Τίτλος Μαθήματος: Συνήθεις Διαφορικές Εξισώσεις Ι

Ενότητα: Πλήρεις Σ.Δ.Ε., πολλαπλασιαστές Euler

Όνομα Καθηγητή: Χρυσή Κοκολογιαννάκη

Τμήμα: Μαθηματικών

Άδειες Χρήσης

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Πατρών**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

2.3 Σ.Δ.Ε. πρώτης τάξης ακριβής (ή πλήρης)

Ορισμός 2.3 Μια Σ.Δ.Ε. της μορφής

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0, \tag{2.10}$$

όπου $M(x,y)$ και $N(x,y)$ ορίζονται σ' ένα υποσύνολο του $\mathbb{R}^2$, είναι συνεχείς συναρτήσεις ως προς x και y με συνεχείς πρώτες μερικές παραγώγους, λέγεται **ακριβής** (ή **πλήρης**) αν υπάρχει μια συνεχής συνάρτηση $u(x,y)$ έτσι ώστε να ισχύει:

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = du \tag{2.11}$$

Από την (2.11) έπεται ότι:

$$M(x,y) = \frac{\partial u(x,y)}{\partial x}, \quad N(x,y) = \frac{\partial u(x,y)}{\partial y} \tag{2.12}$$

και ότι η $u(x,y) = c$, είναι το γενικό ολοκλήρωμα της (2.10).

Θεώρημα 2.1: Μια ικανή και αναγκαία συνθήκη για να είναι η Σ.Δ.Ε. (2.10) ακριβής είναι

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial N(x,y)}{\partial x} \tag{2.13}$$

Το γενικό της ολοκλήρωμα θα δίνεται από την σχέση:

$$\int_{x_0}^{x} M(t,y)dt + \int N(x_0,y)dy = c \tag{2.14}$$

Απόδειξη. (Ικανό) Έστω ότι η (2.10) είναι ακριβής Σ.Δ.Ε. Τότε, από τον ορισμό, θα υπάρχει συνάρτηση $u(x,y)$ ώστε να ισχύουν οι (2.11) και (2.12). Από την (2.12) και λαμβάνοντας υπ' όψιν μας το θεώρημα του Schwartz για τις μερικές παραγώγους, έχουμε:

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x \partial y} = \frac{\partial N(x,y)}{\partial x},$$

η οποία είναι η αποδεικτέα σχέση (2.13).
(Αναγκαίο) Έστω ότι ισχύει η (2.13). Θα πρέπει να υπολογίσουμε την συνάρτηση $u(x,y)$, έτσι ώστε να ισχύουν οι (2.12), οπότε η Σ.Δ.Ε. (2.10) να είναι

ακριβής. Από την πρώτη ισότητα της (2.12) έχουμε:

$$\frac{\partial u(x,y)}{\partial x} = M(x,y) \Rightarrow u(x,y) = \int_{x_0}^{x} M(t,y)dt + f(y) \tag{2.15}$$

Από την (2.15) και λαμβάνοντας υπ' όψιν μας ότι η συνάρτηση $M(x,y)$ είναι συνεχής ως προς x, y και την δεύτερη ισότητα της (2.12), έχουμε:

$$\frac{\partial u(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\int_{x_0}^{x} M(t,y)dt + f'(y) \Rightarrow N(x,y) = \int_{x_0}^{x} \frac{\partial M(t,y)}{\partial y}dt + f'(y) \xrightarrow{(2.13)}$$
$$\Rightarrow N(x,y) = \int_{x_0}^{x} \frac{\partial N(t,y)}{\partial t}dt + f'(y) \Rightarrow N(x,y) = N(x,y) - N(x_0,y) + f'(y) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f'(y) = N(x_0,y) \Rightarrow f(y) = \int N(x_0,y)dy \tag{2.16}$$

