Τίτλος Μαθήματος: Γραμμική Άλγεβρα ΙΙ

Ενότητα: Χώροι με εσωτερικό γινόμενο

Όνομα Καθηγητή: Ανδρέας Αρβανιτογεώργος

Τμήμα: Μαθηματικών

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Πατρών**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο

ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ

ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Κεφάλαιο 4

Χώροι με εσωτερικό γινόμενο

Το κεφάλαιο αυτό αποτελεί την αρχή της μελέτης της ονομαζόμενης «γεωμετρίας» των γραμμικών τελεστών. Σκοπός είναι να ορίσουμε έννοια εσωτερικού γινομένου σε έναν διανυσματικό χώρο ώστε να είναι δυνατόν να οριστούν μήκος, γωνία και άλλες γεωμετρικές έννοιες μεταξύ διανυσμάτων.
Τα βασικά αποτελέσματα αφορούν τους διανυσματικούς χώρους πεπερασμένης διάστασης, αλλά κάποιοι ορισμοί ισχύουν και για οποιονδήποτε διανυσματικό χώρο.

4.1 Ορθογωνιότητα

Ορισμός 4.1. *Έστω V ένας διανυσματικός χώρος επί του σώματος $\mathbb{F}$. Ένα εσωτερικό γινόμενο (inner product ή scalar product) επί του V είναι μια συνάρτηση*

$$\begin{aligned} \langle\ ,\ \rangle : \quad & V \times V \to \mathbb{F} \\ & (x,y) \mapsto \langle x,y\rangle \end{aligned}$$

με τις εξής ιδιότητες:

1) $\langle x+z,y\rangle = \langle x,y\rangle + \langle z,y\rangle$, $x,y,z \in V$.

2) $\langle cx,y\rangle = c\langle x,y\rangle$, $x,y \in V, c \in \mathbb{F}$.

3) $\overline{\langle x,y\rangle} = \langle y,x\rangle$, $x,y \in V$.

4) $\langle x,x\rangle > 0$ *για κάθε* $x \neq 0$.

Το ζεύγος $(V,\langle\ ,\ \rangle)$ ονομάζεται διανυσματικός χώρος με εσωτερικό γινόμενο. Αν

$\mathbb{F} = \mathbb{R}$ ονομάζεται πραγματικός και αν $\mathbb{F} = \mathbb{C}$ ονομάζεται μιγαδικός χώρος με εσωτερικό γινόμενο.

Ισχύουν οι εξής ιδιότητες

Πρόταση 4.1. *Έστω $(V, \langle \ , \ \rangle)$ ένας χώρος με εσωτερικό γινόμενο. Τότε για κάθε $x, y, z \in V$ και $c \in \mathbb{F}$ ισχύουν τα εξής:*

1) $\langle x, y + z\rangle = \langle x, y\rangle + \langle x, z\rangle$.

2) $\langle x, cy\rangle = \overline{c}\langle x, y\rangle$.

3) $\langle x, 0\rangle = c\langle 0, x\rangle = 0$.

4) $\langle x, x\rangle = 0$ *εάν και μόνο εάν* $x = 0$.

5) Αν $\langle x, y\rangle = \langle x, z\rangle$ *για κάθε* $x \in V$ *τότε* $y = z$.

Άσκηση 4.1. *Έστω $x = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$, $y = (b_1, b_2, \ldots, b_n) \in \mathbb{F}^n$. Το <u>κανονικό εσωτερικό γινόμενο</u> ορίζεται ως*

$$\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^{n} a_i \overline{b_i}.$$

Παράδειγμα 4.1. *Έστω $V = C([0,1])$ ο διανυσματικός χώρος των συνεχών πραγματικών συναρτήσεων επί του $[0,1]$.*
Αποδείξτε προσεκτικά ότι το

$$\langle f, g\rangle = \int_0^1 f(t)g(t)dt$$

ορίζει ένα εσωτερικό γινόμενο στον V.

Ορισμός 4.2. *Έστω $\mathrm{A} \in M_{n\times n}(\mathbb{F})$. Ο <u>συζυγοανάστροφος</u> ή <u>συζυγής</u> (transpose) του A είναι ο πίνακας A^* με στοιχεία*

$$(\mathrm{A})_{ij} = \overline{\mathrm{A}_{ji}}.$$

Για παράδειγμα, αν $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} i & 1+7i \\ 2 & 5-3i \end{pmatrix}$ τότε $\mathrm{A}^* = \begin{pmatrix} -i & 2 \\ 1-7i & 5+3i \end{pmatrix}$.

Παράδειγμα 4.2. *Έστω $V = M_{n\times n}(\mathbb{F})$. Τότε το*

$$\langle \mathrm{A}, \mathrm{B}\rangle = \mathrm{tr}(\mathrm{B}^*\,\mathrm{A}), \quad \mathrm{A}, \mathrm{B} \in V$$

είναι ένα εσωτερικό γινόμενο στον V.

Χρησιμοποιώντας το εσωτερικό γινόμενο μπορούμε να ορίσουμε την έννοια του μήκους ενός διανύσματος.

Ορισμός 4.3. *Έστω $(V, \langle\ ,\ \rangle)$ χώρος με εσωτερικό γινόμενο. Για κάθε $x \in V$ το μήκος ή νόρμα (norm) ενός διανύσματος είναι ο αριθμός*

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}.$$

Ισχύουν οι εξής ιδιότητες

Πρόταση 4.2. *Έστω $(V, \langle\ ,\ \rangle)$ χώρος με εσωτερικό γινόμενο επί του $\mathbb{F}$. Τότε για κάθε $x, y \in V$, $c \in \mathbb{F}$ ισχύουν τα εξής:*

1) $\|cx\| = |c|\,\|x\|$.

