# Τίτλος Μαθήματος: Συνήθεις Διαφορικές Εξισώσεις I

**Ενότητα: Τεχνικές επίλυσης γραμμικών Σ.Δ.Ε. 2ης τάξης με μη σταθερούς συντελεστές**

Όνομα Καθηγητή: Χρυσή Κοκολογιαννάκη

Τμήμα: Μαθηματικών

# Άδειες Χρήσης



# Χρηματοδότηση


- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Πατρών**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο

ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ

ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

### 4.4.3 Γραμμικές Σ.Δ.Ε. 2ης τάξης, με μη σταθερούς συντελεστές.

Έστω η Σ.Δ.Ε. της μορφής:

$$y''(x) + p(x)y'(x) + q(x)y(x) = f(x) \tag{4.28}$$

όπου $p(x), q(x)$ και $f(x)$ είναι πραγματικές συνεχείς συναρτήσεις στο διάστημα $(a, b)$. Η λύση της Σ.Δ.Ε. (4.28) δεν είναι πάντα εύκολο να βρεθεί με αναλυτικό τρόπο. Σε ορισμένες όμως περιπτώσεις μπορούμε να την ανάγουμε σε γνωστές μορφές και να βρούμε την λύση της αναλυτικά.

**(α)** Αν από το πρώτο μέλος της (4.28) απουσιάζει η $y(x)$, τότε θέτουμε $y'(x) = u(x)$ οπότε $y''(x) = u'(x)$ και η δοθείσα Σ.Δ.Ε. μετατρέπεται σε γραμμική πρώτης τάξης την οποία μπορούμε πάντα να λύσουμε.

***Παράδειγμα 29*** Να βρεθεί η γενική λύση της Σ.Δ.Ε.
$x^3y''(x) - x(x+2)y'(x) = e^{-\frac{2}{x}}$, αν $y(1) = \dfrac{e^{-2}}{4}$ και $y'(1) = -\dfrac{e^{-2}}{3}$.

**Λύση**

Παρατηρούμε ότι στην δοθείσα Σ.Δ.Ε. λείπει η $y(x)$, οπότε θέτουμε $y'(x) = u(x)$ και $y''(x) = u'(x)$ και η δοθείσα Σ.Δ.Ε. παίρνει τη μορφή:

$$x^3u'(x) - x(x+2)u(x) = e^{-\frac{2}{x}} \Rightarrow u'(x) - \frac{x(x+2)}{x^3}u(x) = \frac{e^{-\frac{2}{x}}}{x^3} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow u'(x) - \left(\frac{1}{x} + \frac{2}{x^2}\right)u(x) = \frac{e^{-\frac{2}{x}}}{x^3} \xRightarrow{\mu(x)=\frac{e^{\frac{2}{x}}}{x}} \left(e^{\frac{2}{x}}u(x)\right)' = \frac{1}{x^4} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow e^{\frac{2}{x}}u(x) = -\frac{1}{3x^3} + c \xRightarrow[c=0]{u(1)=-\frac{e^{-2}}{3}} u(x) = -\frac{1}{3x^3}e^{-\frac{2}{x}} \xRightarrow{u(x)=y'(x)}$$
$$\Rightarrow y(x) = -\int \frac{1}{3x^3}e^{-\frac{2}{x}}dx + c \Rightarrow y(x) = \frac{1}{2x}e^{-\frac{2}{x}} + \frac{1}{4}e^{-\frac{2}{x}} + c \Rightarrow$$
$$\xRightarrow[c=-\frac{e^{-2}}{2}]{y(1)=\frac{e^{-2}}{4}} y(x) = \frac{1}{2x}e^{-\frac{2}{x}} + \frac{1}{4}e^{-\frac{2}{x}} - \frac{1}{2}e^{-2}$$

**(β) Μέθοδος υποβιβασμού (ή μέθοδος d' Alembert)**

(Αν μπορούμε να απαλείψουμε την $y(x)$, τότε την μετατρέπουμε στην προηγούμενη κατηγορία.)

Έστω ότι $y_1(x)$ είναι γνωστή, κατάλληλη (θα προσδιορίσουμε τη μορφή της αργότερα) συνάρτηση. Θέτουμε

$$y(x) = y_1(x)u(x) \tag{4.29}$$

παραγωγίζουμε δύο φορές

$$y'(x) = y_1'(x)u(x) + y_1(x)u'(x)$$

$$y''(x) = y_1''(x)u(x) + 2y_1'(x)u'(x) + y_1(x)u''(x)$$

και αντικαθιστούμε στην (4.28), οπότε έχουμε:

$$y''(x) + p(x)y'(x) + q(x)y(x) = f(x) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y_1''(x)u(x) + 2y_1'(x)u'(x) + y_1(x)u''(x) + p(x)\Big[y_1'(x)u(x) + y_1(x)u'(x)\Big] +$$
$$+q(x)y_1(x)u(x) = f(x) \Rightarrow$$

$$y_1(x)u''(x) + \Big[2y_1'(x) + p(x)y_1(x)\Big]u'(x) + \Big[y_1''(x) + p(x)y_1'(x) + q(x)y_1(x)\Big]u(x) = f(x) \tag{4.30}$$

Εάν η συνάρτηση $y_1(x)$ είναι μία λύση της αντίστοιχης ομογενούς (4.28), τότε ο συντελεστής του $u(x)$ στην (4.30) είναι μηδέν, οπότε η (4.30) παίρνει τη μορφή:

$$y_1(x)u''(x) + \Big[2y_1'(x) + p(x)y_1(x)\Big]u'(x) = f(x) \tag{4.31}$$

Στην Σ.Δ.Ε. αυτή λείπει η $u(x)$, οπότε θέτουμε: $u'(x) = v(x) \Rightarrow u''(x) = v'(x)$ και η (4.31) γίνεται γραμμική Σ.Δ.Ε. πρώτης τάξης ως προς $v(x)$, την οποία λύνουμε κατά τα γνωστά, και από αυτήν βρίσκουμε την $u(x)$ ολοκληρώνοντας και τελικά την $y(x)$ από την (4.29).

