Ασκήσεις στην Γραμμική Άλγεβρα Ι

Α. Διανυσματικοί χώροι, γραμμικές απεικονίσεις

ΘΕΜΑ 1ο:

(α) Έστω V, W πεπερασμένης διάστασης διανυσματικοί χώροι επί του F και $T : V \to W$ γραμμική απεικόνιση. Δείξτε ότι $dim(V) = dim(ImT) + dim(KerT)$.

(β) Έστω $T : R^4 \to R^3, T(x, y, z, \omega) = (x + y - 2z + 4\omega, 2x + 2y - 3z + \omega, 3x + 3y - 4z - 2\omega)$. Δείξτε ότι η T είναι γραμμική απεικόνιση και βρείτε βάσεις για τους χώρους ImT και $KerT$.

ΘΕΜΑ 2ο:

(α) Έστω V διανυσματικός χώρος επί του F και W υπόχωρος του V. Αν $\{w_1, \ldots, w_n\}$ βάση του W και $\{w_1, \ldots, w_n, v_1, \ldots, v_m\}$ βάση του V δείξτε ότι το σύνολο $\{v_1 + W, \ldots, v_m + W\}$ είναι βάση του διανυσματικού χώρου V/W.

(β) Έστω W ο υπόχωρος του R^4 που παράγεται από τα διανύσματα $v_1 = (1, -2, 0, 1), v_2 = (1, 1, 1, 1), v_3 = (3, -3, 1, 3)$. Βρείτε βάσεις για τους χώρους W και R^4/W.

ΘΕΜΑ 3ο: Δίνονται τα υποσύνολα του $M_{2,2}(F)$, όπου $F = \mathbb{R}$ η $F = \mathbb{C}$,

$$\mathcal{W}_1 = \{\begin{pmatrix} a+b & a \\ 0 & b \end{pmatrix}, \ a, b \in F\}, \mathcal{W}_2 = \{\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}, \ a, b \in F\}.$$

(α) Δείξτε ότι τα $\mathcal{W}_1, \mathcal{W}_2$ είναι υπόχωροι του $M_{2,2}(F)$.

(β) Βρείτε βάσεις για τους χώρους $\mathcal{W}_1, \mathcal{W}_2, \mathcal{W}_1 \cap \mathcal{W}_2$.

(γ) Δείξτε ότι $dim_F(\mathcal{W}_1 + \mathcal{W}_2) = 3$.

ΘΕΜΑ 4ο:

Δίνεται γραμμική απεικόνιση $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ ώστε

$$T(1, 0, 1) = (1, 0, 0), \ \ T(1, 1, 1) = (0, 1, 2), \ \ T(0, 0, 1) = (0, 1, 1).$$

(α) Δείξτε ότι η T είναι αντιστρέψιμη.

(β) Δείξτε ότι

$$T(x, y, z) = (x - y, -x + y + z, -x + 2y + z).$$

(γ) Να βρεθεί η συζυγής γραμμική απεικόνιση T^* της T.

ΘΕΜΑ 5ο:

Έστω $X = \{(1, 1, 0, 0), (0, 1, 0, 0), (3, 2, 0, 0)\}$.

(α) Βρείτε μία βάση B_0 του υπόχωρου του $\mathbb{R}^4$ που παράγεται από το σύνολο X.

(β) Βρείτε βάσεις B_1, B_2 του $\mathbb{R}^4$ ώστε $B_0 \subset B_1 \cap B_2$ και $B_1 \neq B_2$.

ΘΕΜΑ 6ο:

Δίνεται απεικόνιση $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4, \ \ T(x, y, z, w) = (x+y+z, x+z, -y, 2x+y-z+w)$.

(α) Δείξτε ότι η T είναι γραμμική και βρείτε βάσεις για τους υπόχωρους $ImT, KerT$

(β) Δώστε τους τύπους μη μηδενικών γραμμικών απεικονίσεων $S_1 : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ και $S_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4$ ώστε $S_1 T = 0$ και $TS_2 = 0$.

ΘΕΜΑ 7ο: Έστω $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y = 3z\}$.

(α) Δείξτε ότι ο W είναι διανυσματικός χώρος και βρείτε μία βάση του.

(β) Βρείτε υπόχωρους V_1, V_2 του $\mathbb{R}^3$ ώστε $\mathbb{R}^3 = W \oplus V_1 = W \oplus V_2$ και $V_1 \cap V_2 = \{0\}$.