2) $\|x\| = 0$ εάν και μόνο εάν $x = 0$. Επίσης $\|x\| \geq 0$.

3) $|\langle x, y\rangle| \leq \|x\|\,\|y\|$ (ανισότητα Cauchy-Schwartz).

4) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (Τριγωνική ανισότητα).

Παραπέμπουμε τον αναγνώστη στη βιβλιογραφία για την αναζήτηση των αποδείξεων των παραπάνω ιδιοτήτων.

Παρατήρηση 4.1. *Γενικά μπορούμε να ορίσουμε ως νόρμα σε έναν διανυσματικό χώρο V μια συνάρτηση της μορφής $\|\ .\ \| : V \to \mathbb{F}$ η οποία να ικανοποιεί τις ιδιότητες 1),2) και 4).*

Παράδειγμα 4.3. *Έστω $V = \mathbb{F}^n$, $x = (a_1, \cdots, a_n) \in V$. Τότε το*

$$\|x\| = \left(\sum_{i=1}^{n} |a_i|^2\right)^2$$

ορίζει μια νόρμα στον V (Ευκλείδια νόρμα).

Χρησιμοποιώντας την έννοια του εσωτερικού γινομένου μπορούμε να ορίσουμε ορθογωνιότητα σε έναν διανυσματικό χώρο.
Θυμίζουμε ότι αν x, y είναι δύο διανύσματα του $\mathbb{R}^3$ ή του $\mathbb{R}^2$ τότε ισχύει $\langle x, y\rangle = \|x\|\,\|y\|\cos(\theta)$, όπου $0 \leq \theta \leq \pi$ είναι η γωνία μεταξύ των x και y.
Η ανισότητα Cauchy-Schwartz προκύπτει άμεσα από την ισότητα αυτή καθώς $|\cos(\theta)| \leq 1$.
Επίσης, τα x και y είναι κάθετα εάν και μόνο εάν $\cos(\theta) = 0$ ή $\langle x, y\rangle = 0$.
Οδηγούμαστε λοιπόν στους παρακάτω ορισμούς.

Ορισμός 4.4. *Έστω $(V, \langle \ , \ \rangle)$ ένας διανυσματικός χώρος με εσωτερικό γινόμενο.*

1) Τα διανύσματα $x, y \in V$ ονομάζονται κάθετα αν $\langle x, y \rangle = 0$.
2) Ένα υποσύνολο $S \subset V$ ονομάζεται ορθογώνιο (orthogonal) εάν οποιαδήποτε δύο διαφορετικά διανύσματα του S είναι κάθετα.
3) Ένα διάνυσμα $x \in V$ ονομάζεται μοναδιαίο εάν $\|x\| = 1$.
4) Ένα υποσύνολο $S \subset V$ ονομάζεται ορθοκανονικό (orthonormal) εάν το S είναι ορθογώνιο και όλα τα διανύσματά του είναι μοναδιαία.

Παρατήρηση 4.2. *Ένα σύνολο $S = \{v_1, v_2, \ldots\}$ είναι ορθοκανονικό εάν και μόνο εάν $\langle v_i, v_j \rangle = \delta_{ij}$.*

Παρατήρηση 4.3. *Αν $x \in V$ με $x \neq 0$, τότε το διάνυσμα $\frac{1}{\|x\|}x$ είναι μοναδιαίο.*

Παράδειγμα 4.4. *Το σύνολο $\{(1,1,0), (1,-1,1), (-1,1,2)\}$ είναι ένα ορθογώνιο υποσύνολο του $\mathbb{F}^3$. Με κανονικοποίηση των διανυσμάτων προκύπτει το ορθοκανονικό υποσύνολο $\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0), \frac{1}{\sqrt{3}}(1,-1,1), \frac{1}{\sqrt{6}}(-1,1,2)\right\}$.*

Παράδειγμα 4.5. *Έστω $H = \{f : [0,1] \to \mathbb{C} | f \text{ συνεχής}\}$.*
Ορίζουμε το εξής εσωτερικό γινόμενο στον διανυσματικό χώρο H:

$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} f(t)\overline{g(t)}dt.$$

Ο χώρος με εσωτερικό γινόμενο $(H, \langle \ , \ \rangle)$ έχει ιδαίτερη σημασία στις σειρές Fourier και σε άλλες εφαρμογές. Ένα σημαντικό ορθοκανονικό υποσύνολο S του H είναι το εξής:
Για κάθε ακέραιο n ορίζουμε $f_n(t) = e^{int}$ $(0 \leq t \leq 2\pi, \ i = \sqrt{-1})$ και έστω $S = \{f_n : n \in \mathbb{Z}\}$.
Δείξτε ότι για $m \neq n$ ισχύει $\langle f_m, f_n \rangle = 0$ και $\langle f_n, f_n \rangle = 1$, συνεπώς $\langle f_m, f_n \rangle = \delta_{mn}$ άρα το S είναι ορθοκανονικό.

4.2 Η διαδικασία ορθογωνιοποίησης Gram-Schmidt

Ως γνωστόν οι βάσεις είναι οι θεμέλιοι λίθοι των διανυσματικών χώρων. Αντίστοιχα, για διανυσματικούς χώρους με εσωτερικό γινόμενο οι ορθοκανονικές βάσεις αποτελούν τους θεμέλιους λίθους αυτών.

