Τίτλος Μαθήματος: Γραμμική Άλγεβρα ΙΙ

Ενότητα: Η κανονική μορφή Jordan

Όνομα Καθηγητή: Ανδρέας Αρβανιτογεώργος

Τμήμα: Μαθηματικών

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Πατρών**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Κεφάλαιο 3

Η κανονική μορφή Jordan

Στο Ανοικτό Μάθημα Γραμμική Άλγεβρα Ι είδαμε τα πλεονεκτήματα που έχουν ένας γραμμικός τελεστής $\mathrm{T} : V \to V$ ή πίνακας A οι οποίοι να είναι διαγωνιοποιήσιμοι. Θυμίζουμε ότι ένας γραμμικός τελεστής $\mathrm{T} :\to V$ επί ενός διανυσματικού χώρου πεπερασμένης διάστασης είναι διαγωνιοποιήσιμος εάν και μόνο εάν ο V έχει μια βάση από ιδιοδιανύσματα. Ένας πίνακας A είναι διαγωνιοποιήσιμος αν είναι όμοιος με έναν διαγώνιο πίνακα. Στην περίπτωση αυτή διάφοροι υπολογισμοί απλουστεύονται δραστικά.

Όταν όμως ένας γραμμικός τελεστής δεν είναι διαγωνιοποιήσιμος θα θέλαμε να βρούμε κάποιες εναλλακτικές απλούστερες μορφές τις οποίες μπορεί να λάβει ο πίνακας του τελεστή ως προς κάποια διατεταγμένη βάση. Μια τέτοια μορφή είναι η κανονική μορφή Jordan που αφορά γραμμικούς τελεστές $\mathrm{T} : V \to V$ που ορίζονται σε διανυσματικούς χώρους πεπερασμένης διάστασης και έχουν την ιδιότητα το χαρακτηριστικό τους πολυώνυμο να γράφεται ως γινόμενο πρωτοβαθμίων παραγόντων. Για παράδειγμα, αυτό συμβαίνει όταν ο V είναι μιγαδικός διανυσματικός χώρος.

Θα δούμε ότι για έναν τέτοιο τελεστή $\mathrm{T} : V \to V$ είναι δυνατόν να βρούμε μια βάση B του V τέτοια ώστε ο πίνακας ως προς τη βάση αυτή να έχει τη μορφή

$$[\mathrm{T}]_B = \begin{pmatrix} J_1 & & & 0 \\ & J_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & J_k \end{pmatrix}, \tag{3.1}$$

όπου J_i είναι τετραγωνικοί πίνακες της μορφής

$$J_i = \begin{pmatrix} \lambda_j & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_j & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_j & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & & \lambda_j & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & & 0 & \lambda_j \end{pmatrix}.$$

Τα οφέλη μιας τέτοιας μορφής είναι πολλά. Για παράδειγμα, μπορούμε να υπολογίσουμε δυνάμεις μη διαγωνιοποιήσιμων πινάκων και να ελέγχουμε αν δύο τετραγωνικοί πίνακες είναι όμοιοι.
Η μορφή (1.1) ονομάζεται κανονική μορφή Jordan του τελεστή Τ και η βάση B κανονική βάση Jordan του Τ. Ο πίνακας J_i ονομάζεται στοιχειώδης πίνακας Jordan.

3.1 Γενικευμένοι ιδιόχωροι

Θυμίζουμε ότι αν ο V είναι ένας διανυσματικός χώρος πεπερασμένης διάστασης, ένας τελεστής $\mathrm{T} : V \to V$ είναι διαγωνιοποιήσιμος εάν και μόνο εάν ο διανυσματικός χώρος V ισούται με το ευθύ άθροισμα ιδιοχώρων του V, δηλαδή ισχύει

$$V = E_{\lambda_1} \oplus E_{\lambda_2} \oplus \cdots \oplus E_{\lambda_k}$$

όπου $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ είναι οι διακεκριμμένες ιδιοτιμές του Τ.
Επίσης, εάν B_i είναι μια διατεταγμένη βάση του E_{λ_i} τότε η ένωση $B = B_1 \cup B_2 \cup \cdots \cup B_k$ είναι μια βάση του V και ως προς αυτή τη βάση ο πίνακας $[\mathrm{T}]$ του Τ είναι διαγώνιος.

