Τίτλος Μαθήματος: Συνήθεις Διαφορικές Εξισώσεις Ι

Ενότητα: Επίλυση Σ.Δ.Ε. γραμμικών ομογενών με σταθερούς συντελεστές. Μέθοδοι εύρεσης της μερικής λύσης των μη ομογενών Σ.Δ.Ε.

Όνομα Καθηγητή: Χρυσή Κοκολογιαννάκη

Τμήμα: Μαθηματικών

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Πατρών**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

4.2 Επίλυση της μη ομογενούς γραμμικής Σ.Δ.Ε.

Θεώρημα 4.6 Αν $y_\mu(x)$ είναι μια λύση της μη ομογενούς γραμμικής Σ.Δ.Ε. $L(y(x)) = g(x)$ και $y_0(x)$ είναι η γενική λύση της αντίστοιχης ομογενούς $L(y(x)) = 0$, τότε η γενική λύση της μη ομογενούς $L(y(x)) = g(x)$ δίνεται από την σχέση: $y(x) = y_0(x) + y_\mu(x)$.

Απόδειξη. Έστω $y(x)$ λύση της μη ομογενούς $L(y(x)) = g(x)$. Αφού και η $y_\mu(x)$ είναι μια λύση της ίδιας Σ.Δ.Ε., έπεται ότι η διαφορά $y(x) - y_\mu(x)$ είναι λύση της ομογενούς $L(y(x)) = 0$, άρα γράφεται ως γραμμικός συνδυασμός των γραμμικώς ανεξάρτητων λύσεων της ομογενούς ή $y(x) - y_\mu(x) = y_0(x) \Rightarrow y(x) = y_0(x) + y_\mu(x)$. □

(α) Εύρεση μερικής λύσης της μη ομογενούς γραμμικής Σ.Δ.Ε. Μέθοδος μεταβολής των παραμέτρων ή μέθοδος Lagrange

Η μέθοδος αυτή εφαρμόζεται ανεξαρτήτως της μορφής της $g(x)$, (σε γραμμικές Σ.Δ.Ε. με σταθερούς ή με μη σταθερούς συντελεστές), **αρκεί** να γνωρίζουμε τις γραμμικώς ανεξάρτητες λύσεις της αντίστοιχης ομογενούς.

Έστω ότι έχουμε μια γραμμική μη ομογενή Σ.Δ.Ε. n-στής τάξης. Διαιρούμε με τον συντελεστή της n-στής παραγώγου (πάντα είναι μη μηδενική συνάρτηση) και την φέρνουμε στην μορφή:

$$L(y(x)) = y^{(n)}(x) + a_{n-1}(x)y^{(n-1)}(x) + ... + a_0(x)y(x) = g(x) \qquad (4.12)$$

και έστω $y_i(x), i = 1, ..., n$ οι n γραμμικώς ανεξάρτητες λύσεις της αντίστοιχης ομογενούς Σ.Δ.Ε. $L(y(x)) = 0$, οπότε η γενική λύση της ομογενούς θα είναι

$$y_0(x) = c_1y_1(x) + ... + c_ny_n(x), \quad c_i, i = 1, ..., n \quad \text{σταθερές.} \qquad (4.13)$$

Ο Lagrange θεώρησε ότι η μερική λύση της (4.12) θα έχει την μορφή της (4.13), αν στη θέση των σταθερών, βάλουμε συναρτήσεις του x, τις οποίες θα προσδιορίσουμε, έτσι ώστε, με κάποιες προϋποθέσεις, η μερική λύση να ικανοποιεί την (4.12).