ΘΕΜΑ 8ο: Δίνεται το υποσύνολο του $\mathbb{R}^3, \ \ W = \{(x, y, z) : x - y = 2z\}$.

(α) Δείξτε ότι το W είναι υπόχωρος του $\mathbb{R}^3$ και βρείτε μία βάση του B.

(β) Επεκτείνετε την B σε βάση του $\mathbb{R}^3$
(γ) Ορίστε γραμμική απεικόνιση $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ ώστε $KerT = W$.

ΘΕΜΑ 9ο: Έστω W το σύνολο των συμμετρικών 2×2 πινάκων με στοιχεία από το $\mathbb{R}$ δηλ. $W = \{A \in M_{2,2}(\mathbb{R}) : A = A^t\}$ και V το σύνολο των αντισυμμετρικών 2×2 πινάκων δηλ. $V = \{A \in M_{2,2}(\mathbb{R}) : A = -A^t\}$.
(α) Δείξτε ότι οι V, W είναι υπόχωροι του $M_{2,2}(\mathbb{R})$.
(β) Βρείτε βάσεις των V, W.

ΘΕΜΑ 10ο:
Δίνεται ο υπόχωρος του $\mathbb{R}^3$,

$$W = \{(x, y, z) : x + y = z, \quad 2x - z = y\}.$$

(α) Βρείτε βάση B του W.
(β) Επεκτείνετε την B σε βάση του $\mathbb{R}^3$.
(γ) Βρείτε βάση του χώρου πηλίκο $\mathbb{R}^3/W$.

ΘΕΜΑ 11ο:
Δίνεται το σύνολο $X = \{(1, 2, 0), (1, 0, 1), (-1, 4, -3)\} \subseteq \mathbb{R}^3$ και V ο διανυσματικός χώρος που παράγεται από αυτόν: $V = [X]$.
(α) Βρείτε μία βάση B του V ώστε $B \subseteq X$.
(β) Επεκτείνετε την βάση αυτή σε βάση του $\mathbb{R}^3$.

ΘΕΜΑ 12ο:
Δίνεται η γραμμική απεικόνιση $T : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$, $T(x, y, z) = (x - iy, x - y + iz, x)$. Δείξτε ότι η T είναι ισομορφισμός και βρείτε τύπο για την απεικόνιση $S = T^{-1}$ (Μον. 2)

Β. Γραμμικές απεικονίσεις και πίνακες

ΘΕΜΑ 1ο:
Έστω $\overline{e}$ η κανονική βάση του $V = R^3$ και $u_1 = (1, 0, 1), u_2 = (0, 1, 0), u_3 = (x, y, z)$ ώστε η τριάδα $\overline{u} = (u_1, u_2, u_3)$ να είναι βάση του R^3.
(α) Αν $v = (-1, 2, 1) \in V$ ώστε $[v]_{\overline{u}} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Να δειχθεί ότι $u_3 = (-2, 3, 0)$. Να βρεθεί ο πίνακας αλλαγής βάσης $(1_V : \overline{e}, \overline{u})$.
(β) Έστω $T : V \to V$ γραμμική απεικόνιση και u_3 όπως στο (α). Αν $(T : \overline{u}, \overline{e}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, να βρεθεί το $T(x_1, x_2, x_3)$ για $(x_1, x_2, x_3) \in V$.

ΘΕΜΑ 2ο: Έστω $\overline{e}$ η κανονική βάση του $V = R^3$, $u_1 = (1, 1, 0), u_2 = (0, 1, 1), u_3 = (0, 0, 1)$ και $T : V \to V$ γραμμική απεικόνιση.
(α) Δείξτε ότι η τριάδα $\overline{u} = (u_1, u_2, u_3)$ είναι βάση του V. Να βρεθεί ο πίνακας αλλαγής βάσης $(1_V : \overline{e}, \overline{u})$.
(β) Αν $(T : \overline{u}, \overline{e}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, να δειχθεί ότι

$$T(x, y, z) = (3x - 2y + 2z, 2x - 2y + z, -y + z), \quad \forall \quad (x, y, z) \quad \in V.$$

(γ) Να βρεθεί η συζυγής γραμμική απεικόνιση T^* της T.