Θα γενικεύσουμε αυτή τη διαδικασία. Από εδώ και στο εξής ο V είναι ένας διανυσματικός χώρος πεπερασμένης διάστασης επί του σώματος $\mathbb{F}$ και $\mathrm{T} \in L(V)$ είναι ένας γραμμικός τελεστής $\mathrm{T} : V \to V$.

Ορισμός 3.1. *Έστω $\mathrm{T} \in L(V)$. Ένα μη μηδενικό διάνυσμα $x \in V$ ονομάζεται γενικευμένο ιδιοδιάνυσμα του Τ εάν υπάρχει $\lambda \in \mathbb{F}$ τέτοιο ώστε $(\mathrm{T} - \lambda\,\mathrm{Id})^p(x) = 0$ για κάποιον θετικό ακέραιο p. Στην περίπτωση αυτή θα λέμε ότι το x είναι ένα γενικευμένο ιδιοδιάνυσμα που αντιστοιχεί στον αριθμό $\lambda \in \mathbb{F}$.*

Παρατήρηση 3.1. *Έστω x ένα γενικευμένο ιδιοδιάνυσμα του Τ που αντιστοιχεί στο $\lambda \in \mathbb{F}$ και έστω p ο ελάχιστος θετικός ακεραιος τέτοιος ώστε $(\mathrm{T} - \lambda\,\mathrm{Id})^p(x) = 0$. Τότε*

$$(\mathrm{T} - \lambda\,\mathrm{Id})((\mathrm{T} - \lambda\,\mathrm{Id})^{p-1}(x)) = 0,$$

άρα το $(\mathrm{T} - \lambda\,\mathrm{Id})^{p-1}(x)$ *είναι ένα ιδιοδιάνυσμα του* T *που αντιστοιχεί στο* λ, *συνεπώς το* λ *είναι μια ιδιοτιμή του τελεστή* T.

Ορισμός 3.2. *Έστω* x *ένα γενικευμένο ιδιοδιάνυσμα του τελεστή* $\mathrm{T} \in L(V)$ *με αντίστοιχη ιδιοτιμή* λ. *Έστω* p *ο μικρότερος θετικός ακέραιος τέτοιος ώστε* $(\mathrm{T} - \lambda\,\mathrm{Id})^{p}(x) = 0$. *Τότε το διατεταγμένο σύνολο*

$$\left\{(\mathrm{T} - \lambda\,\mathrm{Id})^{p-1}(x), (\mathrm{T} - \lambda\,\mathrm{Id})^{p-2}(x), \ldots, (\mathrm{T} - \lambda\,\mathrm{Id})(x), x\right\}$$

ονομάζεται κύκλος μήκους p *από γενικευμένα ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν στο* λ. *Το διάνυσμα* $(\mathrm{T} - \lambda\,\mathrm{Id})^{p-1}(x)$ *ονομάζεται αρχικό και το* x *ονομάζεται τελικό διάνυσμα του κύκλου.*

Ορισμός 3.3. *Έστω* λ *μια ιδιοτιμή του τελεστή* $\mathrm{T} \in L(V)$. *Ο γενικευμένος ιδιόχωρος του* T *που αντιστοιχεί στην* λ *είναι το σύνολο*

$$K_\lambda = \left\{x \in V : (\mathrm{T} - \lambda\,\mathrm{Id})^{p}(x) = 0 \quad \text{για κάποιον θετικό ακέραιο}\, p\right\}.$$

Πρόταση 3.1. *Ισχύουν τα εξής:*
1) Το σύνολο K_λ *είναι ένας υπόχωρος του* V.
2) Ισχύει $\mathrm{T}(K_\lambda) \subset K_\lambda$, *δηλαδή ο* K_λ *είναι ένας* $\mathrm{T}-$*αναλλοίωτος υπόχωρος του* V.