Την σταθερά της ολοκλήρωσης στην τελευταία ισότητα την θεωρήσαμε μηδέν, γιατί μας ενδιαφέρει να υπολογίσουμε μία συνάρτηση $f(y)$ και ως εκ τούτου μία συνάρτηση $u(x,y)$. Η (2.15) εξαιτίας της (2.16) γίνεται:

$$u(x,y) = \int_{x_0}^{x} M(t,y)dt + \int N(x_0,y)dy \tag{2.17}$$

η οποία είναι η ζητούμενη συνάρτηση, διότι μπορούμε εύκολα να διαπιστώσουμε ότι ισχύει η (2.11), άρα η Σ.Δ.Ε. (2.10) είναι ακριβής.
Επίσης από την (2.16) και λαμβάνοντας υπ' όψιν μας ότι η $u(x,y) = c$ προκύπτει ότι η ισότητα (2.14) είναι το γενικό ολοκλήρωμα της (2.10). □

Σημείωση 2.4 Αν ξεκινήσουμε από την δεύτερη ισότητα της (2.12), τότε θα καταλήξουμε στο γενικό ολοκλήρωμα $\int_{y_0}^{y} N(x,t)dt + \int M(x,y_0)dx = c$ που είναι το ίδιο με το (2.14).

Σημείωση 2.5 Το x_0 είναι αυθαίρετο, οπότε το επιλέγουμε έτσι ώστε να απλοποιεί τις πράξεις, αλλά να μην απειρίζεται η συνάρτηση $N(x_0,y)$.

Παράδειγμα 17 Να λυθεί η Σ.Δ.Ε. $2xy^3 + 3x^2y^2y' = 0$.

Λύση

Παρατηρούμε ότι

$$2xy^3 + 3x^2y^2y' = 0 \Rightarrow (x^2)'\, y^3 + x^2\,(y^2)' = 0 \Rightarrow (x^2y^3)' = 0 \Rightarrow x^2y^3 = c$$

Παράδειγμα 18 Να υπολογισθεί η σταθερά a έτσι ώστε η Σ.Δ.Ε. $(3x^2 + axy^2)\,dx + (2y - 3y^2 + 4x^2y)\,dy = 0$ να είναι ακριβής και μετά να λυθεί.

Λύση

Για να είναι ακριβής θα πρέπει:

$$\frac{\partial(3x^2 + axy^2)}{\partial y} = \frac{\partial(2y - 3y^2 + 4x^2y)}{\partial x} \Rightarrow 2axy = 8xy \Rightarrow a = 4$$

Για αυτήν την τιμή του a η δοθείσα Σ.Δ.Ε. γίνεται

$$(3x^2 + 4xy^2)\,dx + (2y - 3y^2 + 4x^2y)\,dy = 0$$

και είναι ακριβής, οπότε το γενικό της ολοκλήρωμα θα δίνεται από την ισότητα, αν $x_0 = 0$

$$\int_0^x (3t^2 + 4ty^2)dt + \int (2y - 3y^2)dy = c \Rightarrow x^3 + 2xy^2 + y^2 - y^3 = c.$$

Παράδειγμα 19 Να λυθεί η Σ.Δ.Ε. $x^2 + y + (e^y + x)\,y' = 0$.

Λύση

Η δοθείσα Σ.Δ.Ε. γράφεται:

$$(x^2 + y)\,dx + (e^y + x)\,dy = 0$$

Θέτουμε $M(x,y) = x^2 + y$ και $N(x,y) = e^y + x$ και παρατηρούμε ότι $\dfrac{\partial M(x,y)}{\partial y} = 1 = \dfrac{\partial N(x,y)}{\partial x}$. Άρα η δοθείσα Σ.Δ.Ε. είναι ακριβής και το γενικό της ολοκλήρωμα θα είναι, αν επιλέξουμε $x_0 = 0$

$$\int_0^x (t^2 + y)dt + \int e^y dy = c \Rightarrow \frac{x^3}{3} + xy + e^y = c.$$

Παράδειγμα 20 Να λυθεί η Σ.Δ.Ε. $(y^2e^{xy^2}+4x^3)dx+(2xye^{xy^2}-3y^2)dy=0$.

