Τίτλος Μαθήματος: Συνήθεις Διαφορικές Εξισώσεις Ι

Ενότητα: Μη γραμμικές Σ.Δ.Ε. τάξης μεγαλύτερης της πρώτης

Όνομα Καθηγητή: Χρυσή Κοκολογιαννάκη

Τμήμα: Μαθηματικών

Άδειες Χρήσης

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Πατρών**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο

ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ

ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

5 Μη γραμμικές Σ.Δ.Ε. τάξης μεγαλύτερης ή ίσης του δύο

Η γενική λύση των μη γραμμικών Σ.Δ.Ε. τάξης μεγαλύτερης ή ίσης του δύο, δεν μπορεί πάντα να βρεθεί αναλυτικά. (Αυτό όπως είδαμε, ισχύει και για γραμμικές Σ.Δ.Ε. ακόμα και δεύτερης τάξης). Υπάρχουν όμως μερικές περιπτώσεις τις οποίες μπορούμε να αντιμετωπίσουμε. Αυτές είναι οι παρακάτω:

5.1 Σ.Δ.Ε. της μορφής $F(x, y^{(k)}(x), ..., y^{(n)}(x)) = 0$

Παρατηρούμε ότι λείπει η $y(x)$ και οι παράγωγοι αυτής μέχρι $k-1$ τάξη. Θέτουμε $y^{(k)}(x) = z(x)$, οπότε $y^{(k+1)}(x) = z'(x), ..., y^{(n)}(x) = z^{(n-k)}(x)$, οπότε η δοθείσα Σ.Δ.Ε. από $n-$στής τάξης ως προς $y(x)$, γίνεται $n-k$ τάξης ως προς $z(x)$, την οποία λύνουμε και μετά με n διαδοχικές ολοκληρώσεις βρίσκουμε την $y(x)$.

Παράδειγμα 1 Να λυθεί η Σ.Δ.Ε. $(1+x^2)\dfrac{d^2y}{dx^2} + \left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2 + 1 = 0$

Λύση
Παρατηρούμε ότι λείπει η $y(x)$, οπότε θέτουμε: $y'(x) = z(x)$ και $y''(x) = z'(x)$ και η δοθείσα Σ.Δ.Ε. θα γίνει:

$$(1+x^2)\frac{d^2y}{dx^2} + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 1 = 0 \Rightarrow (1+x^2)z'(x) + z^2 + 1 = 0 \Rightarrow$$
$$\frac{dz}{z^2+1} + \frac{dx}{x^2+1} = 0 \Rightarrow tan^{-1}z + tan^{-1}x = c.$$

Παίρνοντας την εφαπτομένη και στα δύο μέλη της ισότητας προκύπτει:

$\dfrac{x+z}{1-xz} = c \Rightarrow z = \dfrac{c-x}{1+cx}$ ή $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{c-x}{1+cx}$, που είναι χωριζομένων μεταβλητών και η λύση της είναι $y = \displaystyle\int \left[-\frac{1}{c} + \frac{c^2+1}{c(1+cx)}\right]dx + c_1 \Rightarrow$

$$y = -\frac{x}{c} + \frac{c^2+1}{c^2}ln|1+cx| + c_1$$

Παράδειγμα 2 Να λυθεί η Σ.Δ.Ε. $y^{(4)}(x) - (cotx)y'''(x) = 0$

Λύση
Παρατηρούμε ότι λείπουν οι $y(x), y'(x), y''(x)$, οπότε θέτουμε:

$y'''(x) = z(x)$ και $y^{(4)}(x) = z'(x)$ και η δοθείσα Σ.Δ.Ε. θα γίνει:

$y^{(4)}(x) - (cotx)y'''(x) = 0 \Rightarrow z'(x) - (cotx)z(x) = 0 \Rightarrow \dfrac{dz}{z} = cotxdx \Rightarrow$
$z(x) = c_1 e^{lnsinx} \Rightarrow z(x) = c_1 sinx$. Άρα: $y'''(x) = c_1 sinx$.
Ολοκληρώνουμε διαδοχικά τρεις φορές ως προς x, οπότε:
$y''(x) = -c_1 cosx + c_2, y'(x) = -c_1 sinx + c_2 x + c_3,$
$y(x) = c_1 cosx + \dfrac{c_2 x^2}{2} + c_3 x + c_4.$