***Σημείωση:***
Περιπτώσεις, που μπορούμε να βρούμε λύση της αντίστοιχης ομογενούς της (4.28):
**(α)** Η $y_1(x)$ να έχει την μορφή: $y_1(x) = x^n$: τότε $y_1'(x) = nx^{n-1}$, $y_1''(x) = n(n-1)x^{n-2}$ και η αντίστοιχη ομογενής της (4.28) γίνεται:
$n(n-1)x^{n-2} + p(x)nx^{n-1} + q(x)x^n = 0$, οπότε:
Για $n = 1$: αν $p(x) + xq(x) = 0$, τότε $y_1(x) = x$
Για $n = 2$: αν $2 + 2xp(x) + x^2q(x) = 0$, τότε $y_1(x) = x^2$, κ.λ.π.

**(β)** Η $y_1(x)$ να έχει την μορφή: $y_1(x) = e^{rx}$: τότε $y_1'(x) = re^{rx}$, $y_1''(x) = r^2e^{rx}$ και η αντίστοιχη ομογενής της (4.28) γίνεται: $r^2 + rp(x) + q(x) = 0$, οπότε:
Για $r = 1$: αν $1 + p(x) + q(x) = 0$, τότε $y_1(x) = e^x$
Για $r = 2$: αν $4 + 2p(x) + q(x) = 0$, τότε $y_1(x) = e^{2x}$, κ.λ.π.

***Παράδειγμα 30*** Να λυθεί η Σ.Δ.Ε. $(x-1)y''(x) - xy'(x) + y(x) = (x-1)^2e^x$.

**Λύση**
Η δοθείσα Σ.Δ.Ε. γράφεται

$$(x-1)y''(x) - xy'(x) + y(x) = (x-1)^2e^x \Rightarrow$$
$$y''(x) - \frac{x}{x-1}y'(x) + \frac{1}{x-1}y(x) = (x-1)e^x$$

με: $p(x) = -\dfrac{x}{x-1}, q(x) = \dfrac{1}{x-1}$.
Επειδή, $1 + p(x) + q(x) = 1 - \dfrac{x}{x-1} + \dfrac{1}{x-1} = 0$, μία λύση της αντίστοιχης ομογενούς είναι η συνάρτηση $y_1(x) = e^x$. Θέτουμε: $y(x) = e^xu(x)$.
Παραγωγίζουμε: $y'(x) = e^xu'(x) + e^xu(x)$,
$y''(x) = e^xu''(x) + 2e^xu'(x) + e^xu(x)$,

και αντικαθιστούμε στην δοθείσα Σ.Δ.Ε.

$$u''(x)+2e^xu'(x)+e^xu(x)-\frac{x}{x-1}(e^xu'(x)+e^xu(x))+\frac{1}{x-1}e^xu(x) = (x-1)e^x$$
$$\Rightarrow u''(x) + \left(2 - \frac{x}{x-1}\right)u'(x) = x-1$$

Θέτουμε $u'(x) = v(x)$, οπότε προκύπτει η γραμμική δ.ε. πρώτης τάξης $v'(x) + \left(2 - \dfrac{x}{x-1}\right)v(x) = x-1$, την οποία λύνουμε:

$$\left(\frac{e^xv(x)}{x-1}\right)' = e^x \Rightarrow v(x) = (x-1) + c_1(x-1)e^{-x}$$

$\Rightarrow u(x) = c_2 + \dfrac{x^2}{2} - x + c_1xe^{-x}$, και τελικά η λύση είναι

$$y(x) = c_1x + \left(c_2 + \frac{x^2}{2} - x\right)e^x$$

***Παράδειγμα 31*** Να λυθεί η Σ.Δ.Ε.
$xy''(x) - (2x+1)y'(x) + (x+1)y(x) = (x^2 + x - 1)e^{2x}$.

**Λύση**
Η δοθείσα Σ.Δ.Ε. γράφεται

$$xy''(x) - (2x+1)y'(x) + (x+1)y(x) = (x^2+x-1)e^{2x} \Rightarrow$$
$$y''(x) - \frac{2x+1}{x}y'(x) + \frac{x+1}{x}y(x) = \frac{x^2+x-1}{x}e^{2x}$$
με: $p(x) = -\dfrac{2x+1}{x}, q(x) = \dfrac{x+1}{x}$.
Επειδή, $1 + p(x) + q(x) = 1 - \dfrac{2x+1}{x} + \dfrac{x+1}{x} = 0$, μία λύση της αντίστοιχης ομογενούς είναι η συνάρτηση $y_1(x) = e^x$. Θέτουμε: $y(x) = e^x u(x)$.
Παραγωγίζουμε: $y'(x) = e^x u'(x) + e^x u(x)$,
$y''(x) = e^x u''(x) + 2e^x u'(x) + e^x u(x)$,

και αντικαθιστούμε στην δοθείσα Σ.Δ.Ε.

