Πανεπιστήμιο Πατρών-Τμήμα Μαθηματικών

ΟΥΡΕΣ ΑΝΑΜΟΝΗΣ

Φυλλάδιο 1: Ασκήσεις στις απλές Μαρκοβιανές ουρές

Επιμέλεια: Ι. Δημητρίου

1. Θεωρούμε την παρακάτω τροποποίηση του M/M/1 συστήματος: Οι πελάτες φθάνουν στο σύστημα σύμφωνα με την Poisson κατανομή παραμέτρου λ, οι χρόνοι εξυπηρέτησης είναι εκθετικοί παραμέτρου μ, ενώ υποθέτουμε ότι κάθε πελάτης που περιμένει στην ουρά (δηλ. δεν εξυπηρετείται) είναι ανυπόμονος και ο χρόνος υπομονής του είναι εκθετικός παραμέτρου ν. Αν παρέλθει ο χρόνος υπομονής και ο πελάτης δεν έχει μπει στον χώρο εξυπηρέτησης, αναχωρεί χωρίς να εξυπηρετηθεί. Αιτιολογείστε γιατί η στοχαστική διαδικασία που καταγράφει τον αριθμό των πελατών στο σύστημα είνα Μαρκοβιανή διαδικασία συνεχούς χρόνου και βρείτε το διάγραμμα μεταβάσεων. Αν $\mu = \nu$, βρείτε την οριακή κατανομή του αριθμού των πελατών στο σύστημα.

2. Ας θεωρήσουμε ένα σύστημα με έναν υπάλληλο στο οποίο καταφθάνουν πελάτες σύμφωνα με την κατανομή Poisson παραμέτρου λ. Οι πελάτες βλέπουν το μήκος της ουράς και αποφασίζουν αν θα εισέλθουν στο σύστημα ή θα αναχωρήσουν. Συγκεκριμένα, αν το μήκος της ουράς είνα n, οι πελάτες αναχωρούν χωρίς να εισέλθουν στο σύστημα με πιθανότητα q_n, οπου $q_0 = \frac{1}{5}$, $q_n = \frac{4}{5}$, $n > 0$. Αν οι χρόνοι εξυπηρέτησης είναι εκθετικοί παραμέτρου μ να υπολογιστούν:

   (α΄) Η κατανομή του αριθμού των πελατών στο σύστημα σε στατιστική ισορροπία.

   (β΄) Η κατανομή του χρόνου αναμονής ενός πελάτη στο σύστημα.

   (γ΄) Ο μέσος αριθμός πελατών στο σύστημα και ο συνολικός ρυθμός εισόδου στο σύστημα.

   (δ΄) Η μέση διάρκεια της περιόδου συνεχούς απασχόλησης του υπαλλήλου.

3. Θεωρείστε την τροποποιημένη M/M/1 ουρά με ομαδικές αφίξεις πελατών. Συγκεκριμένα, ομάδες πελατών φτάνουν με ρυθμό λ και περιέχουν είτε έναν πελάτη με πιθανότητα $\frac{1}{4}$, είτε δυο πελάτες με πιθανότητα $\frac{3}{4}$. Οι χρόνοι εξυπηρέτησης είναι εκθετικοί παραμέτρου μ.

   (α΄) Να αιτιολογηθεί γιατι η στοχαστική διαδικασία $\{X(t), t \geq 0\}$ που καταγράφει τον αριθμό των πελατών στο σύστημα είναι Μαρκοβιανή.

   (β΄) Να υπολογιστεί η γεννήτρια πιθανοτήτων $P(z) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n z^n$, $|z| < 1$ του αριθμού των πελατών στο σύστημα σε στατιστική ισορροπία ($p_n = \lim_{t\to\infty} P(X(t) = n)$).

   (γ΄) Για $\lambda = 2$, $\mu = 5$, να βρείτε έναν γενικό τύπο για τις οριακές πιθανότητες p_n.

4. Ας θεωρήσουμε το τμήμα δανείων μιας τράπεζας, το οποίο είναι στελεχωμένο με 2 υπαλλήλους που παρέχουν εξυπηρέτηση με εκθετική κατανομή με μέση τιμή 15 λεπτα, και διαθέτει 12 θέσεις αναμονής (συμπεριλαμβανομένων των θέσεων εξυπηρέτησης). Το τμήμα δέχεται δυο τύπους πελατών P_1, P_2, για επιχειρηματικά και καταναλωτικά δάνεια αντίστοιχα. Οι P_1 (αντιστοιχα P_2) πελάτες καταφθάνουν σύμφωνα με τη κατανομή Poisson με μέση τιμή 3 πελάτες/ώρα (αντίστοιχα 5 πελάτες/ώρα) και τοποθετούνται σε μια κοινή ουρά. Για την καλύτερη παροχή εξυπηρέτησης προς τους P_1 πελάτες, η διοίκηση της τράπεζας αποφάσισε να μην δέχεται άλλους P_2 πελάτες όταν ο αριθμός των πελατών στο σύστημα ξεπεράσει τους 6 (δηλ. από 7 και πάνω).