Παράδειγμα 3 Να λυθεί η Σ.Δ.Ε. $(1 + x^2)y'' + (y')^2 + 1 = 0$

Λύση
Παρατηρούμε ότι λείπει η $y(x)$ οπότε θέτουμε:

$y'(x) = z(x)$ και $y''(x) = z'(x)$ και η δοθείσα Σ.Δ.Ε. θα γίνει:

$(1 + x^2)z'(x) + z^2(x) + 1 = 0 \Rightarrow (1 + x^2)\dfrac{dz}{dx} = -z^2 - 1 \Rightarrow \dfrac{dz}{z^2 + 1} = -\dfrac{dx}{x^2 + 1}$
η οποία είναι χωριζομένων μεταβλητών, οπότε ολοκληρώνοντας:
$\displaystyle\int \frac{dz}{z^2 + 1} = -\int \frac{dx}{x^2 + 1} + c \Rightarrow arctanz + arctanx = c \Rightarrow$

$tan[arctanz + arctanx] = tanc \Rightarrow \dfrac{tan(arctanz) + tan(arctanx)}{1 - tan(arctanz)tan(arctanx)} = c_1 \Rightarrow$

$\dfrac{z + x}{1 - zx} = c_1 \Rightarrow \dfrac{y' + x}{1 - y'x} = c_1 \Rightarrow y'(x) = \dfrac{c_1 - x}{1 + c_1 x}$

οπότε ολοκληρώνοντας, η γενική λύση θα είναι:

$$y(x) = \int \frac{c_1 - x}{1 + c_1 x}dx + c_2 = \int \frac{c_1}{1 + c_1 x}dx - \int \frac{x}{1 + c_1 x}dx + c_2 =$$
$$= ln|c_1 x + 1| - \frac{1}{c_1}\int \frac{x}{\frac{1}{c_1} + x}dx = ln|c_1 x + 1| - \frac{1}{c_1}\int \frac{x + \frac{1}{c_1} - \frac{1}{c_1}}{x + \frac{1}{c_1}}dx + c_2 =$$
$$= ln|c_1 x + 1| - \frac{1}{c_1}x + \frac{1}{c_1^2}ln|c_1 x + 1| = \frac{c_1^2 + 1}{c_1^2}ln|c_1 x + 1| - \frac{1}{c_1}x + c_2$$

5.2 Σ.Δ.Ε. της μορφής $F(y(x), y'(x), ..., y^{(n)}(x)) = 0$

Παρατηρούμε ότι λείπει η x, οπότε θέτουμε:

$$y'(x) = \frac{dy}{dx} = p$$
$$y''(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy}\frac{dy}{dx} = p\frac{dp}{dy}$$
$$y'''(x) = \frac{d}{dx}\left(p\frac{dp}{dy}\right) = \frac{d}{dy}\left(p\frac{dp}{dy}\right)\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dy}\left(p\frac{dp}{dy}\right)p = p\left(\frac{dp}{dy}\right)^2 + p^2\frac{d^2p}{dy^2}$$

Και συνεχίζοντας με τον ίδιο τρόπο ελαττώνουμε την τάξη της προκύπτουσας Σ.Δ.Ε. κατά μία μονάδα.

