Τίτλος Μαθήματος: Γραμμική Άλγεβρα ΙΙ

Ενότητα: Το Θεώρημα Cayley-Hamilton και το ελάχιστο πολυώνυμο

Όνομα Καθηγητή: Ανδρέας Αρβανιτογεώργος

Τμήμα: Μαθηματικών

Άδειες Χρήσης

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Πατρών**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Κεφάλαιο 2

Το Θεώρημα Cayley-Hamilton και το ελάχιστο πολυώνυμο

Στο κεφάλαιο αυτό θα επικεντρωθούμε σε δύο θέματα. Το πρώτο είναι ένα σημαντικό θεώρημα της Γραμμικής Άλγεβρας, το θεώρημα των Cayley και Hamilton, και το δεύτερο είναι η έννοια του χαρακτηριστικού πολυωνύμου ενός γραμμικού τελεστή, την οποία θα χρησιμοποιήσουμε στο επόμενο κεφάλαιο.

2.1 Το θεώρημα Cayley-Hamilton

Έστω $\mathrm{T} : V \to V$ ένας γραμμικός τελεστής στον διανυσματικό χώρο V επί του σώματος $\mathbb{F}$ και έστω $f(x) = a_0 + a_a x + \cdots + a_n x^n$ ένα πολυώνυμο με συντελεστές στο $\mathbb{F}$.
Γράφουμε $\mathrm{T}^2 = \mathrm{T} \circ \mathrm{T}$, $\mathrm{T}^3 = \mathrm{T}^2 \circ \mathrm{T}$, κ.ο.κ. Ορίζουμε τον γραμμικό τελεστή

$$f(\mathrm{T}) = a_0 \operatorname{Id}_V + a_1 \mathrm{T} + a_2 \mathrm{T}^2 + \cdots + a_n \mathrm{T}^n \in L(V).$$

Παρόμοια, αν $\mathrm{A} \in M_{n\times n}(\mathbb{F})$, ορίζουμε τον πίνακα

$$f(\mathrm{A}) = a_0 \mathrm{I}_n + a_1 \mathrm{A} + a_2 \mathrm{A}^2 + \cdots + a_n \mathrm{A}^n \in M_{n\times n}(\mathbb{F}).$$

Παράδειγμα 2.1. *Έστω* $\mathrm{T} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *με τύπο* $\mathrm{T}(a,b) = (a+b, a-b)$ *και έστω* $f(x) = x^2 - 3x + 2$*. Τότε* $\mathrm{T}^2(a,b) = \mathrm{T}(a+b, a-b) = (2a, 2b)$ *και*

$$\begin{aligned} f(\mathrm{T})(a,b) &= (\mathrm{T}^2 - 3\mathrm{T} + 2\operatorname{Id}_{\mathbb{R}^2})(a,b) \\ &= (2a,2b) - (3a+3b, 3a-3b) + 2(a,b) \\ &= (a-3b, 3a+7b). \end{aligned}$$

Επίσης, αν $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, *τότε*

$$\begin{aligned} f(\mathrm{A}) &= \mathrm{A}^2 - 3\,\mathrm{A} + 2\,\mathrm{I}_2 \\ &= \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 0 & -6 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Υποθέτουμε ότι $\dim(V) = n$. Τότε $\dim(L(V)) = n^2$. Αν $\mathrm{T} \in L(V)$ τότε τα στοιχεία $\mathrm{T}^0, \mathrm{T}^1, \mathrm{T}^2, \ldots, \mathrm{T}^{n^2} \in L(V)$ είναι n^2 το πλήθος, άρα είναι γραμμικώς εξαρτημένα. Συνεπώς, υπάρχουν $a_0, a_1, \ldots, a_{n^2} \in \mathbb{F}$, όχι όλα μηδέν, τέτοια ώστε

$$a_0\,\mathrm{Id}_V + a_1\,\mathrm{T} + a_2\,\mathrm{T}^2 + \cdots + a_{n^2}\,\mathrm{T}^{n^2} = \mathrm{T}_0$$