Παράδειγμα 3.1. *Ο παρακάτω πίνακας αποτελεί μια κανονική μορφή Jordan του τελεστή* $\mathrm{T} : \mathbb{C}^8 \to \mathbb{C}^8$.

$$\mathrm{J} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & & & & & & \\ & 2 & 1 & & & & \multicolumn{2}{c}{0} \\ & & 2 & & & & & \\ & & & 2 & & & & \\ & & & & 3 & 1 & & \\ & & & & & 3 & & \\ & 0 & & & & & 0 & 1 \\ & & & & & & & 0 \end{pmatrix} \in M_{8\times 8}(\mathbb{C}).$$

Ο J *αποτελείται από στοιχειώδεις πίνακες Jordan. Αυτό σημαίνει ότι υπάρχει μια βάση* $B = \{x_1, x_2, \ldots, x_8\}$ *του* $\mathbb{C}^8$ *τέτοια ώστε* $[\mathrm{T}]_B = J$.
Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του T *είναι*

$$f(t) = (t-2)^4(t-3)^2t^2.$$

Είναι $\mathrm{T}(x_2) = x_1 + 2x_2$ *άρα* $(\mathrm{T} - 2\,\mathrm{Id})(x_2) = x_1$.
Αντίστοιχα, επειδή $\mathrm{T}(x_3) = x_2 + 2x_3$, *είναι* $(\mathrm{T} - 2\,\mathrm{Id})(x_3) = x_2$.
Συνεπώς, τα τρία πρώτα διανύσματα της βάσης B *γράφονται ως*

$$B_1 = \{x_1, x_2, x_3\} = \big\{(\mathrm{T} - 2\,\mathrm{Id})^2(x_3), (\mathrm{T} - 2\,\mathrm{Id})(x_3), x_3\big\}$$

όπου μόνο το x_1 *είναι ιδιοδιάνυσμα.*
Αντίστοιχα, το $B_2 = \{x_4\}$ *είναι το μόνο διάνυσμα της* B *που αντιστοιχεί στον δεύτερο στοιχειώδη πίνακα Jordan και είναι ιδιοδιάνυσμα. Τέλος, είναι*

$$B_3 = \{x_5, x_6\} = \{(\mathrm{T} - 3\,\mathrm{Id})(x_6), x_6\}$$

και

$$B_4 = \{x_7, x_8\} = \{\mathrm{T}(x_8), x_8\}.$$

Ισχύουν τα εξής:

Θεώρημα 3.1. *Έστω* $\mathrm{T} \in L(V)$ *και* B *μια διατεταγμένη βάση του* V. *Τότε η* B *είναι μια κανονική βάση Jordan του* T *(δηλαδή* $[\mathrm{T}]_B = \mathrm{T}$*) εάν και μόνο εάν η* B *είναι ένωση κύκλων από γενικευμένα ιδιοδιανύσματα του* T, *ξένων μεταξύ τους.*

Θεώρημα 3.2. *Έστω* $\mathrm{T} \in L(V)$ *τέτοιος ώστε το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του* T *να γράφεται ως γινόμενο πρωτοβαθμίων παραγόντων. Τότε ο* V *περιέχει μια βάση Jordan του* T.