Παράδειγμα 4 Να λυθεί η Σ.Δ.Ε. $yy'' - (y')^2 + y' = 0$

Λύση

Επειδή λείπει η x θέτουμε

$$y'(x) = \frac{dy}{dx} = p$$
$$y''(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy}\frac{dy}{dx} = p\frac{dp}{dy}$$

Οπότε η δοθείσα Σ.Δ.Ε. γίνεται:

$$yp\frac{dp}{dy} - p^2 + p = 0 \Rightarrow p\left[y\frac{dp}{dy} - p + 1\right] = 0$$

Άρα: $p = 0 \Rightarrow y = c$ ή

$$y\frac{dp}{dy} - p + 1 = 0 \Rightarrow \frac{dp}{1-p} + \frac{dy}{y} = 0 \Rightarrow -ln|1-p| + ln|y| = 0 \Rightarrow$$
$$ln\left|\frac{y}{1-p}\right| = c \Rightarrow p = 1 - \frac{y}{c} \Rightarrow y' + \frac{y}{c} = 1.$$

Είναι γραμμική πρώτης τάξης, οπότε:

$$\left(e^{\frac{x}{c}}y\right)' = e^{\frac{x}{c}} \Rightarrow e^{\frac{x}{c}}y = \int e^{\frac{x}{c}}dx + c_1 \Rightarrow e^{\frac{x}{c}}y = ce^{\frac{x}{c}} + c_1 \Rightarrow y = c + c_1e^{-\frac{x}{c}}.$$

Παράδειγμα 5 Να λυθεί το Π.Α.Τ. $y^3y'' = -1, y(1) = 1, y'(1) = 0.$

Λύση

Επειδή λείπει η x θέτουμε

$$y'(x) = \frac{dy}{dx} = p$$

$$y''(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy}\frac{dy}{dx} = p\frac{dp}{dy}$$

Οπότε η δοθείσα Σ.Δ.Ε. γίνεται:

$$y^3y'' = -1 \Rightarrow y^3p\frac{dp}{dy} = -1 \Rightarrow pdp = -\frac{dy}{y^3} \Rightarrow \frac{p^2}{2} = \frac{1}{2y^2} + c_1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow p^2 = \frac{1}{y^2} + c_1 \underset{p=0}{\overset{y=1}{\Longrightarrow}} p^2 = \frac{1}{y^2} - 1 \Rightarrow y' = \pm\frac{\sqrt{1-y^2}}{y}.$$

Είναι χωριζομένων μεταβλητών, οπότε: $\dfrac{y}{\sqrt{1-y^2}}dy = \pm dx \Rightarrow$

$$\Rightarrow -\sqrt{1-y^2} = \pm x + c_2 \Rightarrow \sqrt{1-y^2} = \pm x + c_2 \underset{y=1}{\overset{x=1}{\Longrightarrow}} \sqrt{1-y^2} = \pm x \mp 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 = 2x$$

Παράδειγμα 6 Να λυθεί η Σ.Δ.Ε. $yy'' = (y')^2$

Λύση

Επειδή λείπει η x θέτουμε

$$y'(x) = \frac{dy}{dx} = p$$

$$y''(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy}\frac{dy}{dx} = p\frac{dp}{dy}$$

Οπότε η δοθείσα Σ.Δ.Ε. γίνεται:

$$yp\frac{dp}{dy} = p^2 \Rightarrow p\left[p - y\frac{dp}{dy}\right] = 0$$

Άρα: $p = 0 \Rightarrow y = c$ ή

$$p - y\frac{dp}{dy} = 0 \Rightarrow p = y\frac{dp}{dy} \Rightarrow \frac{dp}{p} = \frac{dy}{y}$$

η οποία είναι χωριζομένων μεταβλητών, οπότε ολοκληρώνοντας θα έχουμε:

$$\int\frac{dp}{p} = \int\frac{dy}{y} + c \Rightarrow ln|p| = ln|y| + c \Rightarrow ln\left|\frac{p}{y}\right| = c \Rightarrow p = c_1y \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = c_1y \Rightarrow \frac{dy}{y} = c_1dx$$

η οποία είναι χωριζομένων μεταβλητών, οπότε ολοκληρώνοντας η γενική λύση θα είναι:

$ln|y| = c_1 x + c \Rightarrow y(x) = e^{c_1 x + c} \Rightarrow y(x) = c_2 e^{c_1 x}$

Παράδειγμα 7 Να λυθεί η Σ.Δ.Ε. $y'' = e^{2y},\ y(0) = 0, y'(0) = 1$.

