Τίτλος Μαθήματος: Γραμμική Άλγεβρα ΙΙ

Ενότητα: Ο δυϊκός χώρος

Όνομα Καθηγητή: Ανδρέας Αρβανιτογεώργος

Τμήμα: Μαθηματικών

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Πατρών**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Κεφάλαιο 1

Ο δυϊκός χώρος

1.1 Βασικές ιδιότητες

Έστω V, W δύο διανυσματικοί χώροι επί ενός σώματος $\mathbb{F}$ (κυρίως $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ ή $\mathbb{C}$) και θεωρούμε τον διανυσματικό χώρο $L(V, W)$ όλων των γραμμικών απεικονίσεων $T : V \to W$. Θα μελετήσουμε την ιδιαίτερη περίπτωση όπου $W = \mathbb{F}$, δηλαδή το σύνολο $L(V, \mathbb{F}) = \{f : V \to \mathbb{F} \,|\, f \text{ γραμμική}\}$

Ορισμός 1.1. *Ο διανυσματικός χώρος $L(V, \mathbb{F})$ ονομάζεται ο <u>δυϊκός χώρος του V</u> (dual space) και συμβολίζεται με V^*.*

Τα στοιχεία του V^* ονομάζονται και <u>γραμμικά συναρτησοειδή</u> ή <u>γραμμικές μορφές</u>.

Παράδειγμα 1.1. *Έστω $V = \mathbb{R}^3$ και $f : V \to \mathbb{R}$ με $f(x, y, z) = x + y + z$.*

Παράδειγμα 1.2. *Έστω $V = M_{n\times n}(\mathbb{F})$ και $f : V \to \mathbb{F}$ με $f(A) = \operatorname{tr} A$.*

Παράδειγμα 1.3. *Έστω $V = \{x : [0, 2\pi] \to \mathbb{R} : x \text{ συνεχής}\}$ και $g \in V$. Ορίζουμε τη συνάρτηση $f : V \to \mathbb{R}$ με*

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} x(t)g(t)dt$$

.

Στην περίπτωση που η $g(t)$ ισούται με $\sin(nt)$ ή $\cos(nt)$, τότε το συναρτησοειδές $f(x)$ ονομάζεται <u>$n-$οστός συντελεστής Fourier της x</u>.

Παράδειγμα 1.4. *Έστω V ένας διανυματικός χώρος πεπερασμένης διάστασης και έστω $B = \{x_1, \ldots, x_n\}$ μια διατεταγμένη βάση του V. Για κάθε $i = 1, \ldots, n$*

ορίζουμε $f_i : V \to \mathbb{F}$ *με* $f_i(x) = a_i$, *όπου* $x = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i \equiv [x]_B$. *Το συναρτησοειδές* f_i *ονομάζεται η i-συνάρτηση συντεταγμένων ως προς τη βάση B. Επίσης, είναι* $f_i(x_j) = \delta_{ij}$ *όπου* δ_{ij} *είναι το δέλτα του Kronecker.*

Εάν ο V είναι πεπερασμένης διάστασης, τότε $\dim(V^*) = \dim(L(V,\mathbb{F})) = \dim(V)\dim(\mathbb{F}) = \dim(V)$, συνεπώς οι V και V^* είναι ισόμορφοι. Θα δούμε πώς μπορούμε να βρούμε μια βάση του V^* εάν γνωρίζουμε μια βάση του V.

Θεώρημα 1.1. *Έστω* V *ένας διανυσματικός χώρος διάστασης* n *και έστω* $B = \{\beta_1, \ldots, \beta_n\}$ *μια διατεταγμένη βάση του* V. *Αν* f_i $(1 \leq i \leq n)$, *είναι η* i*-συνάρτηση συντεταγμένων ως προς τη βάση* B, *τότε το σύνολο* $B^* = \{f_1, \ldots, f_n\}$ *αποτελεί μια βάση του* V^*. *Επιπλέον, για κάθε* $f \in V$ *ισχύει* $f = \sum_{i=1}^{n} f(\beta_i) f_i$.

Ορισμός 1.2. *Η βάση του Θεωρήματος 1.1 ονομάζεται η δυϊκή βάση της B. Για τη βάση αυτή ισχύει* $f_i(\beta_j) = \delta_{ij}$.

Αποδεικνύουμε το Θεώρημα 1.1.

Απόδειξη. Οι διανυσματικοί χώροι V και V^* έχουν την ίδια διάσταση, άρα αρκεί να δείξουμε ότι το σύνολο B^* παράγει το V^*, δηλαδή ότι

$$f = \sum f(\beta_i) f_i$$

Θέτουμε $g = \sum f(\beta_i) f_i$. Τότε για κάθε $1 \leq j \leq n$ είναι

$$\begin{aligned} g(\beta_j) &= \Big(\textstyle\sum_{i=1}^{n} f(\beta_i) f_i \Big)(\beta_j) = \sum_{i=1}^{n} f(\beta_i) f_i(\beta_j) \\ &= \textstyle\sum_{i=1}^{n} f(\beta_i)\delta_{ij} = f(\beta_j) \end{aligned}$$

Οι γραμμικές συναρτήσεις g και f συμφωνούν σε μια βάση B, άρα είναι ίσες, δηλαδή $f = g$. $\square$

