Εισαγωγή στις Στοχαστικές Διαδικασίες

Ι. Δημητρίου

Πανεπιστήμιο Πατρών
Τμήμα Μαθηματικών

idimit@math.upatras.gr

Περιεχόμενα

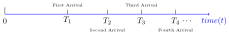
Στοχαστικό σύστημα

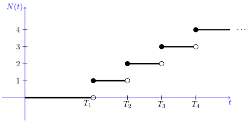
- Στοχαστικά συστήματα: Οποιοδήποτε σύστημα το οποίο εξελίσσεται στον χρόνο σύμφωνα με τους κανόνες της τύχης.
  $\Rightarrow$ Ο χρόνος μπορεί να είναι διακριτός ($n = 0, 1, \ldots$) ή συνεχής ($t \in [0, \infty]$).
- Ποιο συγκεκριμένα, μια στοχαστική διαδικασία αντιστοιχεί μια συνάρτηση του χρόνου σε κάθε τυχαίο φαινόμενο.
- Κατ' αναλογία, μια τυχαία μεταβλητή αντιστοιχεί μια τιμή σε κάθε τυχαίο φαινόμενο.

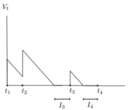
Ορισμός 1

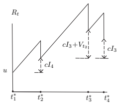
Μια στοχαστική διαδικασία $\{X(t); t \in T\}$ είναι μια *συλλογή* τ.μ. ορισμένων σε ένα σύνολο T (παραμετρικός χώρος, εκφράζει χρόνο) με τιμές σε ένα σύνολο E (χώρος καταστάσεων).

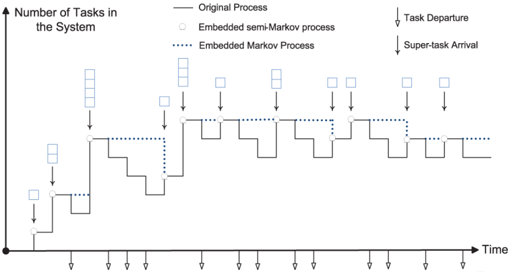
- $T = \{0, 1, 2, \ldots\}$. Τότε γράφουμε $\{X_n; n \geq 0\}$
- $T \in [0, \infty)$.
- $E \subseteq \{0, 1, 2, \ldots\}$ ή $E \subseteq (-\infty, \infty)$











Εκθετική κατανομή

- Παίζει σημαντικό ρόλο στην περιγραφή των Μαρκοβιανών διαδικασιών.

Μια τ.μ. T ακολουθεί την εκθετική κατανομή με παράμετρο λ ($T \sim \exp(\lambda)$) αν

$$F(t) = P(T \leq t) = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ 1 - e^{-\lambda t}, & t \geq 0. \end{cases} \tag{1}$$

Η συν.π.π. δίνεται από

$$f(t) = F'(t) = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ \lambda e^{-\lambda t}, & t \geq 0. \end{cases} \tag{2}$$

Ερμηνεία συν.π.π.≡ για ένα πολύ μικρό χρονικό διάστημα dt

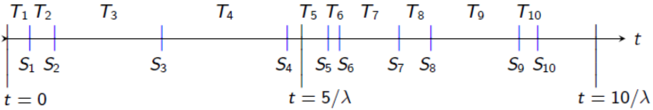
$$P(t < T \leq t + dt) \approx f(t)dt$$

Expectation and Variance

Αν $T \sim \exp(\lambda)$ τότε

$$E(T) = \int_0^\infty t\lambda e^{-\lambda t} dt = -te^{-\lambda t}|_{t=0}^{\infty} + \int_0^\infty e^{-\lambda t} dt = \frac{1}{\lambda},$$

- λ είναι ο ρυθμός εμφάνισης των γεγονότων σε διαστήματα μήκους T.
- Δηλ. κατά μέσο όρο συμβαίνουν λt γεγονότα μέχρι την χρ. στιγμή t.
- Μεγαλύτερο $\lambda \Rightarrow$ μικρότεροι χρόνοι μέχρι την εμφάνιση ενός φαινομένου.