Λύση
Επειδή λείπει η x θέτουμε

$$y'(x) = \frac{dy}{dx} = p$$
$$y''(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy}\frac{dy}{dx} = p\frac{dp}{dy}$$

Οπότε η δοθείσα Σ.Δ.Ε. γίνεται:

$$p\frac{dp}{dy} = e^{2y} \Rightarrow pdp = e^{2y}dy$$

η οποία είναι χωριζομένων μεταβλητών, οπότε ολοκληρώνοντας θα έχουμε:

$$\frac{p^2}{2} = \frac{e^{2y}}{2} + c_1 \Rightarrow p^2 = e^{2y} + c$$

Όμως, $y' = 1$ και $y = 0$ οπότε κάνοντας αντικατάσταση προκύπτει $c = 0$.

Άρα: $p^2 = e^{2y} \Rightarrow p = \pm e^y \Rightarrow y' = \pm e^y \Rightarrow e^{-y}dy = \pm dx$

η οποία είναι χωριζομένων μεταβλητών, οπότε ολοκληρώνοντας:

$$-e^{-y} = \pm x + c \Rightarrow e^{-y} = \mp x + c$$

Όμως, για $x = 0$, $y = 0 \Rightarrow c = 1$ και η λύση του Π.Α.Τ. θα είναι:

$$e^{-y} = \mp x + 1$$

5.3 Σ.Δ.Ε. ομογενείς ως προς $y, y', ..., y^{(n)}$

Η Σ.Δ.Ε. $F(x, y, y', ..., y^{(n)}) = 0$ λέγεται ομογενής βαθμού k, ως προς $y, y', ..., y^{(n)}$, αν ισχύει: $F(x, \lambda y, \lambda y', ..., \lambda y^{(n)}) = \lambda^k F(x, y, y', ..., y^{(n)})$.

Για να την λύσουμε, θέτουμε:

$$y(x) = e^{\int u(x)dx} \Rightarrow y'(x) = u(x)y(x) \Rightarrow y''(x) = uy' + u'y \Rightarrow$$
$$y''(x) = u^2y + u'y...$$

οπότε συνεχίζοντας, υποβιβάζουμε την τάξη της δοθείσας Σ.Δ.Ε. κατά μία μονάδα.

Παράδειγμα 8 Να λυθεί η Σ.Δ.Ε. $x^2yy'' - (y - xy')^2 = 0$.

Λύση
Η δοθείσα Σ.Δ.Ε. είναι ομογενής βαθμού 2, ως προς y, y', y'', διότι:

$$x^2\lambda y\lambda y'' - (\lambda y - x\lambda y')^2 = \lambda^2\left(x^2yy'' - (y - xy')^2\right).$$

Θέτουμε:

$$y(x) = e^{\int u(x)dx} \Rightarrow y'(x) = u(x)y(x), y''(x) = uy' + u'y \Rightarrow$$
$$y''(x) = u^2y + u'y$$

οπότε η δοθείσα Σ.Δ.Ε. γίνεται:

$$x^2yy'' - (y - xy')^2 = 0 \Rightarrow x^2y(u^2 + u')y - (y - xyu)^2 = 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x^2(u^2 + u') - (1 - xu)^2 = 0 \Rightarrow x^2u' + 2xu = 1$$

γραμμική πρώτης τάξης ως προς $u(x)$. Άρα:

$$(x^2u)' = 1 \Rightarrow x^2u = x + c \Rightarrow u = \frac{1}{x} + \frac{c}{x^2}.$$

Άρα: $y = e^{\int(\frac{1}{x}+\frac{c}{x^2})dx + c_1} \Rightarrow y = c_1xe^{-\frac{c}{x}}$

Παράδειγμα 9 Να λυθεί η Σ.Δ.Ε. $\left[2yy'' - (y')^2\right]x^2 + y^2 = 0$.