όπου T_0 είναι ο μηδενικός τελεστής στον $L(V)$ (με τύπο $\mathrm{T}_0(x) = 0 \in V$ για κάθε $x \in V$).
Άρα βλέπουμε ότι ο τελεστής T μηδενίζει το πολυώνυμο $a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_{n^2} x^{n^2}$ βαθμού n^2, ο οποίος όμως είναι πολύ μεγάλος.
Το ερώτημα είναι αν υπάρχει κάποιο άλλο πολυώνυμο μικρότερου βαθμού το οποίο να «μηδενίζεται» από τον τελεστή T. Η απάντηση είναι η εξής:

Θεώρημα 2.1. *(Cayley-Hamilton) Έστω V διανυσματικός χώρος πεπερασμένης διάστασης, $\mathrm{T} \in L(V)$ και έστω $f(t)$ το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του T. Τότε $f(\mathrm{T}) = \mathrm{T}_0$.*

Θα δώσουμε μια απόδειξη στη συνέχεια.

Πόρισμα 2.1. *Έστω $\mathrm{A} \in M_{n\times n}(\mathbb{F})$ και έστω $f(t)$ το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του πίνακα A. Τότε $f(\mathrm{A}) = 0$, ο μηδενικός $n \times n$ πίνακας.*

Παράδειγμα 2.2. *Έστω $\mathrm{T} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ με $\mathrm{T}(a,b) = (2a+b, a-b)$.*
Ο πίνακας του T ως προς την κανονική διατεταγμένη βάση $B = \{e_1, e_2\}$ του $\mathbb{R}^2$ είναι ο $\mathrm{A} = \{\mathrm{T}\}_B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$. Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του τελεστή T (άρα και του πίνακα A) είναι

$$f(t) = \det(\mathrm{A} - t\,\mathrm{I}) = \det\begin{pmatrix} 2-t & 1 \\ 1 & -1-t \end{pmatrix} = t^2 - t - 3.$$

Τότε

$$f(\mathrm{A}) = \mathrm{A}^2 - \mathrm{A} - 3\,\mathrm{I} = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Επίσης εύκολα προκύπτει ότι

$$f(\mathrm{T}) = \mathrm{T}^2 - \mathrm{T} - 3\,\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^2} = \mathrm{T}_0\,.$$

Παράδειγμα 2.3. *Έστω* $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Υποθέτουμε ότι ο A *αντιστρέφεται. Θα υπολογίσουμε τον αντίστροφο* A^{-1}.
Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του A *είναι*

$$\begin{aligned} f(t) &= \det(\mathrm{A} - t\,\mathrm{I}_4) = \det \begin{pmatrix} 1-t & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1-t & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1-t & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1-t \end{pmatrix} \\ &= (1-t)^4 = t^4 - 4t^3 + 6t^2 - 4t + 1. \end{aligned}$$

Από το θεώρημα Cayley-Hamilton έχουμε ότι

$$\mathrm{A}^4 - 4\,\mathrm{A}^3 + 6\,\mathrm{A}^2 - 4\,\mathrm{A} + \mathrm{I}_4 = 0$$

ή

$$\mathrm{A}(\mathrm{A}^3 - 4\,\mathrm{A}^2 + 6\,\mathrm{A} - 4\,\mathrm{I}_4) = -\,\mathrm{I}_4,$$

συνεπώς

$$\mathrm{A}^{-1} = -\,\mathrm{A}^3 + 4\,\mathrm{A}^2 - 6\,\mathrm{A} + 4\,\mathrm{I}_4\,.$$

Στη συνέχεια, αποδεικνύουμε το θεώρημα Cayley-Hamilton.