Expectation and Variance

$$\begin{aligned} E(T^2) = & \int_0^\infty t^2 \lambda e^{-\lambda t} dt = -t^2 e^{-\lambda t}|_{t=0}^{\infty} + \int_0^\infty 2te^{-\lambda t} dt \\ = & \ 0 + \tfrac{2}{\lambda} E(T) = \tfrac{2}{\lambda^2}, \\ Var(T) = & \ E(T^2) - (E(T))^2 = \tfrac{2}{\lambda^2} - \tfrac{1}{\lambda^2} = \tfrac{1}{\lambda^2}. \end{aligned}$$

- λ καθορίζει πλήρως την μέση τιμή και την διακύμανση.
- Ροπές υψηλότερης τάξης:

$$E(T^n) = \int_0^\infty t^n \lambda e^{-\lambda t} dt = \frac{n!}{\lambda^n}.$$

Η ιδιότητα της αμνησίας

Ορισμός 2

Μια μη-αρνητική τ.μ. T έχει την *ιδιότητα της αμνησίας* αν $\forall$ $t, s \geq 0$

$$P(T > t + s | T > s) = P(T > t).$$

Αν $T \sim \exp(\lambda)$ τότε έχει την ιδιότητα της αμνησίας

$$P(T > t + s | T > s) = \frac{P(T > t + s, T > s)}{P(T > s)} = \frac{P(T > t + s)}{P(T > s)} = \frac{e^{-\lambda(t+s)}}{e^{-\lambda s}} = e^{-\lambda t} = P(T > t).$$

Δηλ. η πιθανότητα *να περιμένω* t παραπάνω χρον. μονάδες (π.χ. seconds) δοθέντος ότι έχουμε ήδη περιμένει s, ισούται με την πιθανότητα *να περιμένω* επιπλέον t seconds

- Το σύστημα "ξεχνά" ότι έχει ήδη περιμένει s seconds.
- Ίδια κατανομή ανεξάρτητα από τον χρόνο που έχει ήδη παρέλθει.
- Η εκθετική κατανομή είναι η μοναδική συνεχής με την αμνήμονη ιδιότητα.

Constant failure rate

Αν $T \sim \exp(\lambda)$ τότε για οποιοδήποτε μικρό χρ. διάστημα dt

$$P(T \leq t + dt | T > t) = \frac{P(t < T \leq t + dt)}{P(T > t)} = \frac{e^{-\lambda t} - e^{-\lambda(t+dt)}}{e^{-\lambda t}} = 1 - e^{-\lambda dt}. \approx \lambda dt$$

Δηλαδή,

$$P(t < T \leq t + dt | T > t) = \lambda dt + o(dt),$$

όπου $o(dt)$ μια συνάρτηση τέτοια ώστε $\lim_{h \to 0} o(h)/h = 0$ (παράγοντας διόρθωσης): η $o(h)$ συγκλίνει στο 0 πιο γρήγορα από το h.

- Όταν $dt \to 0$, η λdt είναι η πιθανότητα ο χρόνος ζωής μια μηχανής να ολοκληρωθεί στο $(t, t + dt)$, δοθέντος ότι η μηχανή είναι σε λειτουργία για χρόνο τουλάχιστον t.
- Το τελευταίο βήμα προκύπτει από την εφαρμογή της σειράς Taylor της e^x:

$$e^x = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(\lambda x)^j}{j!}$$

Exponential times example

- Έστω ότι ένας πελάτης χρειάζεται χρόνο $T \sim \exp(1/10)$ λεπτά για να φτάσει σε ένα κατάστημα.
  $\Rightarrow$ Έστω ότι έχουν παρέλθει 5 λεπτά χωρίς άφιξη.
- Q: Ποια η πιθανότητα να φτάσει ένας πελάτης στα επόμενα 3 λεπτά;
- Από αμνήμονη ιδιότητα της εκθετικής κατανομής

$$P(T \leq 8|T > 5) = 1 - P(T > 8|T > 5) = 1 - P(T > 3) = 1 - e^{-3/10}.$$

- Q: Ποια η πιθανότητα να φτάσει ένας πελάτης μετά από 9 λεπτά;

$$P(T > 9|T > 5) = 1 - P(T > 8|T > 5) = P(T > 4) = e^{-4/10}.$$

- Q: Ποιος ο αναμενόμενος extra χρόνος μέχρι την πρώτη άφιξη;
- extra χρόνος: $T - 5$ και $P(T - 5 > t|T > 5) = P(T > t)$. Άρα

$$E(T - 5|T > 5) = E(T) = 1/\lambda = 10.$$

Time to first event

- Έστω $T_i \sim \exp(\lambda_i)$, $i = 1, 2$, ανεξ. τ.μ. (π.χ. T_i χρόνος ζωής μηχανής i).
- Q: Ποια η πιθανότητα εμφάνισης του 1ου γεγονότος; δηλ $T = min(T_1, T_2)$;
  $\Rightarrow$ Για να έχουμε $T > t$ πρέπει $T_1 > t$ και $T_2 > t$.
- Η ανεξαρτησία των T_1, T_2 δηλώνει

$$P(T > t) = P(T_1 > t, T_2 > t) = P(T_1 > t)P(T_2 > t) = e^{-(\lambda_1+\lambda_2)t}.$$