Θεώρημα 3.3. *Έστω* $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ *οι διακεκριμμένες ιδιοτιμές του τελεστή* $\mathrm{T} \in L(V)$ *με πολλαπλότητες* $m_1, \ldots, m_k$ *αντίστοιχα. Τότε ισχύουν τα εξής:*
1) $\dim(K_{\lambda_i}) = m_i$ $(i = 1, \ldots, k)$.
2) $K_{\lambda_i} = \ker(\mathrm{T} - \lambda_i\,\mathrm{Id})^{m_i}$ $(i = 1, \ldots, k)$.
3) Αν B *είναι μια κανονική βάση Jordan του* T *τότε για κάθε* i *το σύνολο* $B_i = B \cap K_{\lambda_i}$ *είναι μια βάση του* K_{λ_i}.
4) Ο $\mathrm{T} \in L(V)$ *είναι διαγωνιοποιήσιμος εάν και μόνο εάν* $E_{\lambda_i} = K_{\lambda_i}$ *για κάθε* i.

Παράδειγμα 3.2. *Έστω* $\mathrm{T} : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$ *με πίνακα*

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 5 \\ -1 & -1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Θα βρούμε μια βάση για κάθε ιδιόχωρο και κάθε γενικευμένο ιδιόχωρο του T.
Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του T *είναι*

$$f(t) = -(t-3)(t-2)^2.$$

Υπάρχουν δύο ιδιοτιμές, η $\lambda_1 = 3$ *πολλαπλότητας* 1 *και η* $\lambda_2 = 2$ *πολλαπλότητας* 2.
Είναι $\dim(K_{\lambda_1}) = 1$ *και* $\dim(K_{\lambda_2}) = 2$. *Επίσης,*

$$K_{\lambda_1} = \ker(\mathrm{T} - 3\,\mathrm{Id}) = E_{\lambda_1}.$$

$$K_{\lambda_2} = \ker(\mathrm{T} - 2\,\mathrm{Id})^2 = E_{\lambda_2}.$$

Μια βάση του E_{λ_1} *(άρα και του* K_{λ_1}*) είναι η* $B_1 = \{x_1 = (-1, 2, 1)\}$.
Επειδή $\dim(K_{\lambda_2}) = 2$ *ο* K_{λ_2} *περιέχει μια βάση* B_2 *που αποτελείται από ένωση κύκλων.*
Υπάρχουν δύο ενδεχόμενα: η βάση αυτή είναι ένωση κύκλων μήκους 1 *ή αποτελείται από έναν κύκλο μήκους* 2. *Τα ενδεχόμενα αυτά είναι δυνατόν να παρασταθούν με τα εξής διαγράμματα:*

$$\bullet \quad \bullet \qquad \textit{ή} \qquad \begin{array}{c} \bullet \\ \bullet \end{array}$$

Η πρώτη περίπτωση απορρίπτεται, επειδή τότε το μοναδικό διάνυσμα σε κάθε κύκλο θα ήταν ιδιοδιάνυσμα του T, *άρα η τελική βάση* $B = B_1 \cup B_2$ *θα ήταν μια βάση από ιδιοδιανύσματα του* T.
Αυτό όμως αντίκειται στο ότι $\dim(E_{\lambda_2}) = 1$ *(κάντε έλεγχο).*
Συνεπώς, η βάση B_2 *θα αποτελείται από έναν κύκλο μήκους* 2.
Ένα διάνυσμα $v \in \mathbb{C}^3$ *είναι τελικό διάνυσμα ενός τέτοιου κύκλου εάν και μόνο εάν* $(\mathrm{A} - 2\,\mathrm{I})(v) \neq 0$ *και* $(\mathrm{A} - 2\,\mathrm{I})^2(v) = 0$.
Με υπολογισμό προκύπτει ότι το διάνυσμα $\{(1, -3, -1)\}$ *είναι μια βάση του ομογενούς συστήματος* $(\mathrm{A} - 2\,\mathrm{I})X = 0$ *και το σύνολο* $B = \{(1, -3, -1), (-1, 2, 0)\}$ *είναι μια βάση του ομογενούς συστήματος* $(\mathrm{A} - 2\,\mathrm{I})^2 X = 0$. *Άρα παίρνουμε* $v = (-1, 2, 0)$.
Επίσης, παρατηρούμε ότι $(\mathrm{A} - 2\,\mathrm{I})(v) = (1, -3, 1)$ *άρα ο κύκλος* $B_2 = \{(\mathrm{A} - 2\,\mathrm{I})(v), v\}$ *ταυτίζεται με την βάση του ομογενούς συστήματος* $(\mathrm{A} - 2\,\mathrm{I})^2 X = 0$.
Τελικά, η $B = B_1 \cup B_2$ *είναι μια κανονική βάση Jordan του* T *και*