Λύση

Θέτουμε $M(x,y)=y^2e^{xy^2}+4x^3$ και $N(x,y)=2xye^{xy^2}-3y^2$ και παρατηρούμε ότι

$\dfrac{\partial M(x,y)}{\partial y}=2ye^{xy^2}+2xy^3e^{xy^2}=\dfrac{\partial N(x,y)}{\partial x}$. Άρα η δοθείσα Σ.Δ.Ε. είναι ακριβής και το γενικό της ολοκλήρωμα θα είναι, αν επιλέξουμε $x_0=0$

$$\int_0^x(y^2e^{ty^2}+4t^3)dt-\int 3y^2dy=c\Rightarrow e^{xy^2}-e^0+x^4-y^3=c\Rightarrow e^{xy^2}+x^4-y^3=c.$$

Παράδειγμα 21 Να λυθεί η Σ.Δ.Ε. $(2x^3+3y)dx+(3x+y-1)dy=0$.

Λύση

Θέτουμε $M(x,y)=2x^3+3y$ και $N(x,y)=3x+y-1$ και παρατηρούμε ότι

$\dfrac{\partial M(x,y)}{\partial y}=3=\dfrac{\partial N(x,y)}{\partial x}$. Άρα η δοθείσα Σ.Δ.Ε. είναι ακριβής και το γενικό της ολοκλήρωμα θα είναι, αν επιλέξουμε $x_0=0$

$$\int_0^x(2t^3+3y)dt+\int(y-1)dy=c\Rightarrow\frac{x^4}{2}+3xy+\frac{y^2}{2}-y=c.$$

2.4 Πολλαπλασιαστές Euler (ή ολοκληρώνοντες παράγοντες)

Ορισμός 2.4 Μια συνάρτηση $\mu(x,y)$ λέγεται **πολλαπλασιαστής Euler** για την Σ.Δ.Ε.

$M(x,y)dx+N(x,y)dy=0,$

αν η Σ.Δ.Ε.

$$\mu(x,y)M(x,y)dx+\mu(x,y)N(x,y)dy=0 \tag{2.18}$$

είναι ακριβής.

Αφού η (2.18) είναι ακριβής, θα ισχύει:

$$\frac{\partial(\mu(x,y)M(x,y))}{\partial y} = \frac{\partial(\mu(x,y)N(x,y))}{\partial x} \Rightarrow$$

$$\frac{\partial\mu(x,y)}{\partial y}M(x,y) + \mu(x,y)\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial\mu(x,y)}{\partial x}N(x,y) + \mu(x,y)\frac{\partial N(x,y)}{\partial x} \Rightarrow$$

$$\mu(x,y)\left[\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} - \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}\right] = \frac{\partial\mu(x,y)}{\partial x}N(x,y) - \frac{\partial\mu(x,y)}{\partial y}M(x,y) \quad (2.19)$$

Η (2.19) είναι η Μ.Δ.Ε. που ικανοποιεί η συνάρτηση $\mu(x,y)$ την οποία πρέπει να λύσουμε για να υπολογίσουμε τον πολλαπλασιαστή. Αυτό μπορούμε εύκολα να το κάνουμε, σε ορισμένες περιπτώσεις. Έτσι:

(1)Αν $\mu(x,y) = \mu(x)$, δηλαδή συνάρτηση μόνο του x , τότε από την (2.19) έχουμε:

$$\frac{\mu'(x)}{\mu(x)} = \frac{\dfrac{\partial M(x,y)}{\partial y} - \dfrac{\partial N(x,y)}{\partial x}}{N(x,y)} \quad (2.20)$$

Αφού το πρώτο μέλος της (2.20) είναι συνάρτηση μόνο του x, τότε και το δεύτερο μέλος θα είναι μια συνάρτηση του x, έστω $f(x)$. Από την (2.20), επειδή ενδιαφερόμαστε να υπολογίσουμε έναν πολλαπλασιαστή, μπορούμε να βρούμε:
$\mu(x) = e^{\int f(x)dx}$.