- Άρα $T = min(T_1, T_2) \sim \exp(\lambda_1 + \lambda_2)$.
- Γενικά, για n ανεξάρτητες τ.μ. $T_i \sim \exp(\lambda_i)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, αν $T := min(T_i; i = 1, 2, \ldots, n)$, τότε

$$T \sim \exp(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i).$$

Probability of first failure

- Q: $P(T_1 < T_2)$? αν $T_i \sim \exp(\lambda_i)$

$$\begin{aligned} P(T_1 < T_2) = & \int_0^\infty P(T_1 < t | T_2 = t) f_{T_2}(t) dt = \int_0^\infty F_{T_1}(t) f_{T_2}(t) dt \\ = & \int_0^\infty (1 - e^{-\lambda_1 t}) \lambda_2 e^{-\lambda_2 t} dt = \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2}. \end{aligned}$$

- $P(T_1 > T_2) = 1 - P(T_1 < T_2) = \frac{\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2}$. **Example 5.1, Kulkarni, p. 149.**
- Έστω $T_i \sim \exp(\lambda_i)$, $i = 1, \ldots, n$, ανεξ. τ.μ. και $T = min(T_i; i = 1, 2, \ldots, n)$. Τότε

$$P(T_j = min(T_i; i = 1, \ldots, n)) = \frac{\lambda_j}{\sum_{i=1}^n \lambda_i}.$$

- *Ισχυρή αμνήμονη ιδιότητα:* Έστω $T \sim \exp(\lambda)$ και X τ.μ. ανεξάρτητη της T. Τότε

$$P(T > X + t | T > X) = P(T > t).$$

$\Rightarrow$ "Ξεχνά" επίσης τυχαία αλλά ανεξάρτητα χρονικά διαστήματα.

Κατανομές που προκύπτουν από την εκθετική

Αθροισμα ανεξάρτητων και ισόνομων εκθετικών τ.μ.: Έστω $T = \sum_{i=1}^{n} T_i$, με $T_i \sim \exp(\lambda)$. Τότε $T \sim Gamma(n, \lambda)$ με

$$f_T(t) = \lambda \frac{(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\lambda t}, F_T(t) = 1 - e^{-\lambda t} \sum_{r=0}^{n-1} \frac{(\lambda t)^n}{n!}, t \geq 0.$$

Υποεκθετική: Έστω $T = \sum_{i=1}^{n} T_i$, με $T_i \sim \exp(\lambda_i)$, $i = 1, \ldots, n$. Τότε

$$f_T(t) = \sum_{i=1}^{n} a_i \lambda_i e^{-\lambda_i t},$$

με $a_i = \prod_{j \neq i, j=1}^{n} \frac{\lambda_j}{\lambda_j - \lambda_i}$, $i = 1, \ldots, n$. **(Ross, p. 294)**

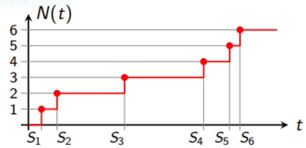
Random sums of iid exponentials: Έστω $T = \sum_{i=1}^{N} T_i$, με $T_i \sim \exp(\lambda)$ και $N \sim Geo(p)$. Τότε $T \sim \exp(\lambda p)$.

Kulkarni, ex. 5.5

Διαδικασία απαρίθμησης

- Έστω $N(t)$ στοχ. διαδικασία ορισμένη στο $[0, \infty)$.
- **Ορισμος** Η $N(t)$ καλείται διαδικασία απαρίθμησης και μετρά τον αριθμό των συμβάντων μέχρι την χ.ς. t.
- $N(0) = 0$, $N(t) \in \{0, 1, 2, \ldots\}$
- $N(s) \leq N(t)$ για $s < t$ (μή-φθίνουσα) και δεξιά συνεχής.
- $N(t) - N(s) \equiv$ αρ. γεγονότων στο $(s, t]$.

π.χ. 1: αρ. πελατών που φθάνουν σε ένα κατάστημα μέχρι τις 10:00.
π.χ. 2: αρ. οικονομικών κρίσεων από το 1900.
π.χ. 3: αρ. SMS στην αίθουσα μέχρι τώρα.