$$xe^x(u''(x) + 2u'(x) + u(x)) - (2x+1)e^x(u(x) + u'(x)) + (x+1)e^x u(x) = \left(x^2+x-1\right)e^{2x}$$

$$xu''(x) + (2x-2x-1)u'(x) + (x-2x-1+x+1)u(x) = (x^2+x-1)e^{2x}$$

$$u''(x) - \frac{1}{x}u'(x) = \left(x+1-\frac{1}{x}\right)e^x$$

Θέτουμε $u'(x) = v(x)$, οπότε προκύπτει η γραμμική δ.ε. πρώτης τάξης $v'(x) - \dfrac{1}{x}v(x) = \left(x+1-\dfrac{1}{x}\right)e^x$, την οποία λύνουμε:
$$\left(\frac{1}{x}v(x)\right)' = \left(1+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}\right)e^x \Rightarrow v(x) = c_1x + x\int\left(1+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}\right)e^x dx \Rightarrow$$
$$v(x) = c_1x + xe^x + x\int\frac{e^x}{x}dx - x\int\frac{e^x}{x^2}dx \Rightarrow$$
$$v(x) = c_1x + xe^x + x\frac{e^x}{x} + x\int\frac{e^x}{x^2}dx - x\int\frac{e^x}{x^2}dx = c_1x + xe^x + e^x$$
$$\Rightarrow u'(x) = c_1x + xe^x + e^x \Rightarrow u(x) = c_2 + c_1\frac{x^2}{2} + xe^x - e^x + e^x \Rightarrow$$
$$u(x) = c_2 + c_1\frac{x^2}{2} + xe^x$$

και τελικά η λύση είναι

$$\frac{y(x)}{e^x} = c_2 + c_1\frac{x^2}{2} + xe^x \Rightarrow y(x) = e^x\left(c_2 + c_1\frac{x^2}{2} + xe^x\right)$$

***Παράδειγμα 32*** Να λυθεί η Σ.Δ.Ε.$(x-1)y'' - xy + y = (x-1)^2e^x$.

**Λύση**

Η δοθείσα Σ.Δ.Ε. γράφεται

$$(x-1)y'' - xy' + y = (x-1)^2e^x \Rightarrow$$
$$y'' - \frac{x}{x-1}y' + \frac{1}{x-1}y = (x-1)e^x$$

με: $p(x) = -\dfrac{x}{x-1}, q(x) = \dfrac{1}{x-1}$.

Επειδή, $p(x) + xq(x) = -\dfrac{x}{x-1} + \dfrac{x}{x-1} = 0$, μία λύση της αντίστοιχης ομογενούς είναι η συνάρτηση $y_1(x) = x$. Θέτουμε: $y(x) = xu(x)$.
Παραγωγίζουμε: $y'(x) = xu'(x) + u(x)$,
$y''(x) = 2u'(x) + xu''(x)$,

και αντικαθιστούμε στην δοθείσα Σ.Δ.Ε.

$$xu''(x) + 2u'(x) - \frac{x}{x-1}u(x) - \frac{x^2}{x-1}u'(x) + \frac{x}{x-1}u(x) = (x-1)e^x \Rightarrow$$
$$u''(x) + \left(\frac{2}{x} - \frac{x}{x-1}\right)u'(x) = \frac{x-1}{x}e^x$$

Θέτουμε $u'(x) = v(x)$, οπότε προκύπτει η γραμμική δ.ε. πρώτης τάξης $v''(x) + \left(\dfrac{2}{x} - \dfrac{x}{x-1}\right)v'(x) = \dfrac{x-1}{x}e^x$, την οποία λύνουμε:

$$v(x) = e^{-\int(\frac{2}{x}-\frac{x}{x-1})dx}\left[c_1 + \frac{x-1}{x}e^xe^{\int(\frac{2}{x}-\frac{x}{x-1})dx}\right] \Rightarrow$$
$$v(x) = e^{-2lnx+x+ln(x-1)}\left[c_1 + \int\frac{x-1}{x}e^xe^{2lnx-x-ln(x-1)}dx\right] \Rightarrow$$
$$v(x) = \frac{x-1}{x^2}e^x\left[c_1 + \int xdx\right] \Rightarrow v(x) = \frac{x-1}{x^2}e^xc_1 + \frac{x-1}{2}e^x \Rightarrow$$
$$u'(x) = \frac{x-1}{x^2}e^xc_1 + \frac{x-1}{2}e^x \Rightarrow u(x) = \int\left(\frac{x-1}{x^2}e^xc_1 + \frac{x-1}{2}e^x\right)dx + c_2 \Rightarrow$$
$$u(x) = c_1\frac{e^x}{x} + \frac{x-1}{2}e^x - \frac{e^x}{2} + c_2$$

και τελικά η λύση είναι

$$y(x) = xu(x) = c_1e^x + \frac{x(x-1)}{2}e^x - \frac{x}{2}e^x + c_2x = c_2x + \left(c_1 - x + \frac{x^2}{2}\right)e^x$$

**(γ) Μετατροπή της Σ.Δ.Ε. (4.28) σε Σ.Δ.Ε. τύπου Schrondiger**

Εάν η συνάρτηση $y_1(x)$ είναι τέτοια ώστε

$$2y_1'(x) + p(x)y_1(x) = 0 \Rightarrow \frac{y_1'(x)}{y_1(x)} = -\frac{p(x)}{2} \Rightarrow y_1(x) = e^{-\int \frac{p(x)}{2}dx} \tag{4.32}$$