Λύση
Η δοθείσα Σ.Δ.Ε. είναι ομογενής βαθμού 2, ως προς y, y', y'', διότι:

$$\left[2\lambda y\lambda y'' - (\lambda y')^2\right]x^2 + (\lambda y)^2 = \lambda^2\left[2yy'' - (y')^2\right]x^2 + y^2.$$

Θέτουμε:

$$y(x) = e^{\int u(x)dx} \Rightarrow y'(x) = u(x)y(x), y''(x) = uy' + u'y \Rightarrow$$
$$y''(x) = u^2y + u'y$$

οπότε η δοθείσα Σ.Δ.Ε. γίνεται:

$$2(u' + u^2)x^2 - u^2x^2 + 1 = 0 \Rightarrow u' + \frac{1}{2}u^2 + \frac{1}{2x^2} = 0$$

η οποία είναι Riccati ως προς $u(x)$ με μερική λύση $u_1(x) = \frac{1}{x}$.

Θέτουμε $u = \frac{1}{x} + w, u' = -\frac{1}{x^2} + w'$ οπότε κάνοντας αντικατάσταση στη Riccati έχουμε:

$$-\frac{1}{x^2} + w' + \frac{1}{2}\frac{1}{x^2} + \frac{w^2}{2} + \frac{2w}{2x} + \frac{1}{x^2} = 0 \Rightarrow$$

$w' + \frac{1}{x}w = -\frac{w^2}{2}$ (δ.ε. Bernoulli)$\Rightarrow w^{-2}w' + \frac{1}{x}w^{-1} = -\frac{1}{2} \xRightarrow{w^{-1}=v}$

$v' - \frac{1}{x}v = \frac{1}{2}$ η οποία είναι γραμμική 1ης τάξης ως προς $v(x)$ οπότε:

$$\left(\frac{1}{x}v\right)' = \frac{1}{2x} \Rightarrow \frac{1}{x}v = \frac{ln|x|}{2} + c_1 \Rightarrow v(x) = \frac{xln|x|}{2} + c_1x \Rightarrow$$

$$w^{-1} = \frac{xln|x|}{2} + c_1x \Rightarrow w = \frac{2}{xln|x| + 2c_1x} \Rightarrow u = \frac{2}{xln|x| + 2c_1x} + \frac{1}{x} \Rightarrow$$

$$u = \frac{1}{x}\left[\frac{2}{ln|x| + 2c_1} + 1\right]$$

Όμως, $y(x) = e^{\int u(x)dx}$ οπότε υπολογίζω το ολοκλήρωμα

$\int \frac{1}{x}\left[\frac{2}{ln|x| + 2c_1} + 1\right]dx$ θέτοντας $z = ln|x| + 2c_1$, $dz = \frac{1}{x}dx$ έτσι το ολοκλήρωμα γίνεται:

$$\int \left(\frac{2}{z} + 1\right)dz = 2ln|z| + z$$

Άρα: $y(x) = e^{2ln|ln|x|+2c_1|+ln|x|+2c_1} = e^{2c_1}(ln|x| + 2c_1)^2|x|$

Παράδειγμα 10 Να λυθεί η Σ.Δ.Ε. $x\left[yy'' + (y')^2\right] - yy' = 0.$

Λύση

Η δοθείσα Σ.Δ.Ε. είναι ομογενής βαθμού 2, ως προς y, y', y'', διότι:

$$x\left[\lambda y\lambda y'' + (\lambda y')^2\right] - \lambda y\lambda y' = \lambda^2 x\left[yy'' + (y')^2\right] - yy'.$$

Θέτουμε:

$y(x) = e^{\int u(x)dx} \Rightarrow y'(x) = u(x)y(x), y''(x) = uy' + u'y \Rightarrow$
$y''(x) = u^2 y + u'y$

οπότε η δοθείσα Σ.Δ.Ε. γίνεται:

$$x(y(u'y + u^2 y) + u^2 y^2) - yuy = 0 \Rightarrow xu' + 2xu^2 - u = 0 \Rightarrow u' - \frac{1}{x}u = -2u^2$$