Ανεξάρτητες προσαυξήσεις

- Έστω $s_1 < t_1 < s_2 < t_2$ και $(s_1, t_1]$, $(s_2, t_2]$. Τότε
  $\Rightarrow N(t_1) - N(s_1) =$ αρ. γεγονότων στο $(s_1, t_1]$
  $\Rightarrow N(t_2) - N(s_2) =$ αρ. γεγονότων στο $(s_2, t_2]$.
- **Ορισμός:** Για μια στοχ. διαδικασία με ανεξάρτητες προσαυξήσεις

$$P(N(t_1) - N(s_1) = k, N(t_2) - N(s_2) = l)$$
$$= P(N(t_1) - N(s_1) = k)P(N(t_2) - N(s_2) = l).$$

- Αριθμός των γεγονότων σε μη επικαλυπτόμενα χρονικά διαστήματα είναι ανεξάρτητος.

π.χ. 1: αρ. πελατών που φθάνουν σε ένα κατάστημα μέχρι τις 10:00 (**Πιθανό εκτός και αν συμβεί κάποιο έκτακτο γεγονός, π.χ. τυφώνας**).
π.χ. 2: αρ. οικονομικών κρίσεων από το 1900 (**Μάλλον απίθανο–οικονομικοί κύκλοι**).
π.χ. 3: αρ. SMS στην αίθουσα μέχρι τώρα (**Πιθανό εκτός και αν είναι επείγον να τα στείλουμε**).

Στάσιμες προσαυξήσεις

- Θεώρησε τα διαστήματα $(0, t]$, $(s, t+s]$
  $\Rightarrow N(t) =$ αρ. γεγονότων στο $(0, t]$
  $\Rightarrow N(t+s) - N(s) =$ αρ. γεγονότων στο $(s, t+s]$
- **Ορισμός:** Για μια στοχ. διαδικασία με στάσιμες προσαυξήσεις

$$P(N(t+s) - N(s) = k) = P(N(t) = k).$$

- Η κατανομή του αριθμού των γεγονότων σε ένα χρονικό διάστημα εξαρτάται **μόνο** από το μήκος του.

π.χ. 1: αρ. πελατών που φθάνουν σε ένα κατάστημα μέχρι τις 10:00 (**Απίθανό, ώρες αιχμής**).
π.χ. 2: αρ. οικονομικών κρίσεων από το 1900 (**Πιθανό αν υποθέσουμε ότι δεν είμαστε σε θέση να προβλέπουμε τις κρίσεις και να τις αποτρέπουμε.**).
π.χ. 3: αρ. SMS στην αίθουσα μέχρι τώρα (**Πιθανό αν σας ενδιαφέρει το μάθημα και δεν είναι βαρετό!!**).

Διαδικασία Poisson

Έστω $\{T_n, n \geq 1\}$ ακολουθία ανεξάρτητων μη-αρνητικών τ.μ. που παριστούν τους χρόνους μεταξύ διαδοχικών εμφανίσεων ενός φαινομένου. Έστω,

$$S_0 = 0, S_n = T_1 + T_2 + \ldots + T_n, n \geq 1.$$

$S_n \equiv$ Χρον. στιγμή n-οστής εμφάνισης του φαινομένου. Τότε

$$N(t) = max\{n \geq 0 : S_n \leq t\}.$$

Ορισμός 3

Μια διαδικασία απαρίθμησης είναι Poisson με παράμετρο λ αν η $\{T_n, n \geq 1\}$ είναι μια ακολουθία ανεξάρτητων και ισόνομων τ.μ. απο την εκθετική κατανομή με παράμετρο λ (ανανεωτική διαδικασία).

Διαδικασία Poisson

Ορισμός 4

Μια διαδικασία απαρίθμησης είναι Poisson αν-ν

1. Έχει **ανεξάρτητες** και **στάσιμες** προσαυξήσεις
2. Ο αριθμός των γεγονότων που συμβαίνουν στο $(0, t]$ έχει την κατανομή Poisson με παράμετρο λt.

$$P(N(t) = k) = \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t}.$$

Αποδ. 1: Ισχύει

$$\begin{aligned} N(t) \geq k \Leftrightarrow & \quad k \text{ ή περισσότερα γεγονότα στο } (0,t] \\ \Leftrightarrow & \quad \text{το } k \text{ γεγονός λαμβάνει χώρα το πολύ μέχρι την χ.ς.} \\ \Leftrightarrow & \quad S_k \leq t. \end{aligned}$$