ΘΕΜΑ 3ο:

Δίνεται γραμμική απεικόνιση $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ ώστε $T \circ T = T, dim_{\mathbb{R}}(ImT) = 3$.

(α) Δείξτε ότι ο χώρος $\mathbb{R}^4$ είναι ευθύ άθροισμα των χώρων ImT και $KerT$.

(β) Δείξτε ότι υπάρχει διατεταγμένη βάση $\bar{u}$ του $\mathbb{R}^4$ ώστε

$$(T : \bar{u}, \bar{u}) = \begin{pmatrix} I_3 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(γ) Αν $A, 4 \times 4$ πραγματικός πίνακας τάξης 3 ώστε $A^2 = A$ δείξτε ότι υπάρχει αντιστρέψιμος πίνακας P ώστε

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} I_3 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

ΘΕΜΑ 4ο:

Έστω $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$.

Να βρεθούν αντιστρέψιμοι πίνακες P και Q ώστε

$$PAQ = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

ΘΕΜΑ 5ο: Έστω η γραμμική απεικόνιση $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ και

$$u_1 = (1, 1, 0),\ u_2 = (0, 1, 1),\ u_3 = (0, 0, 1), u = (u_1, u_2, u_3)$$

ώστε $T(1, 1, 1) = u_1,\ \ T(0, 1, 1) = u_2,\ \ T(0, 0, 1) = u_3$.

(α) Δείξτε ότι η T είναι αντιστρέψιμη.

(β) Βρείτε τους πίνακες $(T^{-1} : u, e)$, $(1_{\mathbb{R}^3} : e, u)$ όπου $e = (e_1, e_2, e_3)$ η κανονική βάση του $\mathbb{R}^3$.

(γ) Βρείτε τον τύπο της απεικόνισης T^{-1}.

ΘΕΜΑ 6ο: Έστω $v = (v_1, v_2, v_3), u = (u_1, u_2, u_3)$ οι βάσεις του $\mathbb{R}^3$ όπου

$$v_1 = (1, 0, 0), v_2 = (1, 0, 1), v_3 = (0, 1, 1), u_1 = (0, 1, 0), u_2 = (1, 1, 1), u_3 = (0, 0, 1)$$

και $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ γραμμική απεικόνιση ώστε

$$(T : u, v) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(α) Δείξτε ότι η T είναι αντιστρέψιμη απεικόνιση.

(β) Αν $e = (e_1, e_2, e_3)$ είναι η κανονική βάση του $\mathbb{R}^3$, βρείτε τους πίνακες $(1_{\mathbb{R}^3} : e, u)$, $(1_{\mathbb{R}^3} : v, e)$

(γ) Βρείτε τον τύπο της T.

ΘΕΜΑ 7ο:

Έστω η γραμμική απεικόνιση $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ ώστε $T(x, y) = (-x + y, x - y)$.

(α) Βρείτε βάσεις των χώρων ImT και $KerT$.

(β) Να επεκταθεί η βάση του $KerT$ σε βάση του $\mathbb{R}^2$.

(γ) Να βρεθούν βάσεις $\hat{u}, \hat{v}$ του $\mathbb{R}^2$ ώστε

$$(T : \hat{u}, \hat{v}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

ΘΕΜΑ 8ο:

Δίνεται η γραμμική απεικόνιση $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ με τύπο $T(x, y, z) = (x+y+z, x+y-z)$.

(α) Βρείτε βάση του $KerT$ και επεκτείνετε την σε βάση του $\mathbb{R}^3$.

(β) Βρείτε διατεταγμένες βάσεις $\overline{u}$ του $\mathbb{R}^3$ και $\overline{v}$ του $\mathbb{R}^2$ ώστε

$$(T : \overline{u}, \overline{v}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Γ. Ιδιοτιμές, ιδιοδιανύσματα,ιδιόχωροι, διαγωνιοποίηση

ΘΕΜΑ 1ο:

Έστω $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -1 \\ 2 & 5 & -2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

(α) Βρείτε τους ιδιόχωρους του πίνακα A.

(β) Βρείτε αντιστρέψιμο πίνακα P ώστε ο πίνακας $P^{-1}AP$ να είναι διαγώνιος.

ΘΕΜΑ 2ο:

Έστω η γραμμική απεικόνιση $T : R^3 \to R^3$ με χαρακτηριστικό πολυώνυμο $p(t) = -t(t-1)^2$.