Ορισμός 4.5. *Έστω V χώρος με εσωτερικό γινόμενο. Ένα υποσύνολο B του V ονομάζεται ορθοκανονική βάση του V εάν το B είναι μια διατεταγμένη βάση και επιπλέον είναι ορθοκανονικό υποσύνολο του V.*

Η σημασία των ορθοκανονικών συνόλων (άρα και των ορθοκανονικών βάσεων) φαίνεται στο εξης:

Θεώρημα 4.1. *Έστω V χώρος με εσωτερικό γινόμενο και $S = \{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$ ένα ορθογώνιο υποσύνολο του V με όλα τα διανύσματα μη μηδενικά.*
Αν $y \in \operatorname{span}(S)$ τότε

$$y = \sum_{i=1}^{n} \frac{\langle y, v_i \rangle}{\|v_i\|^2} v_i.$$

Απόδειξη. Έστω $y = \sum_{i=1}^{k} a_i v_i$, $a_i \in \mathbb{F}$. Τότε για κάθε $1 \leq j \leq k$ έχουμε ότι

$$\begin{aligned} \langle y, v_i \rangle = \langle \textstyle\sum_{i=1}^{k} a_i v_i, v_j \rangle &= \textstyle\sum_i a_i \langle v_i, v_j \rangle = a_j \langle v_j, v_j \rangle \\ &= a_j \|v_j\|^2 , \end{aligned}$$

άρα

$$a_j = \frac{1}{\|v_j\|^2} \langle y, v_j \rangle, \qquad (j = 1, \ldots, k).$$

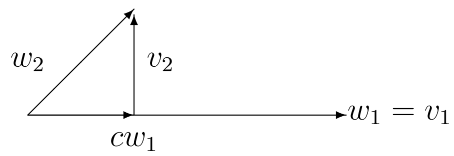
□

Πόρισμα 4.1. *Έστω ότι ισχύουν οι υποθέσεις του Θεωρήματος 1.1 και επιπλέον ότι το S είναι ορθοκανονικό σύνολο. Τότε*

$$y = \sum_{i=1}^{n} \langle y, v_i \rangle v_i.$$

Πόρισμα 4.2. *Έστω V χώρος με εσωτερικό γινόμενο και έστω S (ενδεχομένως άπειρο) ορθογώνιο υποσύνολο του V αποτελούμενο από μη μηδενικά διανύσματα. Τότε το S είναι γραμμικώς ανεξάρτητο.*

Το ερώτημα που τίθεται είναι αν κάθε διανυσματκός χώρος πεπερασμένης διάστασης περιέχει μια ορθοκανονική βάση. Η απάντηση είναι ότι από δοθέν γραμμικώς ανεξάρτητο σύνολο διανυσμάτων μπορούμε να κατασκευάσουμε ένα ορθογώνιο υποσύνολο τέτοιο ώστε και τα δύο σύνολα να παράγουν τον ίδιο υπόχωρο. Στη συνέχεια, είναι απλό να κατασκευαστεί μια ορθοκανονική βάση. Ας δούμε πρώτα μια απλή περίπτωση.
Έστω $\{w_1, w_2\}$ ένα γραμμικώς ανεξάρτητο υποσύνολο ενός διανυσματικού χώρου με εσωτερικό γινόμενο (και άρα βάση ενός υποχώρου διάστασης 2). Θα κατασκευάσουμε ενα ορθογώνιο σύνολο $\{v_1, v_2\}$ που να παράγει τον ίδιο υπόχωρο. Παίρνω $v_1 = w_1$ και $v_2 = w_2 - cw_1$ όπου το $c \in \mathbb{F}$ επιλέγεται έτσι ώστε το v_2 να είναι κάθετο στο w_1 (βλ. και σχήμα).



Πράγματι, λύνοντας την εξίσωση

$$0 = \langle v_2, w_1 \rangle = \langle w_2 - cw_1, w_1 \rangle = \langle w_2, w_1 \rangle - c \langle w_1, w_1 \rangle$$

προκύπτει ότι $c = \frac{\langle w_2, w_1 \rangle}{\langle w_1, w_1 \rangle}$, συνεπώς

$$v_2 = w_2 - \frac{\langle w_2, w_1 \rangle}{\|w_1\|^2} w_1.$$

Είναι λοιπόν δυνατόν να αποδειχθεί με επαγωγή το εξής:

Θεώρημα 4.2. *(Διαδικασία ορθογωνιοποίησης Gram-Schmidt).*
Έστω V χώρος με εσωτερικό γινόμενο και $S = \{w_1, w_2, \ldots, w_n\}$ ένα γραμμικώς ανεξάρτητο υποσύνολο του V. Ορίζουμε $S' = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ όπου

$$u_1 = w_1, \quad v_k = w_k - \sum_{j=1}^{k-1} \frac{\langle w_k, v_j \rangle}{\|v_j\|^2} v_j, \quad 2 \leq k \leq n.$$

Τότε το S' είναι ορθογώνιο σύνολο από μη μηδενικά διανύσματα τέτοιο ώστε $\operatorname{span}(S') = \operatorname{span}(S)$.