Άρα $P(N(t) \geq k) = P(S_k \leq t)$. Όμως $S_k \sim Gamma(k, \lambda)$

Διαδικασία Poisson

Οπότε

$$\begin{aligned} P(N(t)=k) &= P(N(t)\geq k) - P(N(t)\geq k+1) \\ &= P(S_k \leq t) - P(S_{k+1}\leq t) \\ &= [1 - e^{-\lambda t}\textstyle\sum_{r=0}^{k-1}\frac{(\lambda t)^r}{r!}] - [1 - e^{-\lambda t}\sum_{r=0}^{k}\frac{(\lambda t)^r}{r!}] \\ &= e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^k}{k!}. \end{aligned}$$

Ορισμός 5

Η $\{N(t)\}$ λέγεται διαδικασία Poisson με παράμετρο λ αν-ν

1. Έχει **ανεξάρτητες** και **στάσιμες** προσαυξήσεις,
2. $$\begin{aligned} P(N(0)=0) &= 1, \\ P(N(h)=0) &= 1-\lambda h + o(h), \\ P(N(h)=1) &= \lambda h + o(h), \\ P(N(h)=j) &= o(h), j\geq 2. \end{aligned}$$

Διαδικασία Poisson

Απόδ.: Η συνθήκη 1 είναι κοινή για τους ορισμούς 4, 5. ***Θα δείξουμε ότι η συνθήκη 2 του ορισμού 4*** $\Rightarrow$ ***συνθήκη 2 του ορισμού 5***. $N(0) \sim Pois(0) = 0$ με πιθανότητα 1. Επιπλέον,

$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{h}[P(N(h)=0) - 1 + \lambda h - o(h)] = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}[e^{-\lambda h} - 1 + \lambda h]$$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}[-\lambda h + \lambda h + o(h)] = 0,$$

χρησιμοποιώντας το ανάπτυγμα Taylor για την $e^{-\lambda h}$. Άρα $P(N(h)=0) = 1 - \lambda h + o(h)$. Ομοίως αποδεικνύουμε τις υπόλοιπες.
Θα δείξουμε ότι η συνθήκη 2 του ορισμού 5 $\Rightarrow$ ***συνθήκη 2 του ορισμού 4***.

Διαδικασία Poisson

Έστω
$$p_j(t) = P(N(t) = j), j \geq 0.$$

Τότε για $j \geq 1$

$p_j(t+h) = P(N(t+h) = j) = \sum_{m=0}^{k} P(N(t+h) = j|N(t) = m)P(N(t) = m)$
$= \sum_{m=0}^{j} P(N(t+h) - N(t) = j - m|N(t) = m)p_m(t)$
$= \sum_{m=0}^{j} P(N(t+h) - N(t) = j - m)p_m(t)$ (ανεξάρτητες προσαυξήσεις)
$= \sum_{m=0}^{j} P(N(h) - N(0) = j - m)p_m(t)$ (στάσιμες προσαυξήσεις)
$= \sum_{m=0}^{j} P(N(h) = j - m)p_m(t)$ (αφού $N(0) = 0$)
$= P(N(h) = 0)p_j(t) + P(N(h) = 1)p_{j-1}(t) + \sum_{m=2}^{j} P(N(h) = m)p_{j-m}(t)$
$= (1 - \lambda h + o(h))p_j(t) + (\lambda h + o(h))p_{j-1}(t) + \sum_{m=2}^{j} o(h)p_{j-m}(t)$
διαιρώντας με h και αναδιατάσοντας τους όρους $\Rightarrow$
$\frac{p_j(t+h)-p_j(t)}{h} = -\lambda p_j(t) + \lambda p_{j-1}(t) + \frac{o(h)}{h} \sum_{m=2}^{j} p_{j-m}(t)$

(παίρνοντας το όριο όταν $h \to 0$)

Διαδικασία Poisson

$$\begin{aligned} \frac{dp_0(t)}{dt} &= -\lambda p_0(t), \\ \frac{dp_j(t)}{dt} &= -\lambda p_j(t) + \lambda p_{j-1}(t), j > 0. \end{aligned}$$

με $p_0(0) = 1,\ p_j(0) = 0,\ j > 0.$

Α) Αναδρομική επίλυση του συστήματος δ.ε. Για $j = 0$

$$p_0(t) = p_0(0)e^{-\lambda t} = e^{-\lambda t}.$$

Αντικαθιστώ την παραπάνω στην 2η για $j = 1$ και έχουμε

$$p_1'(t) + \lambda p_1(t) = \lambda e^{-\lambda t} \Longleftrightarrow$$

$$p_1(t) = e^{-\lambda t}[p_1(0) + \int_0^t \frac{\lambda e^{-\lambda x} e^{\lambda x}}{1} dx] = \lambda t e^{-\lambda t}.$$