Απόδειξη. Αρκεί να αποδείξουμε το θεώρημα για πίνακες. Θα δώσουμε μια εναλλακτική απόδειξη όπως παρουσιάστηκε στο Amer. Math. Monthly 2009 και αφήνουμε στον αναγνώστη να πιστοποιήσει τις λεπτομέρειες.
Λόγω της ιδιότητας $\det(-\,\mathrm{A}) = (-1)^n \det(\mathrm{A})$ ας υποθέσουμε ότι το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του πίνακα A είναι

$$\det(t\,\mathrm{I} - \mathrm{A}) = c_0 t^n + c_1 t^{n-1} + \cdots + c_n.$$

Θα αποδείξουμε ότι

$$c_0 \mathrm{A}^n + c_1 \mathrm{A}^{n-1} + c_2 \mathrm{A}^{n-2} + \cdots + c_n \mathrm{I} = 0.$$

Παρατηρούμε ότι ισχύει

$$\det(\mathrm{I} - t\,\mathrm{A}) = t^2 \det(\frac{1}{t}\,\mathrm{I} - \mathrm{A}) = c_0 + c_1 t + c_2 t^2 + \cdots + c_n t^n. \tag{2.1}$$

Θυμίζουμε ότι για κάθε $\mathrm{B} \in M_{n\times n}(\mathbb{F})$ ισχύει $\mathrm{B} = \mathrm{adj}(\mathrm{B}) = \det(\mathrm{B})\,\mathrm{I}$, όπου $\mathrm{adj}(\mathrm{B})$ είναι ο προσαρτημένος πίνακας του B. Τότε είναι

$$\det(\mathrm{I} - t\,\mathrm{A})\,\mathrm{I} = (\mathrm{I} - t\,\mathrm{A})\,\mathrm{adj}(\mathrm{I} - t\,\mathrm{A}). \tag{2.2}$$

Θεωρούμε τυπικές δυναμοσειρές ως προς τη μεταβλητή t και με συντελεστές στο $M_{n\times n}(\mathbb{F})$.
Τότε ο πίνακας $\mathrm{I} - t\,\mathrm{A}$ είναι αντιστρέψιμος και έστω $\sum_{i=0}^{\infty} \mathrm{A}^i\, t^i$ ο αντίστροφός του. Τότε λόγω των (2.1), (2.2) προκύπτει ότι

$$(\sum_{i=0}^{\infty} \mathrm{A}^i\, t^i)(c_0 t^n + c_1 t^{n-1} + \cdots + c_n)\,\mathrm{I} = \mathrm{adj}(\mathrm{I} - t\,\mathrm{A}). \tag{2.3}$$

Εκφράζουμε τον πίνακα $\mathrm{adj}(\mathrm{I} - t\,\mathrm{A})$ ως μια τυπική δυναμοσειρά $\sum_{i=0}^{\infty} \mathrm{B}_i\, t^i$, $B_i \in M_{n\times n}(\mathbb{F})$, συνεπώς η (2.3) παίρνει τη μορφή

$$(c_0 t^n + c_1 t^{n-1} + \cdots + c_n)(\sum_{i=0}^{\infty} \mathrm{A}^i\, t^i) = \sum_{i=0}^{\infty} \mathrm{B}_i\, t^i. \tag{2.4}$$

Επειδή τα στοιχεία του πίνακα $\mathrm{adj}(\mathrm{I} - t\,\mathrm{A})$ είναι πολυώνυμα ως προς t βαθμού το πολύ $n-1$, θα είναι $\mathrm{B}_i = 0$ για κάθε $i \geq n$.

Συνεπώς, εξισώνοντας τους συντελεστές του όρου t^n από τα δύο μέλη της (2.4) προκύπτει ότι

$$c_0 \mathrm{A}^n + c_1 \mathrm{A}^{n-1} + c_2 \mathrm{A}^{n-2} + \cdots + c_n \mathrm{I} = 0.$$

□

2.2 Το ελάχιστο πολυώνυμο

Έστω $\mathrm{T} \in L(V)$ ένας γραμμικός τελεστής επί ενός διανυσματικού χώρου V πεπερασμένης διάστασης.

Ορισμός 2.1. *Έστω* $\mathrm{T} \in L(V)$. *Ένα πολυώνυμο* $p(t)$ *ονομάζεται ελάχιστο πολυώνυμο (minimal polynomial) του* T *εαν*
α) Το $p(t)$ *έχει συντελεστή μεγιστοβάθμιου όρου 1*
β) Κάθε πολυώνυμο που μηδενίζεται από τον τελεστή T *έχει βαθμό μεγαλύτερο ή ίσο του* $p(t)$.