τότε ο συντελεστής του $u'(x)$ στην (4.30) είναι μηδέν και η (4.30) γίνεται:

$$y_1(x)u''(x) + \Big[y_1''(x) + p(x)y_1'(x) + q(x)y_1(x)\Big]u(x) = f(x) \tag{4.33}$$

Παραγωγίζουμε δύο φορές την $y_1(x)$ όπως δίνεται από την (4.32),

$$\frac{y_1'(x)}{y_1(x)} = -\frac{p(x)}{2} \Rightarrow y_1'(x) = -y_1(x)\frac{p(x)}{2},$$

$$y_1''(x) = -y_1'(x)\frac{p(x)}{2} - y_1(x)\frac{p'(x)}{2} \Rightarrow y_1''(x) = y_1(x)\frac{p^2(x)}{4} - y_1(x)\frac{p'(x)}{2}$$

αντικαθιστούμε στην (4.33) και παίρνουμε:

$$y_1(x)u''(x) + \Big[y_1(x)\frac{p^2(x)}{4} - y_1(x)\frac{p'(x)}{2} - y_1(x)\frac{p^2(x)}{2} + q(x)y_1(x)\Big]u(x) = f(x) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow u''(x) + \Big[-\frac{p'(x)}{2} - \frac{p^2(x)}{4} + q(x)\Big]u(x) = \frac{f(x)}{y_1(x)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow u''(x) + U(x)u(x) = \frac{f(x)}{y_1(x)} \tag{4.34}$$

όπου

$$U(x) = q(x) - \frac{p'(x)}{2} - \frac{p^2(x)}{4} \tag{4.35}$$

Η Σ.Δ.Ε. (4.34) είναι της μορφής Schrondiger. Αν $U(x) = A$ (σταθερά) ή $U(x) = \frac{A}{x^2}$, τότε η Σ.Δ.Ε. (4.34) είναι γραμμική με σταθερούς συντελεστές, ή Σ.Δ.Ε. Euler αντίστοιχα, οπότε μπορούμε να βρούμε την γενική της λύση $u(x)$ και τελικά την $y(x)$ από την (4.29).

***Παράδειγμα 33*** Να λυθεί η Σ.Δ.Ε.
$x^2y''(x) - x(2x+3)y'(x) + (3+3x+x^2)y(x) = (6-x^2)e^x.$

**Λύση**
Η κανονική μορφή της δοθείσας Σ.Δ.Ε. είναι

$$y''(x) - \frac{2x+3}{x}y'(x) + \frac{3+3x+x^2}{x^2}y(x) = \frac{6-x^2}{x^2}e^x$$

με $p(x) = -\dfrac{2x+3}{x}$ και $q(x) = \dfrac{3+3x+x^2}{x^2}$. Παρατηρούμε ότι:
$U(x) = q(x) - \dfrac{p'(x)}{2} - \dfrac{p^2(x)}{4} = \dfrac{3+3x+x^2}{x^2} - \dfrac{3}{2x^2} - \dfrac{4x^2+12x+9}{4x^2} = -\dfrac{3}{4x^2}.$

Οπότε ο μετασχηματισμός

$$y(x) = u(x)e^{-\frac{1}{2}\int p(x)dx} = u(x)e^{-\frac{1}{2}\int -\frac{2x+3}{x}dx} = u(x)e^x x^{\frac{3}{2}}$$

μετασχηματίζει την αρχική Σ.Δ.Ε. στην

$$u''(x) + U(x)u(x) = \frac{f(x)}{e^{-\frac{1}{2}\int p(x)dx}} \Rightarrow$$
$$u''(x) - \frac{3}{4x^2}u(x) = \frac{(6-x^2)x^{-2}}{x^{\frac{3}{2}}} \Rightarrow$$
$$4x^2u''(x) - 3u(x) = 4(6-x^2)x^{-\frac{3}{2}}$$

η οποία είναι μια διαφορική εξίσωση Euler. Για να βρούμε την γενική λύση αυτής, θέτουμε $x = e^t$, οπότε $\dfrac{dx}{dt} = e^t \Rightarrow \dfrac{dt}{dx} = \dfrac{1}{e^t} \Rightarrow \dfrac{dt}{dx} = \dfrac{1}{x}$ και

$$\frac{du}{dx} = \frac{du}{dt}\frac{dt}{dx} = \frac{1}{x}\frac{du}{dt}$$
$$\frac{d^2u}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}\frac{du}{dt}\right) = -\frac{1}{x^2}\frac{du}{dt} + \frac{1}{x^2}\frac{d^2u}{dt^2}$$

οπότε αντικαθιστώντας στην Σ.Δ.Ε. Euler έχουμε:

$$4\frac{d^2u}{dt^2} - 4\frac{du}{dt} - 3u(t) = 24e^{-\frac{3t}{2}} - 4e^{\frac{t}{2}}$$

η οποία είναι Σ.Δ.Ε. με σταθερούς συντελεστές. Λύνουμε πρώτα την αντίστοιχη ομογενή, ζητώντας λύση της μορφής $u(t) = e^{rt}$ και η αντίστοιχη χαρακτηριστική εξίσωση είναι:

$4r^2 - 4r - 3 = 0$

με ρίζες $r_1 = \dfrac{3}{2}$ και $r_2 = -\dfrac{1}{2}$. Οι γραμμικώς ανεξάρτητες λύσεις της ομογενούς θα είναι $e^{\frac{3t}{2}}$ και $e^{-\frac{t}{2}}$ και η λύση της ομογενούς:

$$u_0(t) = c_1 e^{\frac{3t}{2}} + c_2 e^{-\frac{t}{2}}.$$

Η μερική λύση της μη ομογενούς θα είναι το άθροισμα των μερικών λύσεων των διαφορικών εξισώσεων:

$$4\frac{d^2u}{dt^2} - 4\frac{du}{dt} - 3u(t) = 24e^{-\frac{3t}{2}}$$

και

$$4\frac{d^2u}{dt^2} - 4\frac{du}{dt} - 3u(t) = -4e^{\frac{t}{2}}$$

Για την πρώτη, επειδή το $-\dfrac{3}{2}$ δεν είναι ρίζα του χαρακτηριστικού πολυωνύμου, η μερική λύση θα έχει την μορφή: $u_{\mu 1}(t) = ke^{-\frac{3t}{2}}$.
Παραγωγίζουμε δύο φορές και αντικαθιστούμε στην πρώτη μη ομογενή, οπότε προκύπτει $k = 2$, άρα $u_{\mu 1}(t) = 2e^{-\frac{3t}{2}}$.
Για την δεύτερη, επειδή το $\dfrac{1}{2}$ δεν είναι ρίζα του χαρακτηριστικού πολυωνύμου, η μερική λύση θα έχει την μορφή: $u_{\mu 2}(t) = ke^{\frac{t}{2}}$.
Παραγωγίζουμε δύο φορές και αντικαθιστούμε στην δεύτερη μη ομογενή, οπότε προκύπτει $k = 1$, άρα $u_{\mu 2}(t) = e^{\frac{t}{2}}$.
Τελικά η γενική λύση της Σ.Δ.Ε. με τους σταθερούς συντελεστές θα είναι:

$$u(t) = c_1 e^{\frac{3t}{2}} + c_2 e^{-\frac{t}{2}} + 2e^{-\frac{3t}{2}} + e^{\frac{t}{2}}$$

και επειδή $x = e^t$, έχουμε:

$$u(x) = c_1 x^{\frac{3}{2}} + c_2 x^{-\frac{1}{2}} + 2x^{-\frac{3}{2}} + x^{\frac{1}{2}}.$$

Τελικά η γενική λύση της αρχικής Σ.Δ.Ε. είναι:

$$y(x) = (c_1 x^{\frac{3}{2}} + c_2 x^{-\frac{1}{2}} + 2x^{-\frac{3}{2}} + x^{\frac{1}{2}})e^x x^{\frac{3}{2}}.$$

***Παράδειγμα 34*** Να βρεθεί η γενική λύση της Σ.Δ.Ε.
$y''(x) - 2xy'(x) + (x^2+2)y(x) = e^{\frac{x^2+x}{2}}$.

**Λύση**
Θέτουμε $p(x) = -2x, q(x) = x^2 + 2$ και παρατηρούμε ότι η ποσότητα:

$U(x) = q(x) - \dfrac{1}{2}p'(x) - \dfrac{1}{4}p^2(x) = x^2 + 2 - \dfrac{1}{2}(-2) - \dfrac{1}{4}4x^2 = 3$ είναι σταθερά, άρα ο μετασχηματισμός $y(x) = v(x)e^{-\frac{1}{2}\int p(x)dx} = v(x)e^{\frac{x^2}{2}}$, μετατρέπει την δοθείσα Σ.Δ.Ε. στην $v''(x) + U(x)v(x) = f(x)e^{\frac{1}{2}\int p(x)dx}$, ή

$$v''(x) + 3v(x) = e^{\frac{x}{2}}$$

η οποία είναι Σ.Δ.Ε. με σταθερούς συντελεστές μη ομογενής. Λύνουμε πρώτα την αντίστοιχη ομογενή. Ζητούμε λύση της μορφής $v(x) = e^{rx}$, η χαρακτηριστική εξίσωση είναι $r^2 + 3 = 0$, που έχει για ρίζες $\pm i\sqrt{3}$, άρα η λύση της ομογενούς είναι:

$$v_0(x) = c_1 cos\sqrt{3}x + c_2 sin\sqrt{3}x, \quad c_1, c_2 \text{ αυθαίρετες σταθερές.}$$

Μια μερική λύση της μη ομογενούς θα έχει την μορφή: $v_\mu(x) = Ae^{\frac{x}{2}}$, αφού το $\frac{1}{2}$ δεν είναι ρίζα του χαρακτηριστικού πολυωνύμου.
Παραγωγίζουμε δύο φορές ως προς $x$, αντικαθιστούμε στην μη ομογενή Σ.Δ.Ε. και υπολογίζουμε το $A = \dfrac{4}{13}$, οπότε η μερική λύση είναι $v_\mu(x) = \dfrac{4}{13}e^{\frac{x}{2}}$ και η γενική της λύση:

$$v(x) = c_1 cos\sqrt{3}x + c_2 sin\sqrt{3}x + \frac{4}{13}e^{\frac{x}{2}}.$$

Τελικά η γενική λύση της αρχικής Σ.Δ.Ε. θα είναι:

$$y(x) = \left(c_1 cos\sqrt{3}x + c_2 sin\sqrt{3}x + \frac{4}{13}e^{\frac{x}{2}}\right)e^{\frac{x^2}{2}}.$$