Άρα:

$$\text{Αν} \quad \frac{\dfrac{\partial M(x,y)}{\partial y} - \dfrac{\partial N(x,y)}{\partial x}}{N(x,y)} = f(x) \quad \text{τότε} \quad \mu(x) = e^{\int f(x)dx}. \quad (2.21)$$

Ακολουθώντας ίδια διαδικασία αποδεικνύεται ότι:

(2) Αν $$\frac{\dfrac{\partial M(x,y)}{\partial y} - \dfrac{\partial N(x,y)}{\partial x}}{-M(x,y)} = f(y) \quad \text{τότε} \quad \mu(y) = e^{\int f(y)dy}. \quad (2.22)$$

(3) Αν $\dfrac{\dfrac{\partial M(x,y)}{\partial y} - \dfrac{\partial N(x,y)}{\partial x}}{N(x,y) \mp M(x,y)} = f(x \pm y)$ τότε $\mu(x \pm y) = e^{\int f(x\pm y) d(x\pm y)}$. (2.23)

(4) Αν $\dfrac{\dfrac{\partial M(x,y)}{\partial y} - \dfrac{\partial N(x,y)}{\partial x}}{yN(x,y) - xM(x,y)} = f(xy)$ τότε $\mu(xy) = e^{\int f(xy) d(xy)}$. (2.24)

(5) Η Σ.Δ.Ε. $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ θα δέχεται πολλαπλασιαστή της μορφής $\mu(x,y) = x^n y^m$, αν μπορούμε να υπολογίσουμε τις τιμές των n, m από την ισότητα:

$$\frac{\partial(x^n y^m M(x,y))}{\partial y} = \frac{\partial(x^n y^m N(x,y))}{\partial x}$$

Θεώρημα 2.2: Οι ιδιάζουσες λύσεις της Σ.Δ.Ε. $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ περιέχονται στη σχέση:

$\dfrac{1}{\mu(x,y)} = 0$, όπου $\mu(x,y)$ είναι ένας πολ/στής Euler αυτής.

Απόδειξη. Αφού $\mu(x,y)$ είναι ένας πολ/στής Euler της δοθείσης δ.ε. έπεται ότι η Σ.Δ.Ε.

$$\mu(x,y)M(x,y)dx + \mu(x,y)N(x,y)dy = 0$$

είναι ακριβής, άρα από τον ορισμό, θα υπάρχει συνάρτηση $u(x,y)$ τέτοια ώστε:

$$\mu(x,y)M(x,y)dx + \mu(x,y)N(x,y)dy = du(x,y).$$

Όμως:

$$\frac{1}{\mu(x,y)}\Big[\mu(x,y)M(x,y)dx + \mu(x,y)N(x,y)dy\Big] = \frac{du(x,y)}{\mu(x,y)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow M(x,y)dx + N(x,y)dy = \frac{du(x,y)}{\mu(x,y)} \Rightarrow 0 = \frac{du(x,y)}{\mu(x,y)} \Rightarrow \begin{cases} du(x,y) = 0 \\ \dfrac{1}{\mu(x,y)} = 0 \end{cases}$$

Η ισότητα $du(x,y) = 0 \Rightarrow u(x,y) = c$, δίνει το γενικό ολοκλήρωμα της ακριβούς δ.ε. και η ισότητα $\dfrac{1}{\mu(x,y)} = 0$ τις ιδιάζουσες λύσεις αυτής. $\square$

Παράδειγμα 22 Να λυθεί η Σ.Δ.Ε. $\left(x^3+y^4\right)dx - xy^2\left(2y+x^2\right)dy = 0$.

Λύση

Θέτουμε $M(x,y) = x^3+y^4$ και $N(x,y) = -2xy^3 - x^3y^2$ και παρατηρούμε ότι $\dfrac{\partial M(x,y)}{\partial y} = 4y^3 \neq -2y^3 - 3x^2y^2 = \dfrac{\partial N(x,y)}{\partial x}$. Άρα η δοθείσα Σ.Δ.Ε. δεν είναι ακριβής. Όμως δέχεται πολ/στή της μορφής $\mu(x)$, διότι:

$$\frac{\dfrac{\partial M(x,y)}{\partial y} - \dfrac{\partial N(x,y)}{\partial x}}{N(x,y)} = \frac{6y^3+3x^2y^2}{-xy^2\left(2y+x^2\right)} = -\frac{3y^2\left(2y+x^2\right)}{xy^2\left(2y+x^2\right)} = -\frac{3}{x} = f(x).$$

Άρα ο πολ/στής θα είναι $\mu(x) = e^{-\int \frac{3}{x}dx} = \dfrac{1}{x^3}$ και η Σ.Δ.Ε.

$$\left(1+\frac{y^4}{x^3}\right)dx - \left(\frac{2y^3}{x^2}+y^2\right)dy = 0$$

είναι ακριβής. Οπότε επιλέγοντας $x_0 = 1$, το γενικό ολοκλήρωμα θα δίνεται από την σχέση:

$$\int_1^x \left(1+\frac{y^4}{t^3}\right)dt - \int \left(2y^3+y^2\right)dy = c \Rightarrow x - 1 - \frac{y^4}{2x^2} - \frac{y^3}{3} = c.$$

Η συνάρτηση $x=0$ είναι ιδιάζουσα λύση της αρχικής.