Παρατήρηση 2.1. *Κάθε τελεστής* T *επί ενός διανυσματικού χώρου* V *διάστασης* n *έχει ένα ελάχιστο πολυώνυμο βαθμού το πολύ* n.
Πράγματι, από το θεώρημα Cayley-Hamilton το χαρακτηριστικό πολυώνυμο $p(t)$ *του τελεστή* T *βαθμού* n *ικανοποιεί* $f(\mathrm{T}) = \mathrm{T}_0$. *Επιλέγουμε ένα πολυώνυμο* $g(t)$ *ελαχίστου βαθμού τέτοιο ώστε* $g(\mathrm{T}) = \mathrm{T}_0$ *και διαιρώ το* $g(t)$ *με τον συντελεστή του μεγιστοβάθμιου όρου του. Τότε προκύπτει ένα πολυώνυμο* $p(t)$ *βαθμού το πολύ* n.

Η μοναδικότητα του ελαχίστου πολυωνύμου προκύπτει από την παρακάτω πρόταση.

Πρόταση 2.1. *Έστω* $p(t)$ *ένα ελάχιστο πολυώνυμο του τελεστή* $\mathrm{T} \in L(V)$, *όπου* V *είναι διανυσματικός χώρος πεπερασμένης διάστασης. Τότε*

1) Αν $g(t)$ *είναι ένα πολυώνυμο τέτοιο ώστε* $g(t) = \mathrm{T}_0$ *τότε το* $p(t)$ *διαιρεί το* $g(t)$. *Ειδικότερα, το* $p(t)$ *διαιρεί το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του* T.
2) Το ελάχιστο πολυώνυμο του τελεστή T *είναι μοναδικό.*

Ορισμός 2.2. *Το ελάχιστο πολυώνυμο* $p(t)$ *ενός πίνακα* $\mathrm{A} \in M_{n\times n}(\mathbb{F})$ *είναι το ελαχίστου βαθμού πολυώνυμο με πρώτο συντελεστή μονάδα τέτοιο ώστε* $p(\mathrm{A}) = 0$.

Πρόταση 2.2. *Έστω* $\dim(V) < \infty$. *Τότε το χαρακτηριστικό πολυώνυμο και το ελάχιστο πολυώνυμο ενός τελεστή* $\mathrm{T} \in L(V)$ *(ή πίνακα* A*) έχουν τις ίδιες ιδιοτιμές.*

Απόδειξη. Έστω $f(t)$ το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του T και $p(t)$ το ελάχιστο πολυώνυμο του T.
Επειδή το $p(t)$ διαιρεί το $f(t)$, υπάρχει πολυώνυμο $q(t)$ τέτοιο ώστε $f(t) = q(t)p(t)$.
Εαν λ είναι μια ρίζα του $p(t)$ τότε

$$f(\lambda) = q(\lambda)p(\lambda) = q(\lambda)0 = 0,$$

άρα το λ είναι και ρίζα του $f(t)$.
Αντίστροφα, έστω ότι το λ είναι μια ρίζα του $f(t)$, δηλαδή μια ιδιοτιμή του T. Έστω $x \in V$ ένα ιδιοδιάνυσμα που αντιστοιχεί στην λ. Τότε ο αριθμός $p(\lambda)$ είναι μια ιδιοτιμή του τελεστή $p(\mathrm{T})$ και x είναι ιδιοδιάνυσμα που αντιστοιχεί στην $p(\lambda)$ (Άσκηση). Τότε

$$0 = \mathrm{T}_0(x) = p(\mathrm{T})(x) = p(\lambda)(x).$$

Επειδή $x \neq 0$, προκύπτει ότι $p(\lambda) = 0$, δηλαδή το λ είναι ρίζα του $p(t)$. □

Πόρισμα 2.2. *Έστω* $\dim(V) < \infty$ *και* $\mathrm{T} \in L(V)$ *με ελάχιστο πολυώνυμο* $p(t)$ *και χαρακτηριστικό πολυώνυμο* $f(t)$*. Αν*

$$f(t) = (t - \lambda_1)^{n_1}(t - \lambda_2)^{n_2} \dots (t - \lambda_k)^{n_k},$$