***Παράδειγμα 35*** Να βρεθεί η γενική λύση της Σ.Δ.Ε.
$x^2y''(x) - 2xy'(x) + (x^2+2)y(x) = x^3e^x$.

**Λύση**
Θέτουμε $p(x) = -\dfrac{2}{x}, q(x) = 1 + \dfrac{2}{x^2}$ και παρατηρούμε ότι η ποσότητα:

$U(x) = q(x) - \frac{1}{2}p'(x) - \frac{1}{4}p^2(x) = 1 + \frac{2}{x^2} + 2 - \frac{1}{2}\frac{2}{x^2} - \frac{1}{4}\frac{4}{x^2} = 1$ είναι σταθερά, άρα ο μετασχηματισμός $y(x) = v(x)e^{-\frac{1}{2}\int p(x)dx} = v(x)x$, μετατρέπει την δοθείσα Σ.Δ.Ε. στην $v''(x) + U(x)v(x) = f(x)e^{\frac{1}{2}\int p(x)dx}$, ή

$$v''(x) + v(x) = xe^x e^{\frac{1}{2}(-2lnx)} \Rightarrow v''(x) + v(x) = e^x$$

η οποία είναι Σ.Δ.Ε. με σταθερούς συντελεστές μη ομογενής. Λύνουμε πρώτα την αντίστοιχη ομογενή. Ζητούμε λύση της μορφής $v(x) = e^{rx}$, η χαρακτηριστική εξίσωση είναι $r^2 + 1 = 0$, που έχει για ρίζες $\pm i$, άρα η λύση της ομογενούς είναι:

$$v_0(x) = c_1 cosx + c_2 sinx, \quad c_1, c_2 \text{ αυθαίρετες σταθερές.}$$

Μια μερική λύση της μη ομογενούς θα έχει την μορφή: $v_\mu(x) = Ae^x$, αφού το $1$ δεν είναι ρίζα του χαρακτηριστικού πολυωνύμου.
Παραγωγίζουμε δύο φορές ως προς $x$, αντικαθιστούμε στην μη ομογενή Σ.Δ.Ε. και υπολογίζουμε το $A = \frac{1}{2}$, οπότε η μερική λύση είναι $v_\mu(x) = \frac{1}{2}e^x$ και η γενική της λύση:

$$v(x) = c_1 cosx + c_2 sinx + \frac{1}{2}e^x.$$

Τελικά η γενική λύση της αρχικής Σ.Δ.Ε. θα είναι:

$$y(x) = x\left(c_1 cosx + c_2 sinx + \frac{1}{2}e^x\right).$$

***Παράδειγμα 36*** Να βρεθεί η γενική λύση της Σ.Δ.Ε.
$y'' - 2xy' + x^2 y = 0$.

**Λύση**
Θέτουμε $p(x) = -2x, q(x) = x^2$ και παρατηρούμε ότι η ποσότητα:

$U(x) = q(x) - \frac{1}{2}p'(x) - \frac{1}{4}p^2(x) = x^2 - \frac{1}{2}(-2) - \frac{1}{4}4x^2 = 1$ είναι σταθερά, άρα ο μετασχηματισμός $y(x) = v(x)e^{-\frac{1}{2}\int p(x)dx} = v(x)e^{\frac{x^2}{2}}$, μετατρέπει την δοθείσα Σ.Δ.Ε. στην $v''(x) + U(x)v(x) = f(x)e^{\frac{1}{2}\int p(x)dx}$, ή

$$v''(x) + v(x) = 0$$

η οποία είναι Σ.Δ.Ε. με σταθερούς συντελεστές ομογενής. Ζητούμε λύση της μορφής $v(x) = e^{rx}$, η χαρακτηριστική εξίσωση είναι $r^2 + 1 = 0$, που έχει για ρίζες $\pm i$, άρα η λύση της είναι:

$v(x) = c_1 cosx + c_2 sinx, \quad c_1, c_2$ αυθαίρετες σταθερές.

Τελικά η γενική λύση της αρχικής Σ.Δ.Ε. θα είναι:

$y(x) = e^{\frac{x^2}{2}}(c_1 cosx + c_2 sinx).$

**(δ) Μετατροπή μέσω κατάλληλου μετασχηματισμού σε Σ.Δ.Ε. με σταθερούς συντελεστές.**

Έστω ότι η μεταβλητή $x$ είναι συνάρτηση του $z$, οπότε και η $y$ θα είναι συνάρτηση του $z$, οπότε:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz}\frac{dz}{dx} \text{ και } \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d}{dz}\left(\frac{dy}{dx}\right)\frac{dz}{dx} = \frac{d^2y}{dz^2}\left(\frac{dz}{dx}\right)^2 + \frac{dy}{dz}\frac{d^2z}{dx^2}$$

Αντικαθιστούμε στην (4.28) και προκύπτει:

$$\frac{d^2\tilde{y}}{dz^2}\left(\frac{dz}{dx}\right)^2 + \frac{d\tilde{y}}{dz}\frac{d^2z}{dx^2} + p(x)\frac{d\tilde{y}}{dz}\frac{dz}{dx} + q(x)\tilde{y}(z) = f(x) \Rightarrow$$
$$\frac{d^2\tilde{y}}{dz^2}\left(\frac{dz}{dx}\right)^2 + \frac{d\tilde{y}}{dz}\left[\frac{d^2z}{dx^2} + p(x)\frac{dz}{dx}\right] + q(x)\tilde{y}(z) = f(x) \Rightarrow$$
$$\frac{d^2\tilde{y}}{dz^2} + \frac{d\tilde{y}}{dz}\frac{\left[\frac{d^2z}{dx^2} + p(x)\frac{dz}{dx}\right]}{\left(\frac{dz}{dx}\right)^2} + \frac{q(x)}{\left(\frac{dz}{dx}\right)^2}\tilde{y}(z) = \frac{f(x)}{\left(\frac{dz}{dx}\right)^2}$$