η οποία είναι Bernoulli ως προς $u(x)$. Πολλαπλασιάζουμε με u^{-2} έτσι:

$$u'u^{-2} - \frac{1}{x}u^{-1} = -2$$

Θέτουμε $z = u^{-1}, z' = -u^2 u'$ οπότε κάνοντας αντικατάσταση έχουμε:

$$z' + \frac{1}{x}z = 2$$

η οποία ειναι γραμμική 1ης τάξης ως προς $z(x)$, η λύση της οποίας είναι:

$$z = x - \frac{c_1}{x}$$

Όμως, $u^{-1} = z \Rightarrow u^{-1} = x - \dfrac{c_1}{x} \Rightarrow u = \dfrac{x}{x^2 + c_1}$

Τέλος, $y(x) = e^{\int u(x)dx}$, επομένως $y(x) = e^{\int \frac{x}{x^2+c_1}dx + c} = c_2\sqrt{x^2 + c_1}$

5.4 Σ.Δ.Ε. ακριβείς ανώτερης τάξης

Η Σ.Δ.Ε. $F(x, y, y', ..., y^{(n)}) = 0$ λέγεται ακριβής, όταν υπάρχει συνάρτηση $G(x, y, y', ..., y^{(n-1)}, c) = 0$, τέτοια ώστε:

$F(x, y, y', ..., y^{(n)}) = 0 \Rightarrow d[G(x, y, y', ..., y^{(n-1)})] = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow G(x, y, y', ..., y^{(n-1)}) = c_1$

και έτσι υποβιβάζεται η τάξη της δοθείσας Σ.Δ.Ε. κατά μια μονάδα.

Παράδειγμα 11 Να λυθεί η Σ.Δ.Ε. $x^3 y'' + 6x^2 y' + 6xy = 0$

Λύση

Παρατηρούμε ότι η δοθείσα Σ.Δ.Ε. γράφεται:

$x^3y'' + 6x^2y' + 6xy = 0 \Rightarrow x^3y'' + 3x^2y' + 3x^2y' + 6xy = 0 \Rightarrow$
$(x^3y')' + (3x^2y)' = 0 \Rightarrow (x^3y' + 3x^2y)' = 0 \Rightarrow x^3y' + 3x^2y = c_1$. Ομοίως:
$(x^3y)' = c_1 \Rightarrow x^3y = c_1x + c_2 \Rightarrow y = c_1x^{-2} + c_2x^{-3}$

Παράδειγμα 12 Να λυθεί η Σ.Δ.Ε. $(1 + x^2)y'' + 2xy' = \dfrac{2}{x^3}$

Λύση
Παρατηρούμε ότι η δοθείσα Σ.Δ.Ε. γράφεται:

$$\Big[(1+x^2)y'\Big]' = \frac{2}{x^3} \Rightarrow (1+x^2)y' = -\frac{1}{x^2} + c_1 \Rightarrow y' = -\frac{1}{x^2(1+x^2)} + \frac{c_1}{1+x^2} \Rightarrow$$
$$y(x) = \int\Big(-\frac{1}{x^2} + \frac{c_1+1}{x^2+1}\Big)dx + c_2 = c_2 - \frac{1}{x} + (c_1+1)tan^{-1}x$$

Παράδειγμα 13 Να λυθεί η Σ.Δ.Ε. $(x^2+2y')y''+2xy' = 0,\ \ y(0) = 1, y'(0) = 0.$

Λύση
Παρατηρούμε ότι η δοθείσα Σ.Δ.Ε. γράφεται:

$$x^2y'' + 2xy' + 2y'y'' = 0 \Rightarrow (x^2y')' + [(y')^2]' = 0 \Rightarrow [x^2y' + (y')^2]' = 0 \Rightarrow$$