Παράδειγμα 4.6. *Έστω $V = \mathbb{R}^4$ και $\{w_1, w_2, w_3\}$ το γραμμικώς ανεξάρτητο υπόσυνολό του, με $w_1 = (1, 0, 1, 0)$, $w_2 = (1, 1, 1, 1)$, $w_3 = (0, 1, 2, 1)$.*
Θα κατασκευάσουμε ένα ορθοκανονικό υποσύνολο $\{u_1, u_2, u_3\}$. Πρώτα θα κατασκευάσουμε ένα ορθογώνιο υποσύνολο $\{v_1, v_2, v_3\}$.
Έστω $v_1 = w_1$ και

$$v_2 = w_2 - \frac{\langle w_2, v_1 \rangle}{\|v_1\|^2} v_1 = (1, 1, 1, 1) - \frac{2}{2}(1, 0, 1, 0) = (0, 1, 0, 1).$$

Στη συνέχεια είναι

$$\begin{aligned} v_3 &= w_3 - \tfrac{\langle w_3, v_1 \rangle}{\|v_1\|^2} v_1 - \tfrac{\langle w_3, v_2 \rangle}{\|v_2\|^2} v_2 \\ &= (0, 1, 2, 1) - \tfrac{2}{2}(1, 0, 1, 0) - \tfrac{2}{2}(0, 1, 0, 1) = (-1, 0, 1, 0). \end{aligned}$$

Θέτοντας $u_i = \frac{1}{\|v_i\|} v_i$ λαμβάνουμε το ορθοκανονικό υποσύνολο

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, 1, 0), \frac{1}{\sqrt{2}}(0, 1, 0, 1), \frac{1}{\sqrt{2}}(-1, 0, 1, 0) \right\}.$$

Παράδειγμα 4.7. *Έστω $V = P(\mathbb{R})$ ο διανυσματικός χώρος των πολυωνύμων με συντελεστές στο $\mathbb{R}$ (ανεξαρτήτως βαθμού). Ο V είναι χώρος με εσωτερικό γινόμενο, θέτοντας*

$$\langle f, g\rangle = \int_{-1}^{1} f(t)g(t)dt, \quad f, g \in V.$$

Θεωρούμε τον υπόχωρο $P_2(\mathbb{R})$ και την κανονική του βάση $B = \{1, x, x^2\}$. Προτρέπουμε τον αναγνώστη να πιστοποιήσει ότι με τη διαδικασία Gram-Schmidt προκύπτει η ορθογώνια βάση $\{v_1, v_2, v_3\} = \left\{1, x, x^2 - \frac{1}{3}\right\}$ του $P_2(\mathbb{R})$ και στη συνέχεια η ορθοκανονική του βάση $\{u_1, u_2, u_3\} = \left\{\frac{1}{\sqrt{2}}, \sqrt{\frac{3}{2}}x, \sqrt{\frac{5}{8}}(3x^2 - 1)\right\}$. Τα ορθογώνια αυτά πολυώνυμα έχουν σημασία σε διάφορες εφαρμογές και είναι τα τρία πρώτα πολυώνυμα από τα πολυώνυμα Legendre.

Θεώρημα 4.3. *(Ύπαρξης ορθοκανονικής βάσης). Κάθε μη μηδενικός χώρος V πεπερασμένης διάστασης με εσωτερικό γινόμενο περιέχει μια ορθοκανονική βάση B. Επιπλέον, αν $B = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ είναι μια τέτοια βάση, τότε για κάθε $x \in V$ ισχύει $x = \sum_{i=1}^{n} \langle x, v_i\rangle v_i$.*

Πόρισμα 4.3. *Έστω V χώρος με εσωτερικό γινόμενο και έστω $B = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ μια ορθοκανονική βάση του V. Έστω $\mathrm{T} : V \to V$ ένας γραμμικός τελεστής με πίνακα $\mathrm{A} = [\mathrm{T}]_B$. Τότε τα στοιχεία του πίνακα A είναι $\mathrm{A}_{ij} = \langle \mathrm{T}(v_j), v_i\rangle$.*

4.3 Ο συζυγής ενός γραμμικού τελεστή

Δοθέντος ενός μιγαδικού πίνακα A ορίσαμε τον συζυγή A^*. Αντίστοιχα, για έναν τελεστή $\mathrm{T} \in L(V)$ σε έναν χώρο με εσωτερικό γινόμενο θα ορίσουμε τον συζυγή T^* του οποίου ο πίνακας ως προς μια ορθοκανονική βάση B του V θα είναι ο $[\mathrm{T}^*]_B$.
Έστω V διανυσματικός χώρος με εσωτερικό γινόμενο και έστω $y \in V$. Τότε η συνάρτηση $g : V \to \mathbb{F}$ με $g(x) = \langle x, y\rangle$ είναι γραμμική.
Θα δούμε ότι αν ο V είναι πεπερασμένης διάστασης τότε ισχύει και το αντίστροφο.

Θεώρημα 4.4. *(Αναπαράστασης γραμμικών μορφών)*
Έστω V χώρος με εσωτερικό γινόμενο πεπερασμένης διάστασης επί του $\mathbb{F}$ και $g : V \to \mathbb{F}$ γραμμική. Τότε υπάρχει μοναδικό $y \in V$ τέτοιο ώστε $g(x) = \langle x, y\rangle$ για κάθε $x \in V$.

Απόδειξη. Έστω $B = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ μια ορθοκανονική βάση του V και έστω $y = \sum_{i=1}^{n} \overline{g(v_i)} v_i$.
Ορίζουμε τη συνάρτηση $h : V \to \mathbb{F}$ με $h(x) = \langle x, y\rangle$ η οποία είναι προφανώς γραμμική.