Παράδειγμα 1.5. *Έστω η διατεταγμένη βάση* $B = \{(1,2), (3,4)\}$ *του* $\mathbb{R}^2$. *Ζητάμε τη δυϊκή της βάση* $B^* = \{f_1, f_2\}$. *Θα βρούμε τους τύπους των απεικονίσεων* f_1 *και* f_2.
Έστω $\{e_1, e_2\}$ *η κανονική διατεταγμένη βάση του* $\mathbb{R}^2$. *Τότε εξ' ορισμού της* B^* *η* f_1 *ικανοποιεί*

$$\begin{aligned} 1 &= f_1(1,2) = f_1(e_1 + 2e_2) = f_1(e_1) + 2f_1(e_2) \\ 0 &= f_1(3,4) = f_1(3e_1 + 4e_2) = 3f_1(e_1) + 4f_1(e_2) \end{aligned}$$

Λύνοντας τις παραπάνω εξισώσεις ως προς $f_1(e_1)$ και $f_1(e_2)$ βρίσκουμε ότι $f_1(e_1) = -2$ και $f_1(e_2) = \frac{3}{2}$, συνεπώς

$$f_1(x, y) = f_1(xe_1 + ye_2) = xf_1(e_1) + yf_1(e_2) = -2x + \frac{3}{2}y$$

Παρόμοια, προκύπτει ότι $f_2(x, y) = x - \frac{1}{2}y$.

Δοθέντος ενός διανυσματικού χώρου V, ορίσαμε τον δυϊκό V^* και ως διανυσματικός χώρος έχει και αυτός τον δυϊκό του $(V^*)^* \equiv V^{**}$. Θα αποδείξουμε ότι αν ο V είναι πεπερασμένης διάστασης τότε υπάρχει ένας κανονικός ισομορφισμός $\psi : V \to V^{**}$.
Έστω $x \in V$. Ορίζουμε $\psi(x) : V^* \to \mathbb{F}$ ως $\psi(x)(f) = f(x)$ για κάθε $f \in V^*$. Η απεικόνιση $\psi(x)$ είναι γραμμική άρα $\psi(x) \in V^{**}$. Θα δείξουμε ότι η ψ είναι ισομορφισμός.

Λήμμα 1.1. *Έστω V διανυσματικός χώρος πεπερασμένης διάστασης και έστω $x \in V$. Αν $\psi(x)(f) = 0$ για κάθε $f \in V$ τότε $x = 0$.*

Απόδειξη. Υποθέτουμε ότι $x \neq 0$. Θα δείξουμε ότι υπάρχει $f \in V^*$ ώστε $\psi(x)(f) \neq 0$ το οποίο είναι άτοπο.
Πράγματι, έστω $B = \{x_1, \ldots, x_n\}$ μια διατεταγμένη βάση του V τέτοια ώστε $x_1 = x$ και έστω $B^* = \{f_1, \ldots, f_n\}$ η δυϊκή βάση της B. Τότε ισχύει $\psi(x)(f_1) = f_1(x_1) = 1 \neq 0$ που είναι άτοπο. □

Θεώρημα 1.2. *Έστω V διανυσματικός χώρος πεπερασμένης διάστασης. Τότε η απεικόνιση $\psi : V \to V^{**}$ όπως ορίστηκε παραπάνω είναι ισομορφισμός.*

Απόδειξη. Σκιαγράφηση

•Είναι απλό να δειχθεί ότι η ψ είναι γραμμική.

•Λόγω του Λήμματος 1.1 η ψ είναι 1-1.

•Επειδή $\dim(V) = \dim(V^{**})$ και η ψ είναι 1-1 προκύπτει ότι η ψ είναι ισομορφισμός. □

1.2 Ασκήσεις

Άσκηση 1.1. *Για τους παρακάτω διανυσματικούς χώρους V και την αντίστοιχη βάση B, να βρείτε τη δυϊκή βάση του χώρου V^*.*
(α) $V = \mathbb{R}^3, B = \{(1, 0, 1), (1, 2, 1), (0, 0, 1)\}$.
(β) $V = P_2(\mathbb{R}), B = \{1, x, x^2\}$.

Άσκηση 1.2. *Έστω* $V = P_1(\mathbb{R})$ *και* $W = \mathbb{R}^2$ *με αντίστοιχες βάσεις* $B = \{1, x\}$ *και* $\Gamma = \{e_1, e_2\}$. *Ορίζουμε τη γραμμική απεικόνιση* $\mathrm{T} : V \to W$ *με* $\mathrm{T}(p) = (p(0) - 2p(1), p(0) + p'(0))$, *όπου* p' *είναι η παράγωγος του πολυωνύμου* p.
(α) Αν $f \in W^*$ *είναι η γραμμική μορφή με*

$$f(a, b) = a - 2b,$$

υπολογίστε την $\mathrm{T}^t(f)$.
(β) Βρείτε τον πίνακα $\left[\mathrm{T}^t\right]_{\Gamma*}^{B^*}$ *με απευθείας υπολογισμό.*
(γ) Βρείτε τον πίνακα $[\mathrm{T}]_B^{\Gamma}$ *και τον αντίστροφό του, και συγκρίνετε το αποτέλεσμά σας με το ερώτημα (β).*

Βιβλιογραφία

[1] S. Axler: *Linear Algebra Done Right*, 2nd Edition Springer, 1997.

[2] S. H. Friedberg - A. J. Insel - L. E. Spence: *Linear Algebra*, 4th Edition, Prentice Hall, 2003.

[3] Y. Katznelson - Y. R, Katznelson: *A (Terse) Introduction to Linear Algebra*, American Mathematical Society, 2008.

[4] S. Lipschutz - M. Lipson: *Linear Algebra*, 3rd Edition, Schaum's Outlines, 2003.

[5] H. E. Rose: *Linear Algebra: A Pure Mathematical Approach*, Birkhauser, 2002.

[6] F. Zhang: *Linear Algebra. Challenging Problems for Students*, 2nd Edition, The Johns Hopkings University Press, 2009.