$$[\mathrm{T}]_B = \left(\begin{array}{c|cc} 3 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{array} \right).$$

Τα παραπάνω παριστώνται με το διάγραμμα

$$\begin{array}{ccc} B_1 & \qquad & B_2 \\ & & \bullet\ (\mathrm{A} - 2\,\mathrm{I})v \\ \bullet\, x_1 & & \\ & & \bullet\ v \end{array}$$

3.2 Η κανονική μορφή Jordan

Το κεντρικό θεώρημα του κεφαλαίου είναι το εξής:

Θεώρημα 3.4. *Έστω* $\mathrm{T} \in L(V)$ *με ελάχιστο πολυώνυμο*

$$p(t) = (t - \lambda_1)^{r_1}(t - \lambda_2)^{r_2} \cdots (t - \lambda_k)^{r_k}, (\lambda_i \neq \lambda_j)$$

Τότε υπάρχει μια κανονική βάση Jordan B *του* T *τέτοια ώστε*

$$[\mathrm{T}]_B = \mathrm{J} = \begin{pmatrix} J_{\lambda_1, r_{11}, \ldots, r_{1s_1}} & & & 0 \\ & J_{\lambda_2, r_{21}, \ldots, r_{2s_2}} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & J_{\lambda_k, r_{k1}, \ldots, r_{ks_k}} \end{pmatrix}, \tag{3.2}$$

όπου

$$J_{\lambda_i, r_{i1}, \ldots, r_{is_i}} = \begin{pmatrix} J_{\lambda_i, r_{i1}} & & & 0 \\ & J_{\lambda_i, r_{i2}} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & J_{\lambda_i, r_{is_i}} \end{pmatrix}$$

αποτελείται από στοιχειώδεις πίνακες Jordan και $(\mathrm{T} - \lambda_i)^{r_{ij}}$ $(i = 1, 2, \ldots, k), (j = 1, 2, \ldots, s_i)$ *είναι οι* <u>*στοιχειώδεις διαιρέτες*</u> *(δηλαδή πολυώνυμα) του* T.

Το γινόμενο των στοιχειωδών διαιρετών ισούται με το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του T (μη λαμβάνοντας υπόψη το πρόσημό του).
Η έκφραση (1.2) είναι μοναδική εάν δε λαμβάνουμε υπ'οψη την μετάθεση των $J_{\lambda_i, r_{i1}, \ldots, r_{is_i}}$.

Πόρισμα 3.1. *Δύο* $n \times n$ *πίνακες* A, B *είναι όμοιοι εάν και μόνο εάν έχουν την ίδια κανονική μορφή Jordan (δηλαδή* $\mathrm{J_A} = \mathrm{J_B}$*).*

Παράδειγμα 3.3. *Θεωρούμε τον τελεστή του προηγούμενου παραδείγματος 1.2. Το ελάχιστο πολυώνυμο του* T *είναι το*

$$p(t) = (t - 3)(t - 2)^2.$$

Οι δυνάμεις των πρωτοβαθμίων παραγόντων του $p(t)$ *αντιστοιχούν σε πλήρεις κύκλους, άρα σε στοιχειώδεις πίνακες Jordan. Συνεπώς, η κανονική μορφή Jordan είναι η*

$$\mathrm{A} = \left(\begin{array}{c|cc} 3 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{array}\right).$$