Παράδειγμα 23 Να λυθεί η Σ.Δ.Ε. $2xydx + \left(1-x^2-y^2\right)dy = 0$.

Λύση

Θέτουμε $M(x,y) = 2xy$ και $N(x,y) = 1-x^2-y^2$ και παρατηρούμε ότι $\dfrac{\partial M(x,y)}{\partial y} = 2x \neq -2x = \dfrac{\partial N(x,y)}{\partial x}$. Άρα η δοθείσα Σ.Δ.Ε. δεν είναι ακριβής. Όμως δέχεται πολ/στή της μορφής $\mu(y)$, διότι:

$$\frac{\dfrac{\partial M(x,y)}{\partial y} - \dfrac{\partial N(x,y)}{\partial x}}{-M(x,y)} = \frac{4x}{-2xy} = -\frac{2}{y} = f(y).$$

Άρα ο πολ/στής θα είναι $\mu(y) = e^{-\int \frac{2}{y}dy} = \dfrac{1}{y^2}$ και η Σ.Δ.Ε.

$$\frac{2x}{y}dx + \frac{1-x^2-y2}{y2}dy = 0$$

είναι ακριβής. Οπότε επιλέγοντας $x_0 = 0$, το γενικό ολοκλήρωμα θα δίνεται από την σχέση:

$$\int_0^x \frac{2t}{y}dt + \int \frac{1-y^2}{y^2}dy = c \Rightarrow \left.\frac{t^2}{y}\right|_{t=0}^{x} + \int \frac{1}{y^2}dy - \int dy = c \Rightarrow$$
$$\frac{x^2}{y} - \frac{1}{y} - y = c \Rightarrow x^2 - 1 - y^2 = cy$$

Η $y(x) = 0$ είναι ιδιάζουσα λύση της δοθείσης δ.ε.

Παράδειγμα 24 Να λυθεί η Σ.Δ.Ε. $(xy^2 + 2x^2y^3)\,dx + (x^2y - x^3y^2)\,dy = 0$.

Λύση

Θέτουμε $M(x,y) = xy^2 + 2x^2y^3$ και $N(x,y) = x^2y - x^3y^2$. Παρατηρούμε ότι: $\dfrac{\partial M(x,y)}{\partial y} = 2xy + 6x^2y^2$ και $\dfrac{\partial N(x,y)}{\partial x} = 2xy - 3x^2y^2$. Επειδή $\dfrac{\partial M(x,y)}{\partial y} \neq \dfrac{\partial N(x,y)}{\partial x}$ και

$$\frac{\dfrac{\partial M(x,y)}{\partial y} - \dfrac{\partial N(x,y)}{\partial x}}{yN(x,y) - xM(x,y)} = \frac{9x^2y^2}{-3x^3y^3} = -\frac{3}{xy} = f(xy)$$

η δοθείσα Σ.Δ.Ε. δέχεται πολ/στή $\mu(x,y) = e^{-\int \frac{3}{xy}d(xy)} = \dfrac{1}{(xy)^3}$ και έτσι η Σ.Δ.Ε.

$$\left(\frac{1}{x^2y} + \frac{2}{x}\right)dx + \left(\frac{1}{xy^2} - \frac{1}{y}\right)dy = 0$$

είναι ακριβής και επιλέγοντας $x_0 = 1$ το γενικό της ολοκλήρωμα θα είναι:

$$\int_1^x \left(\frac{1}{t^2y} + \frac{2}{t}\right)dt + \int \left(\frac{1}{y^2} - \frac{1}{y}\right)dy = c \Rightarrow -\frac{1}{xy} + \frac{1}{y} + 2ln|x| - \frac{1}{y} - ln|y| = c \Rightarrow$$
$$\Rightarrow -\frac{1}{xy} + ln\left|\frac{x^2}{y}\right| = c$$