$$x^2y' + (y')^2 = c_1 \xRightarrow{y'(0)=0} c_1 = 0$$

Άρα: $x^2y' + (y')^2 = 0$

Παράδειγμα 14 Να βρεθεί η γενική λύση της Σ.Δ.Ε.$xy''' + y'' = 1 + x$

Λύση

Παρατηρούμε ότι η δοθείσα Σ.Δ.Ε. είναι ακριβής διότι γράφεται $(xy'')' = 1+x$, άρα $xy'' = \displaystyle\int(1 + x)dx + c_1 \Rightarrow xy'' = x + \frac{x^2}{2} + c_1 \Rightarrow y'' = 1 + \frac{x}{2} + \frac{c_1}{x}$.
Μετά από δύο διαδοχικές ολοκληρώσεις προκύπτει
$y'(x) = x + \dfrac{x^2}{4} + c_1lnx + c_2$ και
$y(x) = \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{12} + c_1(xlnx - x) + c_2x + c_3$

5.5 Χρήση κατάλληλου μετασχηματισμού

Κάθε φορά ο κατάλληλος μετασχηματισμός υποδεικνύεται από την μορφή της δοθείσης Σ.Δ.Ε.

Παράδειγμα 15 Να λυθεί η Σ.Δ.Ε. $x^3y'' = (y - xy')^2$

Λύση

Παρατηρούμε ότι αν θέσουμε:

$$y - xy' = u(x) \tag{5.1}$$

και παραγωγίσουμε ως προς x, τότε:

$$y' - y' - xy'' = u' \Rightarrow xy'' = -u' \tag{5.2}$$

Εξ αιτίας των (5.1) και (5.2) η δοθείσα Σ.Δ.Ε. γίνεται:

$x^3y'' = (y - xy')^2 \Rightarrow -x^2u' = u^2$, η οποία είναι χωριζομένων μεταβλητών ως προς $u(x)$, άρα: $-\dfrac{du}{u^2} = \dfrac{dx}{x^2} \Rightarrow \dfrac{1}{u} = -\dfrac{1}{x} + c \Rightarrow u = -\dfrac{x}{1+cx}$.

Η (5.1) θα πάρει την μορφή:

$y - xy' = -\dfrac{x}{1+cx} \Rightarrow y' - \dfrac{1}{x}y = \dfrac{1}{1+cx}$,

που είναι γραμμική πρώτης τάξης, άρα: $\left(\dfrac{y}{x}\right)' = \dfrac{1}{x(1+cx)} \Rightarrow$

$\Rightarrow \dfrac{y}{x} = \displaystyle\int \dfrac{1}{x(1+cx)}dx + c_1 \Rightarrow y = x\left[c_1 + x\int\left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{c}{1+cx}\right)dx\right] \Rightarrow$

$y = x[c_1 + ln|x| - ln|1+cx|] \Rightarrow y = x\left[c_1 + ln\left|\dfrac{x}{1+cx}\right|\right]$.

Ελληνική βιβλιογραφία

[1] Γ. Δάσιος, Συνήθεις Διαφορικές Εξισώσεις, Πάτρα, 1985

[2] Θ. Κυβεντίδης, Διαφορικές εξισώσεις, Εκδόσεις Ζήτη, Θεσ/κη, 1993

[3] Β. Μπαρμπάνης, Μαθήματα Διαφορικών Εξισώσεων, Πάτρα, 1976

[4] Π. Σιαφαρίκας, Εφαρμογές των Σ.Δ.Ε., Τόμος Ι, Πάτρα, 2002

[5] Ν. Σταυρακάκης, ΣΔΕ : γραμμική και μη γραμμική θεωρία από τη φύση και τη ζωή, Παπασωτηρίου, Αθήνα, 1997

Ξενόγλωσση βιβλιογραφία

[1] W. E. Boyce, R. C. Di Prima, Elementary differential equations and boundary value problems, N. Y. John Wiley & Sons, 1977

[2] M. Braun, Differential equations and their Applications, Springer-Verlag, 1993

[3] Abell and Braselton, Modern Differential equations, Theory, Application, Technology, Saunders College Publishing, 1996

[4] B. Rai and D. P. Choudhury, Ordinary Differential Equations, An introduction, Alpha Science, International Ltd, 2005

[5] Rice and Strange, Ordinary Differential Equations with Application, Brooks/Cole Publishing Company, 1996