Θα δουλέψουμε πρώτα σε μια Σ.Δ.Ε. δεύτερης τάξης και μετά θα το γενικεύσουμε για την (4.12). Έτσι:

$L(y(x)) = y''(x) + a_1(x)y'(x) + a_0(x)y(x) = g(x)$

και έστω $y_i, i = 1,2$ οι δύο γραμμικώς ανεξάρτητες λύσεις της αντίστοιχης ομογενούς Σ.Δ.Ε. $L(y(x)) = 0$, οπότε η γενική λύση της ομογενούς θα είναι

$$y_0(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x), \quad c_i, i = 1,2 \quad \text{σταθερές.}$$

Η μερική λύση θα έχει την μορφή:

$$y_\mu(x) = c_1(x) y_1(x) + c_2(x) y_2(x)$$

Παραγωγίζουμε, οπότε:

$$y'_\mu(x) = c'_1(x) y_1(x) + c_1(x) y'_1(x) + c'_2(x) y_2(x) + c_2(x) y'_2(x)$$

Θέτοντας:

$$c'_1(x) y_1(x) + c'_2(x) y_2(x) = 0 \qquad (4.14a)$$

Έχουμε:

$$y'_\mu(x) = c_1(x) y'_1(x) + c_2(x) y'_2(x) \qquad (4.14\beta)$$

Παραγωγίζουμε την (4.14.β)

$$y''_\mu(x) = c'_1(x) y'_1(x) + c_1(x) y''_1(x) + c'_2(x) y'_2(x) + c_2(x) y''_2(x) \qquad (4.14\gamma)$$

και αντικαθιστούμε στην μη ομογενή, την $y_\mu(x)$ και τις (2),(3), οπότε

$$c'_1(x)y'_1(x)+c_1(x)y''_1(x)+c'_2(x)y'_2(x)+c_2(x)y''_2(x)+a_1(x)(c_1(x)y'_1(x)+c_2(x)y'_2(x))+$$
$$+a_0(x)(c_1(x)y_1(x) + c_2(x)y_2(x)) = g(x) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow c_1(x)L(y_1(x)) + c_2(x)L(y_2(x)) + c'_1(x)y'_1(x) + c'_2(x)y'_2(x) = g(x) \xRightarrow[i=1,2]{L(y_i(x))=0}$$

$$c'_1(x) y'_1(x) + c'_2(x) y'_2(x) = g(x) \qquad (4.14\delta)$$

Οι ισότητες (4.14.α) και (4.14.δ) δημιουργούν ένα σύστημα με αγνώστους τις συναρτήσεις $c'_i(x), i = 1,2$:

$$c'_1(x) y_1(x) + c'_2(x) y_2(x) = 0$$

$$c_1'(x)y_1'(x) + c_2'(x)y_2'(x) = g(x)$$

που έχει πάντα λύση, γιατί είναι μη ομογενές και η ορίζουσα των συντελεστών των αγνώστων είναι η ορίζουσα Wronski των γραμμικώς ανεξαρτήτων λύσεων της ομογενούς, άρα διάφορη από το μηδέν. Λύνουμε το σύστημα, βρίσκουμε τις συναρτήσεις $c_i'(x), i = 1, 2$. Ολοκληρώνουμε και υπολογίζουμε τις συναρτήσεις $c_i(x), i = 1, 2$. Την σταθερά της ολοκλήρωσης την παίρνουμε ίση με το μηδέν, διότι μας ενδιαφέρει να βρούμε μια μερική λύση της δοθείσας Σ.Δ.Ε. Αντικαθιστούμε στην $y_\mu(x)$ και έχουμε την μερική λύση της Σ.Δ.Ε. Προσθέτουμε και την λύση της αντίστοιχης ομογενούς και παίρνουμε την γενική λύση αυτής.