Τότε για κάθε $1 \leq j \leq n$ είναι

$$\begin{aligned} h(v_j) &= \langle v_j, y\rangle = \langle v_j, \textstyle\sum_{i=1}^n \overline{g(v_i)} v_i\rangle \\ &= \textstyle\sum_{i=1}^n g(v_i)\langle v_j, v_i\rangle = \sum_{i=1}^n g(v_i)\delta_{ji} = g(v_j). \end{aligned}$$

Επειδή οι g, h συμφωνούν στη βάση B θα είναι $g = h$ για κάθε $x \in V$.
Για τη μοναδικότητα, έστω ότι $g(x) = \langle x, y'\rangle$ για κάθε x, άρα, από την ιδιότητα του εσωτερικού γινομένου, είναι $y = y'$. □

Παράδειγμα 4.8. *Έστω $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $g(a_1, a_2) = 3a_1 + a_2$ μια γραμμική μορφή. Έστω $B = \{e_1, e_2\}$ η κανονική ορθοκανονική βάση του $\mathbb{R}^2$. Θέτουμε $y = g(e_1)e_1 + g(e_2)e_2 = 3e_1 + e_2 = (3, 1)$ όπως στην προηγούμενη απόδειξη. Τότε είναι $g(a_1, a_2) = \langle (a_1, a_2), (3, 1)\rangle = 3a_1 + a_2$.*

Το θεώρημα αναπαράστασης γραμμικών μορφών χρησιμεύει προκειμένου να αποδειχθεί η ύπαρξη του συζυγούς ενός γραμμικού τελεστή.

Θεώρημα 4.5. *Έστω V ένας χώρος με εσωτερικό γινόμενο πεπερασμένης διάστασης και $\mathrm{T} \in L(V)$. Τότε υπάρχει μοναδική συνάρτηση $\mathrm{T}^* : V \to V$ τέτοια ώστε*

$$\langle \mathrm{T}(x), y\rangle = \langle x, \mathrm{T}^*(y)\rangle \tag{4.1}$$

για κάθε $x, y \in V$. Επιπλέον, η T^* είναι γραμμική.

Ο τελεστής T^* ονομάζεται συζυγής (adjoint) του T.

Παρατήρηση 4.4. *Αν η διάσταση του διανυσματικού χώρου V είναι άπειρη, τότε ο συζυγής μπορεί να μην υπάρχει. Αν όμως υπάρχει, τότε ορίζεται από τη σχέση (1.1).*

Παρατήρηση 4.5. *Από τις ιδιότητες του εσωτερικού γινομένου ισχύει ότι*

$$\langle x, \mathrm{T}(y)\rangle = \overline{\langle \mathrm{T}(y), x\rangle} = \overline{\langle y, \mathrm{T}^*(x)\rangle} = \langle \mathrm{T}^*(x), y\rangle$$

για κάθε $x, y \in V$.

Πρόταση 4.3. *Έστω V χώρος με εσωτερικό γινόμενο πεπερασμένης διάστασης και έστω B μια ορθοκανονική βάση του V. Αν $\mathrm{T} \in L(V)$, τότε $[\mathrm{T}^*]_B = [\mathrm{T}]_B^*$.*

Παράδειγμα 4.9. *Έστω $\mathrm{T} : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ με $\mathrm{T}(z_1, z_2) = (iz_1 + 4z_2, z_1 - z_2)$ και έστω B η κανονική βάση του $\mathbb{C}^2$. Τότε*

$$[\mathrm{T}]_B = \begin{pmatrix} i & 4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad \text{άρα} \quad [\mathrm{T}^*]_B = [\mathrm{T}]_B^* = \begin{pmatrix} -i & 1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$$

συνεπώς είναι $\mathrm{T}^*(z_1, z_2) = (-iz_1 + z_2, 4z_1 - z_2)$.

Άσκηση 4.2. *Αποδείξτε τις εξής ιδιότητες του συζυγούς ενός γραμμικού τελεστή. Έστω* $\mathrm{T}, \mathrm{U} \in L(V), \lambda \in \mathbb{F}$. *Τότε*

1) $(\mathrm{T}+\mathrm{U})^* = \mathrm{T}^* + \mathrm{U}^*$.
2) $(\lambda\,\mathrm{T})^* = \overline{\lambda}\,\mathrm{T}^*$.
3) $(\mathrm{T}\circ\mathrm{U})^* = \mathrm{U}^*\circ\mathrm{T}^*$.
4) $(\mathrm{T}^*)^* = \mathrm{T}$.
5) $\mathrm{Id}^* = \mathrm{Id}$.

4.4 Κανονικοί και αυτοσυζυγείς τελεστές

Θυμίζουμε ότι ένας τελεστής $\mathrm{T} \in L(V)$ είναι διαγωνιοποιήσιμος εάν και μόνο εάν ο διανυσματικός χώρος V έχει μια βάση από ιδιοδιανύσματα. Το ερώτημα είναι υπό ποίες συνθήκες ένας διανυσματικός χώρος με εσωτερικό γινόμενο έχει μια ορθοκανονική βάση από ιδιοδιανύσματα. Πώς μεταφέρονται αυτές ως ιδιότητες ενός τελεστή $\mathrm{T} \in L(V)$;
Παρατηρούμε ότι αν μια τέτοια ορθοκανονική βάση B υπάρχει, τότε ο πίνακας $[\mathrm{T}]$ είναι διαγώνιος, άρα ο $[\mathrm{T}^*]_B = [\mathrm{T}]_B^*$ είναι επίσης διαγώνιος. Επειδή οι διαγώνιοι πίνακες αντιμετατίθενται, τότε και οι τελεστές T και T^* αντιμετατίθενται.
Συνεπώς, αν ο V περιέχει μια ορθοκανονική βάση από ιδιοδιανύσματα, τότε για κάθε $\mathrm{T} \in L(V)$ ισχύει $\mathrm{T}\,\mathrm{T}^* = \mathrm{T}^*\,\mathrm{T}$ (όπου με $\mathrm{T}\,\mathrm{S}$ συμβολίζουμε τη σύνθεση $\mathrm{T}\circ\mathrm{S}$).