Παράδειγμα 3.4. *Έστω*

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο είναι $f(t) = -(t+1)^3$ *και το ελάχιστο είναι* $p(t) = (t+1)^3$.
Υπάρχει ένας μόνο στοιχειώδης πίνακας Jordan, άρα

$$\mathrm{J} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Το διάγραμμα είναι της μορφής

$$\begin{array}{l} B_1 \\ \bullet\, (\mathrm{T}+\mathrm{Id})^2 x \\ \bullet\, (\mathrm{T}+\mathrm{Id}) x \\ \bullet \quad x \end{array}$$

Παράδειγμα 3.5. *Να βρεθεί η κανονική μορφή Jordan του πίνακα*

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 & 1 \\ 0 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του A *είναι*

$$f(t) = (t-2)^2(t-1)(t-3)$$

το οποίο ισούται με το ελάχιστο $p(t)$. *Άρα η κανονική μορφή Jordan ισούται με*

$$\mathrm{J} = \left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right).$$

Το διάγραμμα είναι

$$\begin{array}{lll} \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & & \end{array}$$

Παράδειγμα 3.6. *Το ίδιο ερώτημα για τον πίνακα*

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} -5 & 3 & 1 \\ -4 & 2 & 1 \\ -4 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Είναι $f(t) = (t+1)^3$ *και* $p(t) = (t+1)^2$.
Το ελάχιστο πολυώνυμο $(t+1)^2$ *αντιστοιχεί σε έναν στοιχειώδη πίνακα Jordan και χρειαζόμαστε έναν παράγοντα* $(t+1)$ *για να πάρουμε το χαρακτηριστικό* $f(t) = (t+1)^3$. *Άρα*

$$\mathrm{J} = \left(\begin{array}{cc|c} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

Το διάγραμμα είναι

$$\begin{array}{ll} \bullet & \bullet \\ \bullet & \end{array}$$

Παράδειγμα 3.7. *Να βρεθεί η κανονική μορφή Jordan του τελεστή* $\mathrm{T} : \mathbb{R}^7 \to \mathbb{R}^7$ *με χαρακτηριστικό πολυώνυμο* $f(t) = -(t-1)^3(t-2)^4$ *και ελάχιστο πολυώνυμο* $p(t) = (t-1)^2(t-2)^3$.

Οι στοιχειώδεις διαιρέτες είναι $\{(t-1)^2, (t-2)^3, t-1, t-2\}$ *που αντιστοιχούν στο διάγραμμα*

$$\begin{array}{llll} \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & & \\ & \bullet & & \end{array}$$

Η κανονικη μορφή Jordan είναι

$$\mathrm{J} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & & & & & \\ & 1 & & & & & 0 \\ & & 2 & 1 & & & \\ & & & 2 & 1 & & \\ & & & & 2 & & \\ & & & & & 1 & \\ 0 & & & & & & 2 \end{pmatrix}.$$

Παράδειγμα 3.8. *Το ίδιο ερώτημα για τον τελεστή* $\mathrm{T} : \mathbb{R}^7 \to \mathbb{R}^7$ *με* $f(t) = -(t-1)^3(t-2)^4$, $p(t) = (t-1)^2(t-2)^2$.

Οι στοιχειώδεις διαιρέτες του T *μπορεί να είναι*

$$\left\{(t-1)^2, (t-2)^2, t-1, (t-2)^2\right\}$$

με διάγραμμα

$$\begin{array}{cccc} \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & & \bullet \end{array}$$

ή

$$\left\{(t-1)^2, (t-2)^2, t-1, t-2, t-2\right\}$$

με διάγραμμα

$$\begin{array}{ccccc} \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & & & \end{array}$$