Ομοίως δουλεύουμε για την (4.12). Έτσι, η μερική λύση αυτής θα είναι:

$$y_\mu(x) = c_1(x)y_1(x) + ... + c_n(x)y_n(x), \quad c_i, i = 1, ..., n \quad \text{σταθερές.} \tag{4.15}$$

Παραγωγίζουμε την (4.15), οπότε:

$$y_\mu'(x) = c_1'(x)y_1(x) + c_1(x)y_1'(x) + ... + c_n'(x)y_n(x) + c_n(x)y_n'(x)$$

Θέτοντας:

$$c_1'(x)y_1(x) + ... + c_n'(x)y_n(x) = 0 \tag{4.15.1α}$$

Έχουμε:

$$y_\mu'(x) = c_1(x)y_1'(x) + ... + c_n(x)y_n'(x) \tag{4.15.1β}$$

Παραγωγίζοντας την (4.15.1β) και θέτοντας

$$c_1'(x)y_1'(x) + ... + c_n'(x)y_n'(x) = 0 \tag{4.15.2α}$$

Η (4.15.1β) γίνεται:

$$y_\mu''(x) = c_1(x)y_1''(x) + ... + c_n(x)y_n''(x) \tag{4.15.2β}$$

Συνεχίζοντας με τον ίδιο τρόπο και θέτοντας μετά από κάθε παραγώγιση

$$c_1'(x)y_1^{(k)}(x) + ... + c_n'(x)y_n^{(k)}(x) = 0 \quad k = 2, ..., n-2 \tag{4.15.kα}$$

προκύπτουν οι παράγωγοι:

$$y_\mu^{(k)}(x) = c_1(x)y_1^{(k)}(x) + ... + c_n(x)y_n^{(k)}(x) = 0 \quad k = 2, ..., n-2 \quad (4.15.k\beta)$$

Και για την $n-1$ παράγωγο της $y_\mu(x)$ έχουμε:

$$y_\mu^{(n-1)}(x) = c_1(x)y_1^{(n-1)}(x) + ... + c_n(x)y_n^{(n-1)}(x) = 0 \qquad (4.15.(n-1)\beta)$$

Αντικαθιστούμε στην (4.12) τις (4.15),(4.15.1β),(4.15.2β),(4.15.kβ) για $k = 2, ..., n-2$,(4.15.$(n-1)$β), και την παράγωγο της (4.15.$(n-1)$β) και λαμβάνοντας υπ' όψιν μας ότι $L(y_i(x)) = 0, i = 1, ..., n$, έχουμε:

$$\sum_{i=1}^{n} c_i(x)L(y_i(x)) + c_1'(x)y_1^{(n-1)}(x) + ... + c_n'(x)y_n^{(n-1)}(x) = g(x) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow c_1'(x)y_1^{(n-1)}(x) + ... + c_n'(x)y_n^{(n-1)}(x) = g(x) \qquad (4.15.n\alpha)$$

Παίρνοντας τις n εξισώσεις (4.15.iα), $i = 1, ..., n$ σχηματίζουμε ένα σύστημα γραμμικό, μη ομογενές, n εξισώσεων με n αγνώστους, τις συναρτήσεις $c_i'(x), i = 1, ..., n$. Το σύστημα αυτό είναι:

$$c_1'(x)y_1'(x) + ... + c_n'(x)y_n'(x) = 0$$

$$c_1'(x)y_1''(x) + ... + c_n'(x)y_n''(x) = 0$$

$$...$$

$$c_1'(x)y_1^{(n-1)}(x) + ... + c_n'(x)y_n^{(n-1)}(x) = g(x)$$

που έχει πάντα λύση μη μηδενική διότι η ορίζουσα των συντελεστών των αγνώστων είναι η ορίζουσα Wronski των $y_i(x), i = 1, ..., n$, που είναι διάφορη από το μηδέν, αφού είναι γραμμικώς ανεξάρτητες λύσεις της ομογενούς Σ.Δ.Ε. Αφού λύσουμε το σύστημα βρίσκουμε τις συναρτήσεις $c_i(x), i = 1, ..., n$ ολοκληρώνοντας. Την σταθερά της ολοκλήρωσης την παίρνουμε ίση με το μηδέν, διότι, όπως προαναφέραμε μας ενδιαφέρει να βρούμε μια μερική λύση της (4.12). Αντικαθιστούμε στην (4.13) και έχουμε την μερική λύση της Σ.Δ.Ε. Προσθέτουμε και την λύση της αντίστοιχης ομογενούς και παίρνουμε την γενική λύση της (4.12).