όπου $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ *είναι οι διακεκριμμένες ιδιοτιμές του* T*, τότε υπάρχουν ακέραιοι* $m_1, \cdots, m_k$ *με* $1 \leq m_i \leq n_i$ $(i = 1, \cdots, k)$ *τέτοιοι ώστε*

$$p(t) = (t - \lambda_1)^{m_1}(t - \lambda_2)^{m_2} \dots (t - \lambda_k)^{m_k}.$$

Παράδειγμα 2.4. *Να βρεθεί το ελάχιστο πολυώνυμο του πίνακα* $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του A *είναι*

$$f(t) = \det(\mathrm{A} - t\,\mathrm{I}_3) = t^3 - 6t^2 + 12t - 8 = (t-2)^3.$$

Τα υποψήφια ελάχιστα πολυώνυμα είναι τα $t-2$, $(t-2)^2$ *ή το* $f(t) = (t-2)^3$*. Αλλά*

$$\mathrm{A} - 2\,\mathrm{I}_3 = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -4 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \neq 0$$

και

$$(\mathrm{A} - 2\,\mathrm{I}_3)^2 = 0.$$

Συνεπώς το ελάχιστο πολυώνυμο του A *είναι το*

$$p(t) = (t-2)^2 = t^2 - 4t + 4.$$

Παράδειγμα 2.5. *Έστω* $\mathrm{T} : P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ *με* $\mathrm{T}(g(x)) = g'(x)$*. Θα βρούμε το ελάχιστο πολυώνυμο του τελεστή* T*.*
Ο πίνακας του T *ως προς την κανονική διατεταγμένη βάση* B *του* $P_2(\mathbb{R})$ *είναι*

$$[\mathrm{T}]_B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

άρα το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του T *είναι το* $f(t) = -t^3$*. Τα υποψήφια ελάχιστα πολυώνυμα είναι* t, t^2, t^3*. Επειδή*

$$\mathrm{T}^2(x^2) = \mathrm{T}(\mathrm{T}(x^2)) = 2 \neq 0,$$

είναι $\mathrm{T}^2 \neq 0$*, συνεπώς το ελάχιστο πολυώνυμο είναι το* t^3*.*

Άσκηση 2.1. *Ένας τετραγωνικός πίνακας* A *αντιστρέφεται αν και μόνο αν το ελάχιστο πολυώνυμο του* T *δεν έχει ρίζα το* 0.

Χρησιμοποιώντας το ελάχιστο πολυώνυμο μπορούμε να δώσουμε ένα κριτήριο διαγωνιοποίησης ενός τελεστή. Η απόδειξη παραλείπεται.

Θεώρημα 2.2. *Έστω* $\dim(V) < \infty$ *και* $\mathrm{T} \in L(V)$. *Τότε ο* T *είναι διαγωνιοποιήσιμος εάν και μόνο εάν το ελάχιστο πολυώνυμο* $p(t)$ *του* T *γράφεται ως γινόμενο πρωτοβαθμίων παραγόντων*

$$p(t) = (t - \lambda_1)(t - \lambda_2) \cdots (t - \lambda_k),$$

όπου $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ *είναι οι διακεκριμμένες ιδιοτιμές του* T.

Παράδειγμα 2.6. *Έστω* $\mathrm{T} : P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ *ο τελεστής* $\mathrm{T}(g(x)) = g'(x)$. *Βρήκαμε παραπάνω το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του* T *το* $p(t) = t^3$. *Άρα ο* T *δεν είναι διαγωνιοποιήσιμος.*

Παράδειγμα 2.7. *Έστω* $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 6 & 1 \end{pmatrix}$. *Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του* A *είναι το*

$$f(t) = \det \begin{pmatrix} 2-t & 5 \\ 6 & 1-t \end{pmatrix} = (t-7)(t+4)$$

το οποίο είναι και το ελάχιστο (γιατί;).
Συνεπώς ο πίνακας A *είναι διαγωνοποιήσιμος.*

Παράδειγμα 2.8. *Αποδείξτε ότι αν* $\mathrm{A} \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ *τέτοιος ώστε* $\mathrm{A} = \mathrm{A}^3$ *τότε ο* A *είναι διαγωνιοποιήσιμος.*