Ορισμός 4.6. *1) Έστω V ένας διανυσματικός χώρος με εσωτερικό γινόμενο και* $\mathrm{T} \in L(V)$. *Ο* T *ονομάζεται κανονικός (normal) εάν* $\mathrm{T}\,\mathrm{T}^* = \mathrm{T}^*\,\mathrm{T}$.
2) Ένας $n \times n$ πραγματικός ήμιγαδικός πίνακας A *ονομάζεται κανονικός εάν* $\mathrm{A}\,\mathrm{A}^* = \mathrm{A}^*\,\mathrm{A}$.

Παράδειγμα 4.10. *Ένας πραγματικός αντισυμμετρικός πίνακας* A ($\mathrm{A} = \mathrm{T}^t$) *είναι κανονικός.*

Παραθέτουμε μερικές ιδιότητες των κανονικών τελεστών.

Πρόταση 4.4. *Έστω V διανυσματικός χώρος με εσωτερικό γινόμενο και* $\mathrm{T} \in L(V)$ *κανονικός τελεστής. Τότε*
1) $\|\mathrm{T}(x)\| = \|\mathrm{T}^*(x)\|$ *για κάθε* $x \in V$.
2) Ο τελεστής $\mathrm{T} - c\,\mathrm{Id}$ *είναι κανονικός* ($c \in \mathbb{F}$).
3) Αν το x είναι ένα ιδιοδιάνυσμα του T *με ιδιοτιμή λ τότε το x είναι ένα ιδιοδιάνυσμα του* T^* *με ιδιοτιμή* $\overline{\lambda}$.
4) Αν οι $\lambda_1 \neq \lambda_2$ είναι ιδιοτιμές του T *με αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα x_1, x_2 τότε τα x_1, x_2 είναι κάθετα, δηλαδή* $\langle x_1, x_2\rangle = 0$.

Το κεντρικό αποτέλεσμα είναι το εξής:

Θεώρημα 4.6. *Έστω V μιγαδικός διανυσματικός χώρος με εσωτερικό γινόμενο, πεπερασμένης διάστασης, και $\mathrm{T} \in L(V)$. Τότε ο T είναι κανονικός εάν και μόνο εάν ο V έχει μια ορθοκανονική βάση από ιδιοδιανύσματα του T.*

Η κανονικότητα ενός τελεστή σε έναν πραγματικό διανυσματικό χώρο με εσωτερικό γινόμενο δεν εγγυάται την ύπαρξη μιας ορθοκανονικής βάσης από ιδιοδιανύσματα. Χρειαζόμαστε μια ισχυρότερη υπόθεση για το σκοπό αυτό.

Ορισμός 4.7. *Έστω V διανυσματικός χωρος με εσωτερικο γινόμενο και $\mathrm{T} \in L(V)$.*
1) Ο T ονομάζεται αυτοσυζυγής (self-adjoint) εάν $\mathrm{T} = \mathrm{T}^*$.
2) Ένας $n \times n$ πραγματικός ή μιγαδικός πίνακας A ονομάζεται αυτοσυζυγής εάν $\mathrm{A} = \mathrm{A}^*$.

Πρόταση 4.5. *Έστω T ένας αυτοσυζυγής τελεστής σε έναν διανυσματικό χώρο με εσωτερικό γινόμενο πεπερασμένης διάστασης. Τότε*
1) Κάθε ιδιοτιμή του T είναι πραγματικός αριθμός.
2) Αν ο V είναι πραγματικός διανυσματικός χώρος, τότε το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του T γράφεται ως γινόμενο πρωτοβαθμίων παραγόντων.

Θεώρημα 4.7. *Έστω V πραγματικός διανυσματικός χώρος με εσωτερικό γινόμενο, πεπερασμένης διάστασης και $\mathrm{T} \in L(V)$. Τότε ο T είναι αυτοσυζυγής εάν και μόνο εάν ο V περιέχει μια ορθοκανονική βάση από ιδιοδιανύσματα του V.*

4.5 Μοναδιαίοι και ορθογώνιοι τελεστές

Θα μελετήσουμε τελεστές που διατηρούν τα μήκη, άρα και τα εσωτερικά γινόμενα και αντίστροφα.

Ορισμός 4.8. *Έστω V ένας διανυσματικός χώρος με εσωτερικό γινόμενο, πεπερασμένης διάστασης επί του σώματος $\mathbb{F}$. Εάν $\|\mathrm{T}(x)\| = \|x\|$ για κάθε $x \in V$ τότε ο T ονομάζεται*
1) μοναδιαίος (unitary) εάν $\mathbb{F} = \mathbb{C}$.
2) ορθογώνιος (orthogonal) εάν $\mathbb{F} = \mathbb{R}$.

Παρατήρηση 4.6. *Αν η διάσταση του V είναι άπειρη και ισχύει $\|\mathrm{T}(x)\| = \|x\|$, τότε ο T ονομάζεται ισομετρία.*

Οι στροφές και οι ανακλάσεις του $\mathbb{R}^2$ διατηρούν τα μήκη άρα είναι ορθογώνιοι τελεστές. Η συστηματική τους μελέτη έχει ιδιαίτερη σημασία. Παραθέτουμε μερικές ιδιότητες των μοναδιαίων τελεστών.