Άρα ο πίνακας του τελεστή T *είναι όμοιος με έναν από τους παρακάτω*

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & & & & & \\ & 1 & & & & 0 & \\ & & 2 & 1 & & & \\ & & & 2 & & & \\ & & & & 1 & & \\ & 0 & & & & 2 & 1 \\ & & & & & & 2 \end{pmatrix} \text{ ή } \begin{pmatrix} 1 & 1 & & & & & \\ & 1 & & & & & 0 \\ & & 2 & 1 & & & \\ & & & 2 & & & \\ & & & & 1 & & \\ & & & & & 2 & \\ 0 & & & & & & 2 \end{pmatrix}.$$

Παράδειγμα 3.9. *Να ταξινομήσετε (από άποψη ομοιότητας) τους πίνακες*

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} -3 & 3 & -2 \\ -7 & 6 & -3 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \mathrm{B} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -4 & 4 & -2 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\mathrm{C} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -3 & -1 & -2 \\ 7 & 5 & 6 \end{pmatrix}, \mathrm{D} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Τα χαρακτηριστικά πολυώνυμα των $\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C}$ *είναι*
$f_{\mathrm{A}}(t) = f_{\mathrm{B}}(t) = f_{\mathrm{C}}(t) = -(t-1)(t-2)^2$ *και του* D *είναι*

$f_{\mathrm{D}}(t) = -t(t-1)(t-2)$.
Συνεπώς, ο πίνακας D *δεν είναι όμοιος με τους* A, B *και* D. *Για τα ελάχιστα πολυώνυμα ισχύει*
$p_{\mathrm{A}}(t) = p_{\mathrm{C}}(t) = f_{\mathrm{A}}(t)$ *και* $p_{\mathrm{B}}(t) = (t-1)(t-2)$.
Άρα ο πίνακας B *δεν είναι όμοιος με τους* A *και* C.
Τελικά προκύπτει ότι $\mathrm{J}_{\mathrm{A}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \mathrm{J}_{\mathrm{C}}$
συνεπώς, οι πίνακες A *και* C *είναι όμοιοι.*

Άσκηση 3.1. *Έστω* $\mathrm{A} \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$. *Ορίζουμε τον πίνακα*

$$e^{t\,\mathrm{A}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\,\mathrm{A}^n = \mathrm{I} + \mathrm{A} + \frac{1}{2!}\,\mathrm{A}^2 + \cdots .$$

Αποδεικνύεται ότι η σειρά συγκλίνει απολύτως άρα συγκλίνει.
Αν $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ *υπολογίστε τον πίνακα* $e^{t\,\mathrm{A}}$.

<u>Απάντηση</u>: $e^{t\,\mathrm{A}} = \begin{pmatrix} e^{t\lambda} & te^{t\lambda} \\ 0 & e^{t\lambda} \end{pmatrix}$

Παράδειγμα 3.10. *Να ταξινομήσετε (από άποψη ομοιότητας) όλους τους* $n \times n$ *μιγαδικούς πίνακες που ικανοποιούν τη σχέση* $\mathrm{A}^2 = -\,\mathrm{I}$.

Επειδή ο πίνακας A *ικανοποιεί τη σχέση* $x^2 + 1 = 0$, *το ελάχιστο πολυώνυμο του* A *είναι* $p(t) = (t-i)(t+i)$ *ή* $p(t) = t - i$ *ή* $p(t) = t + i$ *(γιατι;). Θα εξετάσουμε την κάθε περίπτωση χωριστά.*

1) Αν $p(t) = (t-i)(t+i)$ *τότε το χαρακτηριστικό πολυώνυμο είναι*
$f(t) = (t-i)^r(t+i)^{n-r}$, $1 \le r \le n-1$.
2) Αν $p(t) = -t-i$ *τότε το χαρακτηριστικό πολυώνυμο είναι* $f(t) = (t-i)(t+i)^{n-1}$.
3) Αν $p(t) = t+i$ *τότε το χαρακτηριστικό πολυώνυμο είναι* $f(t) = (t+i)(t-i)^{n-1}$.