Αν $\pm\frac{q(x)}{\left(\frac{dz}{dx}\right)^2} = a^2 \Rightarrow \frac{dz}{dx} = \sqrt{\pm\frac{q(x)}{a^2}}$ ή $z = z(x)$, επιλέγοντας το πρόσημο εκείνο, ώστε η υπόριζος ποσότητα να είναι θετική και $\frac{\left[\frac{d^2z}{dx^2} + p(x)\frac{dz}{dx}\right]}{\left(\frac{dz}{dx}\right)^2} = A,$

τότε η ανωτέρω Σ.Δ.Ε. μετατρέπεται σε Σ.Δ.Ε. με σταθερούς συντελεστές μη ομογενή:

$$\frac{d^2\tilde{y}}{dz^2} + A\frac{d\tilde{y}}{dz} \pm a^2\tilde{y}(z) = g(z) \qquad (4.36)$$

Επιλέγουμε το ίδιο πρόσημο με εκείνο που διαλέξαμε πιο πάνω και η συνάρτηση $g(z)$ είναι η συνάρτηση $\dfrac{f(x)}{\left(\dfrac{dz}{dx}\right)^2}$, αν αντικαταστήσουμε το $x$ από την σχέση που συνδέεται με το $z$.
Λύνουμε την (4.36) και βρίσκουμε την $\tilde{y}(z)$ στην οποία αντικαθιστούμε την $z$ σαν συνάρτηση του $x$, που έχουμε πάρει, και βρίσκουμε τη λύση $y(x)$ της Σ.Δ.Ε. (4.28).

***Παράδειγμα 37*** Να λυθεί η Σ.Δ.Ε.: $y''(x)-(1+4e^x)y'(x)+3e^{2x}y(x) = e^{2(x+e^x)}$

**Λύση**
Επιλέγουμε την συνάρτηση $z(x)$, έτσι ώστε να ισχύει:

$\dfrac{dz}{dx} = \sqrt{\dfrac{3e^{2x}}{a^2}} = e^x$, (δηλαδή παίρνουμε το πρόσημο + και $a^2 = 3$), οπότε $z(x) = e^x$. Παρατηρούμε ότι $\dfrac{\left[\dfrac{d^2z}{dx^2} + p(x)\dfrac{dz}{dx}\right]}{\left(\dfrac{dz}{dx}\right)^2} = \dfrac{e^x - (1+4e^x)e^x}{e^{2x}} = -4 = A$

και επίσης: $\dfrac{f(x)}{\left(\dfrac{dz}{dx}\right)^2} = \dfrac{e^{2x+2e^x}}{e^{2x}} = e^{2e^x} = e^{2z} = g(z)$. Άρα η δοθείσα Σ.Δ.Ε. με τον μετασχηματισμό $x = lnz$, μετασχηματίζεται στην Σ.Δ.Ε. με σταθερούς συντελεστές:

$y''(z) - 4y'(z) + 3y(z) = e^{2z}$

Την οποία λύνουμε κατά τα γνωστά. Για την αντίστοιχη ομογενή, ζητούμε λύση της μορφής: $y(z) = e^{rz}$ και η χαρακτηριστική εξίσωση είναι:
$r^2 - 4r + 3 = 0$, που έχει ρίζες: $r_1 = 1$ και $r_2 = 3$, οπότε η λύση της ομογενούς είναι:

$y_0(z) = c_1e^z + c_2e^{3z}$, με $c_1, c_2$ αυθαίρετες σταθερές.

Επειδή το μη ομογενές μέρος της Σ.Δ.Ε. είναι $g(z) = e^{2z}$ και το 2 δεν είναι ρίζα του χαρακτηριστικού πολυωνύμου, μια μερική λύση της μη ομογενούς θα έχει την μορφή: $y_\mu(z) = ke^{2z}$. Αντικαθιστούμε στην μη ομογενή Σ.Δ.Ε. και έχουμε:

$$4ke^{2z} - 8ke^{2z} + 3ke^{2z} = e^{2z} \Rightarrow -k = 1 \Rightarrow k = -1,$$

άρα $y_\mu(z) = -e^{2z}$ και η γενική λύση θα είναι:

$$y(z) = c_1e^z + c_2e^{3z} - e^{2z} \xRightarrow{z=e^x} y(x) = c_1e^{e^x} + c_2e^{3e^x} - e^{2e^x}.$$

***Παράδειγμα 38*** Να λυθεί η Σ.Δ.Ε.: $x^2y'' - xy' - 4x^4y = 0$

**Λύση**

Η δ.ε. γράφεται:

$$y'' - \frac{1}{x}y' - 4x^2y = 0$$

Επιλέγουμε την συνάρτηση $z(x)$, έτσι ώστε να ισχύει:

$\dfrac{dz}{dx} = \sqrt{\dfrac{4x^2}{4}} = x$, (δηλαδή παίρνουμε το πρόσημο - και $a^2 = 4$), οπότε $z(x) = \dfrac{x^2}{2}$. Παρατηρούμε ότι $\dfrac{\left[\dfrac{d^2z}{dx^2} + p(x)\dfrac{dz}{dx}\right]}{\left(\dfrac{dz}{dx}\right)^2} = \dfrac{1 - \dfrac{1}{x}x}{x^2} = 0 = A$ και επίσης: $\dfrac{f(x)}{\left(\dfrac{dz}{dx}\right)^2} = \dfrac{0}{x^2} = 0 = g(z)$. Άρα η δοθείσα Σ.Δ.Ε. με τον μετασχηματισμό $z = \dfrac{x^2}{2}$, μετασχηματίζεται στην Σ.Δ.Ε. με σταθερούς συντελεστές:

$$y''(z) - 4y(z) = 0$$

Την οποία λύνουμε κατά τα γνωστά. Ζητούμε λύση της μορφής: $y(z) = e^{rz}$ και η χαρακτηριστική εξίσωση είναι:
$r^2 - 4 = 0$, που έχει ρίζες: $r_1 = 2$ και $r_2 = -2$, οπότε η λύση της είναι:

$y(z) = c_1e^{2z} + c_2e^{-2z}$, με $c_1, c_2$ αυθαίρετες σταθερές.