Πρόταση 4.6. *Έστω V διανυσματικός χώρος με εσωτερικό γινόμενο, πεπερασμένης διάστασης και $\mathrm{T} \in L(V)$. Τα εξής είναι ισοδύναμα:*
1) $\|\mathrm{T}(x)\| = \|x\|$ για κάθε $x \in V$, δηλαδή ο T είναι μοναδιαίος ή ορθογώνιος τελεστής.
2) $\mathrm{T}\,\mathrm{T}^* = \mathrm{T}^*\,\mathrm{T} = \mathrm{Id}$.
3) $\langle \mathrm{T}(x), \mathrm{T}(y) \rangle = \langle x, y \rangle$ για κάθε $x, y \in V$.
4) Αν B είναι μια ορθοκανονική βάση του V τότε η $\mathrm{T}(B)$ είναι ορθοκανονική βάση του V.

Πρόταση 4.7. *1) Έστω V πραγματικός διανυσματικός χώρος με εσωτερικό γινόμενο, πεπερασμένης διάστασης, και $\mathrm{T} \in L(V)$. Τότε ο V περιέχει μια ορθοκανονική βάση από ιδιοδιανύσματα του T με αντίστοιχες ιδιοτιμές μέτρου 1 εάν και μόνο εάν ο T είναι αυτοσυζυγής και ορθογώνιος.*
2) Έστω V μιγαδικός διανυσματικός χώρος με τις παραπάνω υποθέσεις. Τότε ο V περιέχει μια ορθοκανονική βάση από ιδιοδιανύσματα με αντίστοιχες ιδιοτιμές μέτρου 1 εάν και μόνο εάν ο T είναι μοναδιαίος.

Ορισμός 4.9. *Ένας τετραγωνικός πίνακας ονομάζεται*
1) ορθογώνιος εάν $\mathrm{A}\,\mathrm{A}^t = \mathrm{A}^t\,\mathrm{A} = \mathrm{I_n}$.
2) μοναδιαίος εάν $\mathrm{A}\,\mathrm{A}^* = \mathrm{A}^*\,\mathrm{A} = \mathrm{I_n}$.

Παρατήρηση 4.7. *Η συνθήκη $\mathrm{A}\,\mathrm{A}^* = \mathrm{I_n}$ ιδοδυναμεί με το ότι οι γραμμές του A αποτελούν μια ορθοκανονική βάση του $\mathbb{F}^n$.*
Πράγματι, είναι

$$\delta_{ij} = \mathrm{I}_{ij} = (\mathrm{A}\,\mathrm{A}^*)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} \mathrm{A}_{ik}(\mathrm{A}^*)_{kj} = \sum_{k=1}^{n} \mathrm{A}_{ik}\,\overline{\mathrm{A}_{jk}}.$$

Το τελευταίο άθροισμα ισούται με το εσωτερικό γινόμενο των στοιχείων της i-γραμμής με την j-γραμμή του πίνακα A. Παρόμοια, η συνθήκη $\mathrm{A}^*\,\mathrm{A} = \mathrm{I}$ ισοδυναμεί με το ότι οι στήλες του A αποτελούν ορθοκανονική βάση του $\mathbb{F}^n$.

Παρατήρηση 4.8. *Ο τελεστής T είναι ορθογώνιος (αντ. μοναδιαίος) εάν και μόνο εάν ο πίνακας $[\mathrm{T}]_B$ είναι ορθογώνιος (αντ. μοναδιαίος) για κάποια ορθοκανονική βάση B του V.*

Παράδειγμα 4.11. *Ο πίνακας* $\begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$ *είναι ορθογώνιος.*
Οι γραμμές και οι στήλες του αποτελούν ορθοκανονικές βάσεις του $\mathbb{R}^2$.

Θα συζητήσουμε τώρα το θέμα της ομοιότητας.

Ορισμός 4.10. *Δύο πίνακες* $\mathrm{A}, \mathrm{B} \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$ *(αντίστοιχα* $M_{n\times n}(\mathbb{R})$*) ονομάζονται* <u>*μοναδιαία όμοιοι*</u> *(αντ.* <u>*ορθογώνια όμοιοι*</u>*) εάν υπάρχει μοναδιαίος (αντ. ορθογώνιος) πίνακας* P *τέτοιος ώστε* $\mathrm{A} = \mathrm{P}^* \mathrm{A}\, \mathrm{P}$.

Πρόταση 4.8. *1) Έστω* $\mathrm{A} \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$. *Τότε ο* A *είναι κανονικός εάν και μόνο εάν ο* A *είναι μοναδιαία όμοιος με έναν διαγώνιο πίνακα.*
2) Έστω $\mathrm{A} \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$. *Τότε ο* A *είναι συμμετρικός εάν και μόνο εάν ο* A *είναι ορθογώνια όμοιος με έναν πραγματικό διαγώνιο πίνακα.*

Θεώρημα 4.8. *(Schur). Έστω* $\mathrm{A} \in M_{n\times n}(\mathbb{F})$ *τέτοιος ώστε το χαρακτηριστικό πολυώνυμο να είναι γινόμενο πρωτοβαθμίων παραγόντων επί του* $\mathbb{F}$.
1) Αν $\mathbb{F} = \mathbb{C}$, *τότε ο* A *είναι μοναδιαία όμοιος με έναν μιγαδικό άνω τριγωνικό πίνακα.*
2) Αν $\mathbb{F} = \mathbb{R}$, *τότε ο* A *είναι ορθογώνια όμοιος με έναν πραγματικό άνω τριγωνικό πίνακα.*

4.6 Ασκήσεις

Άσκηση 4.3. *Έστω* $V = M_{n\times n}(\mathbb{F})$. *Αποδείξτε αναλυτικά ότι η σχέση* $\langle \mathrm{A}, \mathrm{B}\rangle = \mathrm{tr}(\mathrm{B}^* \mathrm{A})$ *ορίζει ένα εσωτερικό γινόμενο στον* V. *Για* $n = 2$ *και*

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2+i \\ 3 & i \end{pmatrix}, \qquad \mathrm{B} = \begin{pmatrix} 1+i & 0 \\ i & -i \end{pmatrix}$$

υπολογίστε τα $\|\mathrm{A}\|, \|\mathrm{B}\|$ *και* $\langle \mathrm{A}, \mathrm{B}\rangle$.

