**Chapter 4**, Sections 4.1-4.6)
2. S. Ross (2010), Introduction to Probability Models, 10th ed., Academic Press. (**Chapter 6**).