(α) Δείξτε ότι η T δεν είναι αντιστρέψιμη και ότι $dim(ImT) = 2$

(β) Αν η T είναι διαγωνίσιμη δείξτε ότι $T^n = T, \ \forall \ n \geq 2$.

(γ) Έστω 1_{R^3} η ταυτοτική απεικόνιση στον R^3. Δείξτε ότι η απεικόνιση $S = T + 1_{R^3}$ είναι αντιστρέψιμη. Βρείτε 2 ιδιοτιμές της S.

ΘΕΜΑ 3ο:

(α) Έστω A, B όμοιοι πίνακες με στοιχεία από το R. Δείξτε ότι οι A, B έχουν ίδια χαρακτηριστικά πολυώνυμα.

(β) Έστω $A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 2 \\ 6 & -3 & 4 \\ 3 & -2 & 3 \end{pmatrix}$. Να βρεθεί το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του A και να εξεταστεί αν ο A είναι διαγωνίσιμος.

ΘΕΜΑ 4ο: Έστω η γραμμική απεικόνιση $T : R^3 \to R^3$ και u_1, u_2, u_3 μη μηδενικά διανύσματα του R^3 ώστε $T(u_1) = 0, T(u_2) = u_2, T(u_3) = -u_3$.

(α) Αιτιολογείστε γιατί τα u_1, u_2, u_3 είναι γραμμικά ανεξάρτητα.

(β) Έστω $\overline{e}$ η κανονική βάση του R^3 και $A = (T : \overline{e}, \overline{e})$. Δείξτε ότι $A^{501} + A^{101} - 2A = 0$.

(γ) Είναι ο A ισοδύναμος με τον πίνακα $B = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 3 & -6 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$;

ΘΕΜΑ 5ο: Έστω $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 6 \\ -3 & -5 & -6 \\ 3 & 3 & 4 \end{pmatrix}$.

(α) Βρείτε τους ιδιόχωρους του πίνακα A.

(β) Βρείτε αντιστρέψιμο πίνακα P ώστε ο πίνακας $P^{-1}AP$ να είναι διαγώνιος.

ΘΕΜΑ 6ο:

Δίνεται ο πίνακας $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$

(α) Να βρεθούν οι ιδιόχωροι του A

(β) Να δειχθεί ότι $A^5 = A$.

ΘΕΜΑ 7ο:Δίνεται η γραμμική απεικόνιση

$$T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \;\; T(x, y, z) = (2x - 2y + 2z, -2y + 4z, -2y + 4z).$$

(α) Βρείτε βάσεις για τους χώρους ImT και $KerT$

(β) Βρείτε το ελάχιστο πολυώνυμο της T. Είναι η T διαγωνίσιμη;

ΘΕΜΑ 8ο: Θεωρούμε τον πίνακα $A = \begin{pmatrix} 2 & -7 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$.

(α) Να υπολογιστεί ο πίνακας $A^{999} - A^9 + A^2$.

(β) Να βρεθεί βάση του $\mathbb{C}^2$ που να αποτελείται από ιδιοδιανύσματα του A.

ΘΕΜΑ 9ο:

(α) Έστω ο πίνακας $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -1 & 4 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. Βρείτε το ελάχιστο πολυώνυμο του πίνακα A. Είναι ο A διαγωνίσιμος; Είναι ο A αντιστρέψιμος;

(β) Έστω $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ γραμμική απεικόνιση, $e = (e_1, e_2, e_3)$ η κανονική βάση του $\mathbb{R}^3$, και υποθέτουμε ότι $(T : e, e) = A$, όπου A ο πίνακας στο ερώτημα (α). Βρείτε βάση u του $\mathbb{R}^3$ ώστε $(T : e, u) = I_3$ όπου I_3 ο ταυτοτικός πίνακας.

(γ) Δείξτε ότι οι ιδιοτιμές κάθε ερμιτιανού πίνακα είναι πραγματικοί αριθμοί.

ΘΕΜΑ 10ο: Έστω ο πίνακας $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 0 & -2 & 4 \\ 0 & -2 & 4 \end{pmatrix}$.

(α) Βρείτε το χαρακτηριστικό και το ελάχιστο πολυώνυμο του A.