Χρησιμοποιώντας τις παραπάνω και αντικαθιστώντας στην 2η για $j = 2$:

$$p_2'(t) + \lambda p_2(t) = \lambda^2 t e^{-\lambda t} \Longleftrightarrow p_2(t) = \ldots = \frac{(\lambda t)^2}{2} e^{-\lambda t}.$$

Ομοίως $p_j(t) = \frac{(\lambda t)^j}{j!} e^{-\lambda t}.$

Β) Γεννήτριες συναρτήσεις
Έστω,

$$G(z,t) = \sum_{j \geq 0} p_j(t) z^j, \; |z| \leq 1 .$$

Εφαρμόζοντας στο σύστημα δ.ε.δ. θα έχουμε,

$$\begin{aligned}
\tfrac{dp_0(t)}{dt} z^0 &= -\lambda p_0(t) z^0, \\
\tfrac{dp_j(t)}{dt} z^j &= -\lambda z^j p_j(t) + \lambda z p_{j-1}(t) z^{j-1}, \; j > 0.
\end{aligned}$$

Αθροίζοντας κατά μέλη

$$\frac{\partial}{\partial t} G(z,t) + \lambda(1-z) G(z,t) = 0.$$

Άρα

$$G(z,t) = G(z,0) \exp[-\int_0^t \frac{\lambda(1-z)}{1} dx] = e^{\lambda(z-1)} t, \; (G(z,0) = 1).$$

Διαδικασία Poisson

Όμως

$$\begin{aligned} G(z,t) = & \quad e^{\lambda(z-1)}t = e^{-\lambda t} e^{z\lambda} \\ = & \quad \sum_{j \geq 0} e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^j}{j!} z^j, \end{aligned}$$

και επομένως

$$p_j(t) = e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^j}{j!}.$$

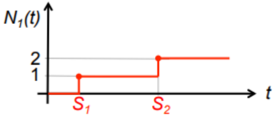
Interarrival times example

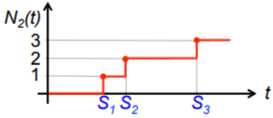
- Έστω $N_1(t)$, $N_2(t)$ διαδικασίες Poisson με ρυθμούς λ_1, λ_2 αντίστοιχα
  $\Rightarrow$ έστω ότι οι $N_1(t)$, $N_2(t)$ είναι ανεξάρτητες.
- Q: Ποιος ο αναμενόμενος χρόνος μέχρι την πρώτη άφιξη (οποιουδήποτε τύπου);
- Έστω $S_1^{(i)}$ η χρ. στιγμή της 1ης άφιξης τύπου i.
  $\Rightarrow$ Ψάχνουμε για την $E(min(S_1^{(1)}, S_1^{(2)}))$.
- Παρατήρησε ότι $S_1^{(i)} = T_1^{(i)}$ με $T_1^{(i)} \sim \exp(\lambda_i)$ και $S_1^{(1)}$, $S_1^{(2)}$ ανεξάρτητες.
- Έχοντας κατά νου ότι $min(S_1^{(1)}, S_1^{(2)}) \sim \exp(\lambda_1 + \lambda_2)$,

$$E(min(S_1^{(1)}, S_1^{(2)})) = \frac{1}{\lambda_1 + \lambda_2}.$$

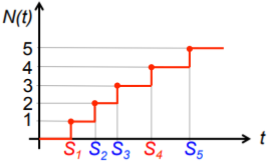
Superposition of Poisson processes

- Έστω $N_1(t)$, $N_2(t)$ διαδικασίες Poisson με ρυθμούς λ_1, λ_2 αντίστοιχα
  $\Rightarrow$ έστω ότι οι $N_1(t)$, $N_2(t)$ είναι ανεξάρτητες.





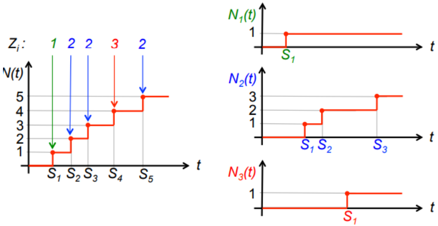
- Η $N(t) := N_1(t) + N_2(t)$ είναι διαδικασία Poisson με παράμετρο $\lambda_1 + \lambda_2$



Example 5.13, Kulkarni, p. 167.