Άσκηση 4.4. *Να βρεθούν όλα τα εσωτερικά γινόμενα επί του* $\mathbb{R}$ *και επί του* $\mathbb{C}$.

Άσκηση 4.5. *Έστω* $\langle\ ,\ \rangle$ *το κανονικό εσωτερικό γινόμενο του* $\mathbb{R}^3$. *Αν* $v_1 = (1,2,0), v_2 = (1,-1,0)$ *και* $v_3 = (0,2,3)$ *τότε να βρεθεί ένα διάνυσμα* $v \in \mathbb{R}^3$ *τέτοιο ώστε* $\langle v, v_1\rangle = 1$, $\langle v, v_2\rangle = 3$, *και* $\langle v, v_3\rangle = -1$.

Άσκηση 4.6. *Αποδείξτε τον παρακάτω νόμο του παραλληλογράμμου για έναν χώρο με εσωτερικό γινόμενο* V:

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2 \quad \text{για κάθε}\, x, y \in V.$$

Δώστε γεωμετρική ερμηνεία της ισότητας αυτής για ένα παραλληλόγραμμο του $\mathbb{R}^2$.

Άσκηση 4.7. *Για τα* $(a), (b)$ *παρακάτω, χρησιμοποιήστε την μέθοδο Gram-Schmidt για το υποσύνολο* S *του χώρου με εσωτερικό γινόμενο* V *και βρείτε μια ορθοκανονική* *βάση B του V. Στη συνέχεια, υπολογίστε τους συντελεστές Fourier του δοθέντος διανύσματος x ως προς τη βάση B.*

(a) $V = \mathbb{R}^2$, $S = \{(1,1),(1,2)\}$ *και* $x = (3,4)$.
(b) $V = \mathbb{R}^3$, $S = \{(1,1,1),(0,1,1),(0,0,1)\}$ *και* $x = (1,0,1)$.

Άσκηση 4.8. *Έστω W ο υπόχωρος του $\mathbb{R}^4$ που παράγεται από τα διανύσματα* $v_1 = (1,1,1,0), v_2 = (0,1,2,1), v_3 = (3,2,1,-1), v_4 = (0,0,1,1)$.
(a) Βρείτε τη διάσταση και μια ορθοκανονική βάση του W.
(b)Βρείτε για ποιά $a, b \in \mathbb{R}$ το διάνυσμα $v = (a,2,b,1)$ ανήκει στον W.

Άσκηση 4.9. *Έστω $V = \mathbb{F}^n$ με το κανονικό εσωτερικό γινόμενο και* $\mathrm{T} \in L(V)$ *με* $\mathrm{T}(x_1,\ldots,x_n) = (0, x_1, \ldots, x_{n-1})$. *Να βρεθεί ο* T^*.

Άσκηση 4.10. *Έστω $V = \mathbb{C}^2$ με το κανονικό εσωτερικό γινόμενο και* $\mathrm{T} \in L(V)$. *Αν ο πίνακας που αντιστοιχεί στον T ως προς την κανονική βάση είναι ο* $\begin{pmatrix} 1 & i \\ -2 & -i \end{pmatrix}$ *να βρεθεί ο* T^*.

Άσκηση 4.11. *Έστω V ένας μιγαδικός χώρος με εσωτερικό γινόμενο και T ένας γραμμικός τελεστής στον V. Ορίζουμε*

$$\mathrm{T}_1 = \frac{1}{2}(\mathrm{T} + \mathrm{T}^*) \quad \textit{και} \quad T_2 = \frac{1}{2i}(\mathrm{T} - \mathrm{T}^*).$$

(a) Αποδείξτε ότι οι τελεστές T_1 και T_2 είναι αυτοσυζυγείς και ότι $\mathrm{T} = \mathrm{T}_1 + i\,\mathrm{T}_2$.
(b) Εάν $\mathrm{T} = \mathrm{U}_1 + i\,\mathrm{U}_2$, όπου οι $\mathrm{U}_1, \mathrm{U}_2$ είναι αυτοσυζυγείς τελεστές, αποδείξτε ότι $\mathrm{U}_1 = \mathrm{T}_1$ *και* $\mathrm{U}_2 = \mathrm{T}_2$.
(c) Αποδείξτε ότι ο T είναι κανονικός εάν και μόνο εάν $\mathrm{T}_1\,\mathrm{T}_2 = \mathrm{T}_2\,\mathrm{T}_1$.

Βιβλιογραφία

[1] S. Axler: *Linear Algebra Done Right*, 2nd Edition Springer, 1997.

[2] S. H. Friedberg - A. J. Insel - L. E. Spence: *Linear Algebra*, 4th Edition, Prentice Hall, 2003.

[3] Y. Katznelson - Y. R, Katznelson: *A (Terse) Introduction to Linear Algebra*, American Mathematical Society, 2008.

[4] S. Lipschutz - M. Lipson: *Linear Algebra*, 3rd Edition, Schaum's Outlines, 2003.

[5] H. E. Rose: *Linear Algebra: A Pure Mathematical Approach*, Birkhauser, 2002.

[6] F. Zhang: *Linear Algebra. Challenging Problems for Students*, 2nd Edition, The Johns Hopkings University Press, 2009.