Η γενική λύση θα είναι για $z = \frac{x^2}{2}$:

$y(x) = c_1 e^{x^2} + c_2 e^{-x^2}$

***Παράδειγμα 39*** Να λυθεί η Σ.Δ.Ε.: $y'' + \frac{2}{x}y' + \frac{1}{x^4}y = \frac{2x^2+1}{x^6}$

**Λύση**
Επιλέγουμε την συνάρτηση $z(x)$, έτσι ώστε να ισχύει:

$\frac{dz}{dx} = \sqrt{\frac{\frac{1}{x^4}}{a^2}} = \frac{1}{x^2}$, (δηλαδή παίρνουμε το πρόσημο + και $a^2 = 1$), οπότε $z(x) = -\frac{1}{x}$. Παρατηρούμε ότι $\frac{\left[\frac{d^2z}{dx^2} + p(x)\frac{dz}{dx}\right]}{\left(\frac{dz}{dx}\right)^2} = \frac{-\frac{2}{x^3} + \frac{2}{x}\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x^4}} = 0 = A$ και

επίσης: $\frac{f(x)}{\left(\frac{dz}{dx}\right)^2} = \frac{\frac{2x^2+1}{x^6}}{\frac{1}{x^4}} = \frac{2x^2+1}{x^2} = 2 + \frac{1}{x^2} = 2 + z^2 = g(z)$. Άρα η δοθείσα Σ.Δ.Ε. με τον μετασχηματισμό $x = -\frac{1}{z}$, μετασχηματίζεται στην Σ.Δ.Ε. με σταθερούς συντελεστές:

$y''(z) + y(z) = 2 + z^2$

Την οποία λύνουμε κατά τα γνωστά. Για την αντίστοιχη ομογενή, ζητούμε λύση της μορφής: $y(z) = e^{rz}$ και η χαρακτηριστική εξίσωση είναι:
$r^2 + 1 = 0$, που έχει ρίζες: $r_1 = i$ και $r_2 = -i$, οπότε η λύση της ομογενούς είναι:

$y_0(z) = c_1 cosz + c_2 sinz$, με $c_1, c_2$ αυθαίρετες σταθερές.

Επειδή το μη ομογενές μέρος της Σ.Δ.Ε. είναι $g(z) = 2 + z^2$ και το 0 δεν είναι ρίζα του χαρακτηριστικού πολυωνύμου, μια μερική λύση της μη ομογενούς θα έχει την μορφή: $y_\mu(z) = Kz^2 + \Lambda z + M$. Αντικαθιστούμε στην μη ομογενή Σ.Δ.Ε. και έχουμε:

$$2K + Kz^2 + \Lambda z + M = 2 + z^2 \Rightarrow \begin{cases} K = 1 \\ \Lambda = 0 \\ M = 0 \end{cases} ,$$

άρα $y_\mu(z) = z^2$ και η γενική λύση θα είναι:

$$y(z) = c_1 cosz + c_2 sinz + z^2 \xRightarrow{z=-\frac{1}{x}}$$
$$y(x) = c_1 cos\left(-\frac{1}{x}\right) + c_2 sin\left(-\frac{1}{x}\right) + \left(-\frac{1}{x}\right)^2 = c_1 cos\left(\frac{1}{x}\right) - c_2 sin\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{1}{x^2}$$

## Ελληνική βιβλιογραφία

[1] Γ. Δάσιος, Συνήθεις Διαφορικές Εξισώσεις, Πάτρα, 1985

[2] Θ. Κυβεντίδης, Διαφορικές εξισώσεις, Εκδόσεις Ζήτη, Θεσ/κη, 1993

[3] Β. Μπαρμπάνης, Μαθήματα Διαφορικών Εξισώσεων, Πάτρα, 1976

[4] Π. Σιαφαρίκας, Εφαρμογές των Σ.Δ.Ε., Τόμος Ι, Πάτρα, 2002

[5] Ν. Σταυρακάκης, ΣΔΕ : γραμμική και μη γραμμική θεωρία από τη φύση και τη ζωή, Παπασωτηρίου, Αθήνα, 1997

## Ξενόγλωσση βιβλιογραφία

[1] W. E. Boyce, R. C. Di Prima, Elementary differential equations and boundary value problems, N. Y. John Wiley & Sons, 1977

[2] M. Braun, Differential equations and their Applications, Springer-Verlag, 1993

[3] Abell and Braselton, Modern Differential equations, Theory, Application, Technology, Saunders College Publishing, 1996

[4] B. Rai and D. P. Choudhury, Ordinary Differential Equations, An introduction, Alpha Science, International Ltd, 2005

[5] Rice and Strange, Ordinary Differential Equations with Application, Brooks/Cole Publishing Company, 1996