Την δοθείσα Σ.Δ.Ε. θα την λύσουμε και με ένα διαφορετικό τρόπο, ζητώντας πολ/στή της μορφής $\mu(x,y) = x^ny^m$. Άρα η Σ.Δ.Ε.

$$(x^{n+1}y^{m+2} + 2x^{n+2}y^{m+3})\,dx + (x^{n+2}y^{m+1} - x^{n+3}y^{m+2})\,dy = 0$$

είναι ακριβής, οπότε θα ισχύει:

$$\frac{\partial\left(x^{n+1}y^{m+2}+2x^{n+2}y^{m+3}\right)}{\partial y}=\frac{\left(x^{n+2}y^{m+1}-x^{n+3}y^{m+2}\right)}{\partial x}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow (m+2)x^{n+1}y^{m+1}+2(m+3)x^{n+2}y^{m+2}=(n+2)x^{n+1}y^{m+1}-(n+3)x^{n+2}y^{m+2}$$

$$\Rightarrow\begin{cases} m+2=n+2\\ 2(m+3)=-(n+3)\end{cases}\Rightarrow\begin{cases} m=n\\ n=-3\end{cases}\Rightarrow n=m=-3$$

και η αντίστοιχη Σ.Δ.Ε. είναι:

$$\left(\frac{1}{x^2y}+\frac{2}{x}\right)dx+\left(\frac{1}{xy^2}-\frac{1}{y}\right)dy=0$$

η οποία όπως δείξαμε προηγούμενα έχει γενικό ολοκλήρωμα:

$$-\frac{1}{xy}+ln\left|\frac{x^2}{y}\right|=c$$

Παράδειγμα 25 Να λυθεί η Σ.Δ.Ε. $\left(\frac{y^2}{2}+2ye^x\right)dx+(y+e^x)\,dy=0.$

Λύση

Θέτουμε $M(x,y)=\frac{y^2}{2}+2ye^x$ και $N(x,y)=y+e^x$, οπότε: $\frac{\partial M(x,y)}{\partial y}=y+2e^x$ και $\frac{\partial N(x,y)}{\partial x}=e^x$. Η δοθείσα Σ.Δ.Ε. δεν είναι ακριβής, αφού $\frac{\partial M(x,y)}{\partial y}\neq\frac{\partial N(x,y)}{\partial x}$. Παρατηρούμε ότι: $\frac{M_y-N_x}{N}=\frac{y+e^x}{y+e^x}=1=f(x)$, άρα η Σ.Δ.Ε. δέχεται πολ/στή $\mu(x)=e^{\int dx}=e^x$, οπότε η Σ.Δ.Ε.

$$\left(\frac{y^2e^x}{2}+2ye^{2x}\right)dx+\left(ye^x+e^{2x}\right)dy=0$$

είναι ακριβής και επιλέγοντας $x_0=0$ το γενικό της ολοκλήρωμα δίνεται από την ισότητα:

$$\int_0^x\left(\frac{y^2e^t}{2}+2ye^{2t}\right)dt+\int(y+1)\,dy=c\Rightarrow$$

$$\frac{y^2}{2}\left(e^x-1\right)+y\left(e^{2x}-1\right)+\frac{y^2}{2}+y=c\Rightarrow\frac{y^2}{2}e^x+ye^{2x}=c$$

Επειδή $\dfrac{1}{\mu(x)} = e^{-x} \neq 0$, η δοθείσα Σ.Δ.Ε. δεν έχει ιδιάζουσες λύσεις.