(β) Είναι ο A διαγωνίσιμος;

ΘΕΜΑ 11ο:

Δίνεται ο πίνακας

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(α) Να βρεθεί αντιστρέψιμος πίνακας P ώστε ο πίνακας $P^{-1}AP$ να είναι διαγώνιος.

(β) Να βρεθεί ο πίνακας A^{2014}.

ΘΕΜΑ 12ο:

Έστω $A = \begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

(α) Βρείτε τις ιδιοτιμές και τους ιδιόχωρους του A.

(β) Βρείτε τις τιμές του a για τις οποίες ο A διαγωνιοποιείται.

Δ. Εσωτερικό γινόμενο

ΘΕΜΑ 1ο:

(α) Έστω V διανυσματικός χώρος με εσωτερικό γινόμενο και u_1, u_2, u_3 ορθοκανονικά διανύσματα του V. Δείξτε ότι τα u_1, u_2, u_3 είναι γραμμικά ανεξάρτητα.

(β) Έστω W ο υπόχωρος του R^4 που παράγεται από τα διανύσματα $u_1 = (1,1,0,0), u_2 = (0,0,1,0), u_3 = (0,0,1,1), u_4 = (1,1,2,1)$ και $x = (1,2,3,4)$. Να βρεθεί $w_0 \in W$ ώστε $\|x - w_0\| = \min\{\|x - w\| : w \in W\}$.

ΘΕΜΑ 2ο:

Έστω $S : C^3 \to C$ ώστε $S(x,y,z) = ix + y - iz$ Δείξτε ότι η S είναι γραμμική απεικόνιση και να βρεθεί $u \in C^3$ ώστε $S(w) =< w, u > \quad \forall w \in C^3$. ($< \cdot, \cdot >$ είναι το κανονικό εσωτερικό γινόμενο στον C^3.)

ΘΕΜΑ 3ο:

(α) Έστω $T : C^3 \to C^3$ με $T(1,0,0) = (0,0,0), T(1,1,1) = (2,2,2)$. Δείξτε ότι η T δεν είναι κανονική γραμμική απεικόνιση.

(β) Έστω $\{e_1, e_2, e_3\}$ η κανονική βάση του C^3. Να βρεθεί ισομετρία $T : C^3 \to C^3$ ώστε $T(e_1) = (\eta\mu\theta, \sigma\upsilon\nu\theta, 0), T(e_2 + e_3) = \sqrt{2}(-\sigma\upsilon\nu\theta, \eta\mu\theta, 0)$.

ΘΕΜΑ 4ο: Έστω W ο υπόχωρος του R^4 που παράγεται από τα διανύσματα $v_1 = (1,1,1,1), v_2 = (0,1,1,1), v_3 = (0,0,1,1)$.

(α) Βρείτε ορθοκανονικές βάσεις για τους χώρους W και $W^\perp$

(β) Έστω $x = (2,3,1,2)$. Να αναλυθεί το διάνυσμα x σε δύο συνιστώσες x_1, x_2 ώστε $x_1 \in W, x_2 \in W^\perp$.

ΘΕΜΑ 5ο:

(α) Έστω $U = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \star & \star & \star \\ \frac{-1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$. Να συμπληρώσετε την 2η γραμμή ώστε ο πίνακας U να είναι μοναδιαίος.

(β) Έστω $\overline{e}$ η κανονική βάση του $C^3, T : C^3 \to C^3$ γραμμική απεικόνιση και U ένας οποισδήποτε μοναδιαίος πίνακας με την μορφή που δίνεται στο ερώτημα (α) ώστε $(T : \overline{e}, \overline{e}) = U$. Να αιτιολογήσετε ότι η T είναι αντιστρέψιμη απεικόνιση και να υπολογίστε το διάνυσμα $T^{-1}(-1,0,3)$.

ΘΕΜΑ 6ο:

(α) Έστω ο διανυσματικός χώρος $\mathbb{R}^n$ με το κανονικό εσωτερικό γινόμενο $< \cdot, \cdot >$ και $x, y \in \mathbb{R}^n$. Δείξτε ότι $| < x, y > | \leq \|x\|\|y\|$ όπου $\|x\|, \|y\|$ τα μήκη των x, y.

(β) Έστω $\mathcal{W}$ ο υπόχωρος του R^4 που παράγεται από τα διανύσματα $v_1 = (1,1,0,1), v_2 = (1,0,1,0)$. Βρείτε ορθοκανονικές βάσεις για τους χώρους $\mathcal{W}$ και $\mathcal{W}^\perp$.