Splitting a Poisson process

- Ξεκινώντας από μια Poisson διαδικασία μπορώ να την αποδομήσω σε 2 ή περισσότερες.
- π.χ. $N(t) =$ αρ. πελατών που φθάνουν σε ένα κατάστημα, $N_1 =$ αρ. ανδρών, $N_2 =$ αρ. γυναικών.
- Έστω $N(t)$ διαδικασία Poisson και έστω ότι κάθε γεγονός ταξινομείται ως τύπου i, $(1 \leq i \leq r)$ με πιθανότητα p_i, όπου $\{p_i; 1 \leq i \leq r\}$, $\sum_{i=1}^{r} p_i = 1$.
- $N_i(t) =$ αρ. γεγονότων τύπου i στο $(0, t]$ $\Rightarrow \{N_i(t)\}$ είναι διαδικασία Poisson με παράμετρο λp_i.



Post office

Consider a post office that is run by two clerks. Suppose that when Mr. Smith enters the system he discovers that Mr. Jones is being served by one of the clerks and Mr. Brown by the other. Suppose also that Mr. Smith is told that his service will begin as soon as either Jones or Brown leaves. If the amount of time that a clerk i spends with a customer is exponentially distributed with mean $1/\lambda_i$, what is the probability that, of the three customers, Mr. Smith is NOT the last to leave the post office?

- Δεσμεύουμε στο ποιος υπάλληλος θα τελειώσει πρώτος:

$$\begin{aligned} P(Smith\ is\ not\ last) &= \textstyle\sum_{i=1}^{2} P(Smith\ is\ not\ last|clerk\ i\ finishes\ first) \\ &\times P(clerk\ i\ finishes\ first) \\ &= \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}\right)^2 + \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2}\right)^2. \end{aligned}$$

- What is the expected time until all three customers have left the post office?

1. Expected time until 1st, 2nd, 3rd customer leaves: $\frac{1}{\lambda_1+\lambda_2}$, $\frac{2}{\lambda_1+\lambda_2}$, $\frac{2}{\lambda_1+\lambda_2} + \frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2} \times \frac{1}{\lambda_2} + \frac{\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2} \times \frac{1}{\lambda_1}$ (Ross, p.290)

Εισαγωγή

- Θα ξεκινήσουμε με ένα παράδειγμα χρησιμοποιώντας ιδιότητες της διαδικασίας Poisson.
- Θα δώσει την γενική ιδέα για το πως "λειτουργεί" μια Μαρκοβιανή διαδικασία και μετά θα αναφερθούμε στον "ακριβή" ορισμό.
- (Ross, ασκ. 48, pp. 345-346) Έστω ένα $M/M/n/n$ σύστημα, όπου πελάτες καταφθάνουν σύμφωνα με την διαδικασία Poisson παραμέτρου λ, ενώ κάθε υπάλληλος παρέχει εξυπηρέτηση, που προέρχεται από την $\exp(\mu)$. Αν μια άφιξη βρίσκει όλους τους υπάλληλος απασχολημένους. Ποιος ο αναμενόμενος αριθμός απασχολημένων υπαλλήλων;
- $T_k =$ αναμ. αριθμός απασχολημένων υπαλλήλων που βλέπει η 1η άφιξη, όταν έχουμε k απασχολημένους ($T_n =?$).
- $T_0 = 0$ (αν έχω 0 απασχολημένους, η επόμενη άφιξη θα βρει σίγουρα 0).
- $T_1 = (1)\frac{\lambda}{\lambda+\mu} + (0)\frac{\mu}{\lambda+\mu} = \frac{\lambda}{\lambda+\mu}$.

Εισαγωγή

- Γενικά, “Δεσμεύοντας” στο τι θα συμβεί πρώτα:

$$T_k = T_{k-1}\frac{k\mu}{\lambda + k\mu} + k\frac{\lambda}{\lambda + k\mu},\ k = 1, 2, \ldots$$

- **Ερμηνεία:** Όταν έχουμε k απασχολημένους, υπάρχουν $k+1$, εκθετικά κατανεμημένα “χρονόμετρα που τρέχουν” και αυτό που θα ‘ὁλοκληρωθεί” γρηγορότερα θα καθορίσει και την κατάσταση που θα μεταβεί η διαδικασία που μετρά τους απασχολημένους υπάλληλους.
    1. Υπάρχουν k exp(μ) ‘ῥολόγια” για κάθε υπολοιπόμενο χρόνο εξυπηρέτησης.
    2. Ένα exp(λ) ‘ῥολόι” για την επερχόμενη άφιξη.
    3. Χρόνος μέχρι την επόμενη εξυπηρέτηση: exp($k\mu$).
    4. Χρόνος μέχρι την επόμενη άφιξη: exp(λ).
    5. Πιθανότητα να συμβεί πρώτα άφιξη: $\frac{\lambda}{\lambda+k\mu}$.
    6. Πιθανότητα να συμβεί πρώτα εξυπηρέτηση: $\frac{k\mu}{\lambda+k\mu}$.