Θεωρούμε το πολυώνυμο $g(t) = t^3 - t = t(t+1)(t-1)$. *Τότε ισχύει* $g(\mathrm{A}) = 0$, *συνεπώς το ελάχιστο πολυώνυμο* $p(t)$ *του* A *διαιρεί το* $g(t)$ *(γιατί;).*
Επειδή το $g(t)$ *έχει διακεκριμμένες ρίζες, το ίδιο συμβαίνει και για το* $p(t)$, *συνεπώς ο* A *είναι διαγωνιοποιήσιμος.*

2.3 Ασκήσεις

Άσκηση 2.2. *Βρείτε το ελάχιστο πολυώνυμο των παρακάτω πινάκων:*

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 & -14 & 5 \\ 1 & -4 & 2 \\ 1 & -6 & 4 \end{pmatrix}.$$

Άσκηση 2.3. *Να βρεθεί το ελάχιστο πολυώνυμο των παρακάτω γραμμικών απεικονίσεων:*
1) $\mathrm{T} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *με* $\mathrm{T}(x, y) = (x + y, x - y)$.
2) $\mathrm{T} : P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ *με* $\mathrm{T}(f) = -xf'' + f' + 2f$.
3) $\mathrm{T} : M_{n\times n}(\mathbb{R}) \to M_{n\times n}(\mathbb{R})$ *με* $\mathrm{T}(\mathrm{A}) = \mathrm{A}^t$ *(παρατηρείστε ότι* $\mathrm{T}^2 = \mathrm{Id}$*).*

Άσκηση 2.4. *Ποιοί από τους πίνακες της άσκησης 2.2 και ποιές από τις απεικονίσεις της άσκησης 2.3 είναι διαγωνιοποιήσιμοι/μες;*

Άσκηση 2.5. *Να βρεθούν όλοι οι γραμμικοί τελεστές* T *του* $\mathbb{R}^2$ *οι οποίοι να είναι διαγωνιοποιήσιμοι και να ικανοποιούν τη σχέση* $\mathrm{T}^3 - 2\,\mathrm{T}^2 + \mathrm{T} = \mathrm{T}_0$ *(*T_0 *ο μηδενικός τελεστής).*

Άσκηση 2.6. *Δίνεται ο πίνακας* $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} -5 & b & a \\ -4 & 2 & a \\ -4 & b & 0 \end{pmatrix}$, $a, b \in \mathbb{R}$.
1) Αν είναι γνωστό ότι $\lambda_1 = -1$ *είναι μια ιδιοτιμή του* A *πολλαπλότητας 3, να υπολογίσετε τις τιμές των παραμέτρων* a, b.
Για τις τιμές των $a, b \in \mathbb{R}$ *του ερωτήματος 1)*
2) Βρείτε το ελάχιστο πολυώνυμο του πίνακα A.
3) Αποδείξτε ότι ισχύουν οι σχέσεις $\mathrm{A}^3 = 3\,\mathrm{A} + 2\,\mathrm{I}$, $\mathrm{A}^4 = -4\,\mathrm{A} - 3\,\mathrm{I}$.

Βιβλιογραφία

[1] S. Axler: *Linear Algebra Done Right*, 2nd Edition Springer, 1997.

[2] C.Bernhardt: *A proof of the Cayley Hamilton theorem*, Amer. math. Monthly, May 2009.

[3] S. H. Friedberg - A. J. Insel - L. E. Spence: *Linear Algebra*, 4th Edition, Prentice Hall, 2003.

[4] Y. Katznelson - Y. R, Katznelson: *A (Terse) Introduction to Linear Algebra*, American Mathematical Society, 2008.

[5] S. Lipschutz - M. Lipson: *Linear Algebra*, 3rd Edition, Schaum's Outlines, 2003.

[6] H. E. Rose: *Linear Algebra: A Pure Mathematical Approach*, Birkhauser, 2002.

[7] F. Zhang: *Linear Algebra. Challenging Problems for Students*, 2nd Edition, The Johns Hopkings University Press, 2009.