Σε κάθε περίπτωση ο πίνακας A *είναι όμοιος με έναν από τους πίνακες*

$$\mathrm{J} = \begin{pmatrix} i & & & & & & & \\ & i & & & & & & \\ & & \ddots & & & & & \\ & & & i & & & & \\ & & & & -i & & & \\ & & & & & -i & & \\ & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & -i \end{pmatrix}$$

όπου τα διαγώνια στοιχεία i είναι r το πλήθος και τα στοιχεία $-i$ είναι $n-r$ το πλήθος με $0 \leq r \leq n$.

3.3 Ασκήσεις

Άσκηση 3.2. *Να βρεθεί η κανονική μορφή Jordan των παρακάτω πινάκων με στοιχεία από το $\mathbb{C}$.*

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & -4 & 0 \\ 3 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -3 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & -1 & 2 \\ -2 & -3 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Άσκηση 3.3. *Να εξετάσετε ποιά ζεύγη από τους ακόλουθους πίνακες είναι όμοιοι:*

α) $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in M_{2\times 2}(\mathbb{R}).$

β) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} \in M_{2\times 2}(\mathbb{C}).$

γ) $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in M_{4\times 4}(\mathbb{R}).$

δ) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in M_{4\times 4}(\mathbb{R}).$

Άσκηση 3.4. *Να βρεθούν όλοι οι* 5×5 *μιγαδικοί πίνακες* A *με* $\mathrm{A} = \mathrm{A}^2$.

Άσκηση 3.5. *Να βρεθούν όλοι οι* 6×6 *μιγαδικοί πίνακες με χαρακτηριστικό πολυώνυμο* $(t-1)^2(t-2)^4$.

Άσκηση 3.6. *Να βρεθούν όλοι οι* 6×6 *μιγαδικοί πίνακες με ελάχιστο πολυώνυμο* $(t-1)^2(t+1)^2$.

Άσκηση 3.7. *Να ταξινομήσετε (από άποψη ομοιότητας) όλους τους μηδενοδύναμους* 6×6 *πίνακες. (Ένας πίνακας ονομάζεται μηδενοδύναμος εάν* $\mathrm{A}^p = 0$ *για κάποιον θετικό ακέραιο* p*).*

Άσκηση 3.8. *Έστω* A *ένας* $n \times n$ *πίνακας του οποίου το χαρακτηριστικό πολυώνυμο γράφεται ως γινόμενο πρωτοβαθμίων παραγόντων. Αποδείξτε ότι οι πίνακες* A *και* A^t *έχουν την ίδια κανονική μορφή Jordan. Συμπεράνετε ότι ο* A *είναι όμοιος με τον* A^t.

Άσκηση 3.9. *Δίνεται ο πίνακας* $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 2-a & a & a-3 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

α) Για ποιές τιμές του $a \in \mathbb{R}$ *ο πίνακας* A *είναι διαγωνιοποιήσιμος;*
β) Για τις τιμές του $a \in \mathbb{R}$ *για τις οποίες ο* A *δεν είναι διαγωνιοποιήσιμος, να βρεθεί η κανονική μορφή Jordan.*

Βιβλιογραφία

[1] S. Axler: *Linear Algebra Done Right*, 2nd Edition Springer, 1997.

[2] S. H. Friedberg - A. J. Insel - L. E. Spence: *Linear Algebra*, 4th Edition, Prentice Hall, 2003.

[3] Y. Katznelson - Y. R, Katznelson: *A (Terse) Introduction to Linear Algebra*, American Mathematical Society, 2008.

[4] S. Lipschutz - M. Lipson: *Linear Algebra*, 3rd Edition, Schaum's Outlines, 2003.

[5] H. E. Rose: *Linear Algebra: A Pure Mathematical Approach*, Birkhauser, 2002.

[6] F. Zhang: *Linear Algebra. Challenging Problems for Students*, 2nd Edition, The Johns Hopkings University Press, 2009.