ΘΕΜΑ 7ο: Έστω $\mathbb{C}$ το σύνολο των μιγαδικών αριθμών.

(α) Δίνεται γραμμική απεικόνιση $T : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$ ώστε

$$T(1,0,0) = (0,0,0), \quad T(0,1,1) = (0,2,2), \quad T(0,1,-1) = (0,3,-3).$$

Δείξτε ότι η T είναι κανονική γραμμική απεικόνιση.

(β) Έστω $\{e_1, e_2, e_3\}$ η κανονική βάση του C^3. Να βρεθεί ισομετρία $T : C^3 \to C^3$ ώστε $T(\eta\mu\theta, \sigma\upsilon\nu\theta, 0) = e_1, T(-\sigma\upsilon\nu\theta, \eta\mu\theta, 0) = \frac{1}{\sqrt{2}}e_2 + \frac{1}{\sqrt{2}}e_3$.

ΘΕΜΑ 8ο:

(α) Έστω $W = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : x = y + z + w\}$. Δείξτε ότι ο W είναι διανυσματικός χώρος και βρείτε μία ορθοκανονική βάση του ως προς το κανονικό εσωτερικό γινόμενο του $\mathbb{R}^4$.

(β) Να Βρεθεί ο τύπος μίας ισομετρίας $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ που να ικανοποιεί τις σχέσεις

$$T(1, 0, 0) = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0), \quad T(0, 1, 0) = (0, 0, 1).$$

ΘΕΜΑ 9ο: (α) Δίνεται ισομετρία $T : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$. Δείξτε ότι

$$< T(x), T(y) > = < x, y > \quad \forall\, x, y \in \mathbb{C}^n,$$

όπου $< \cdot, \cdot >$ είναι το κανονικό εσωτερικό γινόμενο του $\mathbb{C}^n$.(Μον. 1)

(β) Έστω $w_1 = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0), \quad w_2 = (-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0), \quad w_3 = (0, 0, 1)$. Να γραφεί το διάνυσμα $w = (a, b, c)$ ως γραμμικός συνδυασμός των w_1, w_2, w_3. (Μον. 1)

ΘΕΜΑ 10ο: Έστω $u = (1, 1, 1)$.

(α) Βρείτε μία ορθοκανονική βάση του χώρου $W = [u]^\perp$.

(β) Να βρεθεί $w_0 \in W$ ώστε

$$\|v - w_0\| = \min\{\|v - w\| : \ w \in W\}$$

όπου $v = (1, 2, 1)$.

ΘΕΜΑ 11ο: (α) Έστω $\hat{u} = (u_1, u_2, u_3), \hat{w} = (w_1, w_2, w_3)$ ορθοκανονικές βάσεις του $\mathbb{R}^3$ και $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ γραμμική απεικόνιση ώστε $T(u_i) = w_i, i = 1, 2, 3$. Δείξτε ότι η T είναι ισομετρία.

(β) Δίνονται τα διανύσματα του $\mathbb{R}^3$

$$u_1 = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0), \quad u_2 = (\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0), u_3 = (0, 0, 1),$$

$$v_1 = (\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}), \quad v_2 = (-\frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}), v_3 = (0, 1, 0),$$

και $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ γραμμική απεικόνιση ώστε $T(u_i) = v_i, i = 1, 2, 3$. Δείξτε ότι η T είναι ισομορφισμός. Είναι η T ισομετρία;

ΘΕΜΑ 12ο:

Δίνονται τα διανύσματα

$$u_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, i, 1, 0), \ u_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, -i, 0, 0), \ u_3 = \sqrt{\frac{6}{25}}(-\frac{5}{6}, -\frac{5}{6}i, \frac{5}{3}, 0) \in \mathbb{C}^4.$$

(α) Δείξτε ότι τα u_1, u_2, u_3 είναι ορθοκανονικά ως προς το κανονικό εσωτερικό γινόμενο του $\mathbb{C}^4$ και επεκτείνετέ τα σε ορθοκανονική βάση του $\mathbb{C}^4$.

(β) Γράψτε το $v = (1, 1, 1, 0)$ ως γραμμικό συνδυασμό των u_1, u_2, u_3.