Παράδειγμα 26 Να λυθεί η Σ.Δ.Ε.
$(2xy^4e^y + 2xy^3 + y)\,dx + (x^2y^4e^y - x^2y^2 - 3x)\,dy = 0.$

Λύση

Θέτουμε $M(x,y) = 2xy^4e^y + 2xy^3 + y$ και $N(x,y) = x^2y^4e^y - x^2y^2 - 3x$, οπότε:
$\dfrac{\partial M(x,y)}{\partial y} = 8xy^3e^y + 2xy^4e^y + 6xy^2 + 1$ και $\dfrac{\partial N(x,y)}{\partial x} = 2xy^4e^y - 2xy^2 - 3.$
Η δοθείσα Σ.Δ.Ε. δεν είναι ακριβής, αφού $\dfrac{\partial M(x,y)}{\partial y} \neq \dfrac{\partial N(x,y)}{\partial x}$.
Παρατηρούμε ότι: $\dfrac{M_y - N_x}{-M} = \dfrac{8xy^3e^y + 8xy^2 + 4}{-y\left(2xy^3e^y + 2xy^2 + 1\right)} = -\dfrac{4}{y} = f(y)$, άρα η Σ.Δ.Ε. δέχεται πολ/στή $\mu(y) = e^{-\int \frac{4}{y}dy} = \frac{1}{y^4}$, οπότε η Σ.Δ.Ε.

$$\left(2xe^y + 2x\frac{1}{y} + \frac{1}{y^3}\right)dx + \left(x^2e^y - \frac{x^2}{y^2} - \frac{3x}{y^4}\right)dy = 0$$

είναι ακριβής και για $x_0 = 0$, το γενικό της ολοκλήρωμα θα είναι:

$$\int_0^x \left(2te^y + 2t\frac{1}{y} + \frac{1}{y^3}\right)dt = c \Rightarrow x^2e^y + x^2\frac{1}{y} + x\frac{1}{y^3} = c.$$

Η $y = 0$ είναι ιδιάζουσα λύση αυτής.

Παράδειγμα 27 Να λυθεί η Σ.Δ.Ε. $x^2 + y^2 + x + xyy' = 0.$

Λύση

Η Σ.Δ.Ε. γράφεται στη μορφή $(x^2 + y^2 + x)dx + xydy = 0.$
Θέτουμε $M(x,y) = x^2 + y^2 + x$ και $N(x,y) = xy$, οπότε: $\dfrac{\partial M(x,y)}{\partial y} = 2y$ και
$\dfrac{\partial N(x,y)}{\partial x} = y.$
Η δοθείσα Σ.Δ.Ε. δεν είναι ακριβής, αφού $\dfrac{\partial M(x,y)}{\partial y} \neq \dfrac{\partial N(x,y)}{\partial x}$.
Παρατηρούμε ότι: $\dfrac{M_y - N_x}{N} = \dfrac{y}{xy} = \dfrac{1}{x} = f(x)$, άρα η Σ.Δ.Ε. δέχεται πολ/στή

$\mu(x) = e^{\int \frac{dx}{x}} = x$, οπότε η Σ.Δ.Ε.
$(x^3 + xy^2 + x^2)dx + x^2ydy = 0$ είναι ακριβής και για $x_0 = 0$, το γενικό της ολοκλήρωμα θα είναι:
$$\int_0^x (t^3 + ty^2 + t^2)dt = c \Rightarrow \frac{x^4}{4} + \frac{x^2y^2}{2} + \frac{x^3}{3} = c \Rightarrow x^2(3x^2 + 6y^2 + 4x) = c$$

Παράδειγμα 28 Να λυθεί η Σ.Δ.Ε. $(xsiny - 1)dy + cosydx = 0$.

Λύση

Θέτουμε $M(x,y) = cosy$ και $N(x,y) = xsiny - 1$, οπότε: $\dfrac{\partial M(x,y)}{\partial y} = -siny$ και $\dfrac{\partial N(x,y)}{\partial x} = siny$.
Η δοθείσα Σ.Δ.Ε. δεν είναι ακριβής, αφού $\dfrac{\partial M(x,y)}{\partial y} \neq \dfrac{\partial N(x,y)}{\partial x}$.
Παρατηρούμε ότι:$\dfrac{M_y - N_x}{-M} = \dfrac{-2siny}{-cosy} = 2tany = f(y)$, άρα η Σ.Δ.Ε. δέχεται πολ/στή $\mu(y) = e^{2\int tanydy} = e^{2\int \frac{siny}{cosy}dy} = e^{-2ln|cosy|} = \dfrac{1}{cos^2y}$, οπότε η Σ.Δ.Ε.
$\left(\dfrac{xsiny}{cos^2y} - \dfrac{1}{cos^2y}\right)dy + \dfrac{1}{cosy}dx = 0$ είναι ακριβής και για $x_0 = 0$, το γενικό της ολοκλήρωμα θα είναι:
$$\int_0^x \frac{1}{cosy}dt - \int \frac{1}{cos^2y}dy = c \Rightarrow \frac{x}{cosy} - tany = c \Rightarrow \frac{x - siny}{cosy} = c.$$

Παράδειγμα 29 Να λυθεί η Σ.Δ.Ε. $(4xy^2 + 6y)dx + (5x^2y + 8x)dy = 0$.