   (α΄) Να βρεθεί η οριακή κατανομή του αριθμού των πελατών στο σύστημα.

   (β΄) Ποιος ο συνολικός ρυθμός εισόδου στο σύστημα;

   (γ΄) Για την ακόμα καλύτερη παρεχόμενη ποιότητα εξυπηρέτησης, η τράπεζα αποφάσισε να παρέχει ακόμα έναν υπάλληλο όταν ο συνολικός αριθμός πελατών στο σύστημα γίνει τουλάχιστον 10. Μόλις, ο συνολικός αριθμός πελατών πέσει κάτω από 10 (δηλ. γίνει 9) ο επιπλέον υπάλληλος αποσύρεται. Να βρεθεί η οριακή κατανομή του αριθμού των πελατών στο σύστημα.

5. Θεωρείστε μια κεραία ασύρματου δικτύου (σταθμός βάσης), οποία μπορεί να εξυπηρετήσει ταυτόχρονα μέχρι 10 χρήστες που βρίσκονται στην περιοχή κάλυψης της (δηλ. έχει 10 κανάλια επικοινωνίας). Κάθε χρήστης που προσπαθεί να συνδεθεί όταν η κεραία είναι 'γεμάτη' χάνεται για το σύστημα. Εξαιτίας της κίνησης των χρηστών σε ένα ασύρματο δίκτυο, η κεραία δέχεται δυο τύπους χρηστών: Χρήστες που πραγματοποιούν κλήση εντός της ακτίνας κάλυψης της κεραίας (originating calls), και χρήστες που βρίσκονται σε κλήση και λόγω της κίνησης τους εισέρχονται από διπλανές κεραίες (handover calls). Ας υποθέσουμε ότι οι originating calls καταφθάνουν σύμφωνα με την κατανομή Poisson παραμέτρου $\lambda_o = 50$ κλήσεις/ώρα, ενώ οι handover calls σύμφωνα με την κατανομή Poisson παραμέτρου $\lambda_h = 125$ κλήσεις/ώρα. Κάθε κλήση καταλαμβάνει ένα κανάλι επικοινωνίας για εκθετικό χρονικό διάστημα με μέση τιμή 2 λεπτά. Επειδή οι handover χρήστες χρησιμοποιούν ήδη υποδομές του ασύρματου δικτύου (αφού ήδη είναι συνδεδεμένοι με άλλη κεραία) τους παρέχεται ένα είδος προτεραιότητας. Συγκεκριμένα, δεσμεύουμε 2 κανάλια επικοινωνίας μόνο για handover χρήστες, ενώ τα υπόλοιπα 8 μπορούν να χρησιμοποιηθούν τόσο από handover, όσο και από originating χρήστες. Να υπολογιστούν:

   (α΄) Η οριακή κατανομή του αριθμού των χρηστών στο σύστημα.

   (β΄) Η πιθανότητα blocking (P_B), δηλ. η πιθανότητα όλα τα κανάλια να είναι κατειλημμένα.

   (γ΄) Ποιος ο συνολικός ρυθμός εισόδου των χρηστών στο σύστημα;

   (δ΄) Ας υποθέσουμε ότι η εταιρία κινητής τηλεφωνίας που λειτουργεί την εν λόγω κεραία θέλει να βελτιώσει την παρεχόμενη εξυπηρέτηση. Για αυτό τον λόγο ψάχνει να βρει τον ελάχιστο αριθμό καναλιών που θα δεσμεύσει για τους handover χρήστες, ώστε η πιθανότητα blocking P_B να είναι μικρότερη του 1%. Τι θα συμβουλεύατε την εταιρία;

6. Ας θεωρήσουμε μια μονάδα παραγωγής, αποτελούμενη από δυο μηχανές. Τα προιόντα προς επεξεργασία καταφθάνουν σύμφωνα με Poisson κατανομή παραμέτρου λ και τοποθετούνται σε μια ουρά απείρου μήκους. Οι χρόνοι επεξεργασίας σε κάθε μηχανή προέρχονται από την εκθετική κατανομή με παραμέτρους μ_1, μ_2 αντίστοιχα με $\mu_1 > \mu_2$. Ένα προιόν που θα φτάσει όταν και οι δυο μηχανές είναι άεργες θα προωθηθεί στην μηχανή που λειτουργεί πιο 'γρήγορα'.

   (α΄) Να βρεθεί η οριακή κατανομή του αριθμού των πελατών στο σύστημα.

   (β΄) Να υπολογιστεί ο μέσος αριθμός πελατών στο σύστημα.

   (γ΄) Πότε είναι προτιμότερο να μην χρησιμοποιούμε την 'αργή' μηχανή;