Παρατηρήσεις

- Όταν έχουμε $i < n$ busy servers: Υπάρχουν $i+1$ εκθετικά κατανεμημένα ¨ρολόγια¨ (i από αυτά είναι $\exp(\mu)$ και 1 $\exp(\lambda)$).
  1. Χρόνος μέχρι την επόμενη μετάβαση: $\exp(\lambda + i\mu)$.
  2. Αν $i = n \Rightarrow \exp(n\mu)$
- Όταν η διαδικασία φύγει από την $i < n$, μεταβαίνει στην $i+1$ με πιθ. $\lambda/(\lambda + i\mu)$, είτε στην $i-1$ με πιθ. $i\mu/(\lambda + i\mu)$. Όταν $i = n$, η διαδικασία μεταβαίνει στην $n-1$ με πιθ. $n\mu/n\mu = 1$.
- όταν ολοκληρωθεί η μετάβαση από την κατάσταση i, η όλη διαδικασία επαναλαμβάνεται και *νέα* εκθετικά κατανεμημένα ¨ρολόγια¨ αρχίζουν να ¨τρέχουν¨ ξανά (λόγω αμνήμονης ιδιότητας).
- **Οποτεδήποτε** εισέρχεται η διαδικασία στην κατάσταση i, η κατανομή του χρόνου παραμονής παραμονής σε αυτή καθώς και οι πιθανότητες μετάβασης παραμένουν ίδιες (χρονική ομογένεια).

Γενίκευση

- Οποτεδήποτε η διαδικασία είναι στην κατάσταση i, υπάρχουν n_i εκθετικά κατανεμημένα ¨ρολόγια¨ που ¨τρέχουν¨ και το πρώτο που θα ¨τελειώσει¨ θα καθορίσει την επόμενη κατάσταση. Έστω $q_{i,j_1}, q_{i,j_2}, \ldots, q_{i,j_{n_i}}$ οι ρυθμοί των εκθετικά κατανεμημένων ¨ρολογιών¨ με $j_1, j_2, \ldots, j_{n_i}$ οι n_i καταστάσεις στις οποίες μπορεί να μεταβεί η διαδικασία.
  $\Rightarrow$ Ο χρόνος μέχρι την επόμενη μετάβαση: $\exp(v_i)$, $v_i = \sum_{m=j_1}^{j_{n_i}} q_{i,m}$.
- Όταν η διαδικασία φύγει από την i, μεταβαίνει στην j_l με πιθ. $q_{i,j_l}/v_i$, $l = 1, 2, \ldots, n_i$.
- όταν ολοκληρωθεί η μετάβαση από την κατάσταση i, η όλη διαδικασία επαναλαμβάνεται και νέα εκθετικά κατανεμημένα ¨ρολόγια¨ αρχίζουν να ¨τρέχουν¨ ξανά (λόγω αμνήμονης ιδιότητας).

Παραδείγματα

- **Διαδικασία Poisson:** $E = \{0, 1, 2, \ldots\}$. Κάθε φορά που είμαστε στην i μπορεί μα μεταβεί μόνο στην $i+1$. Υπάρχει ένα εκθετικά κατανεμημένο ρολόι με ρυθμό $q_{i,i+1} = \lambda$. Ο χρόνος μέχρι την επόμενη μετάβαση είναι $\exp(v_i) \equiv \exp(\lambda)$. Μεταβαίνει στην $i+1$ με πιθ. $q_{i,i+1}/v_i = v_i/v_i = 1$.
- **Διαδικασία γεννήσεων Pure birth process:** Γενίκευση της διαδικασίας Poisson με $q_{i,i+1} = \lambda_i$.
- **Διαδικασία γεννήσεων-θανάτων Birth-Death process:** Επιτρεπόμενες μεταβάσεις από την i, μόνο στις $i-1$, $i+1$. Οπετεδήποτε είμαστε στην κατάσταση i, υπάρχουν 2 ανεξάρτητα εκθετικά κατανεμημένα ρολόγια: $q_{i,i+1} = \lambda_i$, $q_{i,i-1} = \mu_i$ και $v_i = \lambda_i + \mu_i$, $(i > 0)$. Όταν $i = 0$, τότε μπορούμε να μεταβούμε μόνο στην 1, $q_{0,1} = \lambda_0$.