Λύση

Θέτουμε $M(x,y) = 4xy^2 + 6y$ και $N(x,y) = 5x^2y + 8x$, οπότε: $\dfrac{\partial M(x,y)}{\partial y} = 8xy + 6$ και $\dfrac{\partial N(x,y)}{\partial x} = 10xy + 8$.
Η δοθείσα Σ.Δ.Ε. δεν είναι ακριβής, αφού $\dfrac{\partial M(x,y)}{\partial y} \neq \dfrac{\partial N(x,y)}{\partial x}$.

Την δοθείσα Σ.Δ.Ε. θα την λύσουμε ζητώντας πολ/στή της μορφής $\mu(x,y) = x^my^n$. Άρα η Σ.Δ.Ε.
$(4x^{m+1}y^{n+2} + 6x^my^{n+1})dx + (5x^{m+2}y^{n+1} + 8x^{m+1}y^n)dy = 0$

είναι ακριβής, οπότε θα ισχύει:

$$\frac{\partial(4x^{m+1}y^{n+2}+6x^m y^{n+1})}{\partial y}=\frac{\partial(5x^{m+2}y^{n+1}+8x^{m+1}y^n)}{\partial x}\Rightarrow$$
$$4(n+2)x^{m+1}y^{n+1}+6(n+1)x^m y^n=5(m+2)x^{m+1}y^{n+1}+8(m+1)x^m y^n$$

$$\Rightarrow \begin{cases}4(n+2)=5(m+2)\\6(n+1)=8(m+1)\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}4n+8=5m+10\\6n+6=8m+8\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}4n=5m+2\\6n=8m+2\end{cases}$$
$$\Rightarrow \frac{5m+2}{4}=\frac{8m+2}{6}\Rightarrow 15m+6=16m+4\Rightarrow m=2, n=\frac{12}{4}=3$$

οπότε $\mu(x,y)=x^2y^3$, και η αντίστοιχη Σ.Δ.Ε. είναι:

$(4x^3y^5+6x^2y^4)dx+(5x^4y^4+8x^3y^3)dy=0$ η οποία έχει γενικό ολοκλήρωμα:

$$\int_0^x (4t^3y^5+6t^2y^4)dt=c\Rightarrow x^4y^5+2x^3y^4=c.$$

Ελληνική βιβλιογραφία

[1] Γ. Δάσιος, Συνήθεις Διαφορικές Εξισώσεις, Πάτρα, 1985

[2] Θ. Κυβεντίδης, Διαφορικές εξισώσεις, Εκδόσεις Ζήτη, Θεσ/κη, 1993

[3] Β. Μπαρμπάνης, Μαθήματα Διαφορικών Εξισώσεων, Πάτρα, 1976

[4] Π. Σιαφαρίκας, Εφαρμογές των Σ.Δ.Ε., Τόμος Ι, Πάτρα, 2002

[5] Ν. Σταυρακάκης, ΣΔΕ : γραμμική και μη γραμμική θεωρία από τη φύση και τη ζωή, Παπασωτηρίου, Αθήνα, 1997

Ξενόγλωσση βιβλιογραφία

[1] W. E. Boyce, R. C. Di Prima, Elementary differential equations and boundary value problems, N. Y. John Wiley & Sons, 1977

[2] M. Braun, Differential equations and their Applications, Springer-Verlag, 1993

[3] Abell and Braselton, Modern Differential equations, Theory, Application, Technology, Saunders College Publishing, 1996

[4] B. Rai and D. P. Choudhury, Ordinary Differential Equations, An introduction, Alpha Science, International Ltd, 2005

[5] Rice and Strange, Ordinary Differential Equations with Application, Brooks/Cole Publishing Company, 1996