(β) Γραμμικές Σ.Δ.Ε. ομογενείς με σταθερούς συντελεστές.

Αυτές τις Σ.Δ.Ε. μπορούμε να τις φέρουμε στην μορφή:

$$L(y(x)) = y^{(n)}(x) + a_{n-1}y^{(n-1)}(x) + ... + a_0 y(x) = 0 \tag{4.16}$$

όπου $a_i, i = 0, 1, ..., n-1$ είναι σταθερές.

Θα μελετήσουμε πρώτα μια γραμμική ομογενή Σ.Δ.Ε. δεύτερης τάξης και μετά θα βγάλουμε συμπεράσματα για την Σ.Δ.Ε. (4.16). Θεωρούμε την Σ.Δ.Ε.:

$$L(y(x)) = y''(x) + a_1 y'(x) + a_0 y(x) = 0 \tag{4.17}$$

Ζητούμε λύσεις της μορφής:

$$y(x) = e^{rx} \tag{4.18}$$

οπότε παραγωγίζουμε και αντικαθιστούμε στην (4.17) και έχουμε:

$$L(e^{rx}) = e^{rx}(r^2 + a_1 r + a_0) = 0 \Rightarrow L(e^{rx}) = e^{rx} f(r) = 0 \tag{4.19}$$

Από την (4.19), επειδή $e^{rx} \neq 0$, έπεται ότι

$$f(r) = 0 \Rightarrow r^2 + a_1 r + a_0 = 0 \tag{4.20}$$

Η εξίσωση (4.20) λέγεται **χαρακτηριστική εξίσωση** της Σ.Δ.Ε. (4.17) και το πολυώνυμο $f(r)$ λέγεται **χαρακτηριστικό πολυώνυμο**, το οποίο είναι δεύτερου βαθμού και διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις για τις ρίζες του, r_1, r_2:

(α) $r_1 \neq r_2 \in \mathbb{R}$. Τότε από την (4.18) παίρνουμε τις συναρτήσεις $y_1(x) = e^{r_1 x}$ και $y_2(x) = e^{r_2 x}$, που είναι λύσεις της (4.17) και είναι και γραμμικώς ανεξάρτητες, διότι η ορίζουσα Wronski αυτών είναι διάφορη από το μηδέν. Πράγματι:

$$W[e^{r_1 x}, e^{r_2 x}] = \begin{vmatrix} e^{r_1 x} & e^{r_2 x} \\ r_1 e^{r_1 x} & r_2 e^{r_2 x} \end{vmatrix} = (r_2 - r_1)e^{(r_1 + r_2)x} \neq 0.$$

Οπότε η γενική λύση της (4.17), σ' αυτή την περίπτωση είναι:

$$y_0(x) = c_1 e^{r_1 x} + c_2 e^{r_2 x}, \quad c_1, c_2 : \text{σταθερές.} \tag{4.21}$$

(β) $r_1 = r_2 = r \in \mathbb{R}$. Τότε από την (4.18) η μια λύση θα είναι η $y_1(x) = e^{rx}$. Εφ' όσον η r είναι διπλή ρίζα της $f(r)$, έπεται ότι θα ισχύει: $f(r) = f'(r) = 0$, οπότε αν παραγωγίσουμε ως προς r την (4.19), θα προκύψει:

$$L(e^{rx}) = e^{rx} f(r) = 0 \Rightarrow$$

$$L(xe^{rx}) = xe^{rx}f(r) + e^{rx}f'(r) = 0$$

δηλαδή η συνάρτηση $y_2(x) = xe^{rx}$ είναι επίσης λύση της (4.17) και επειδή η ορίζουσα Wronski αυτών είναι διάφορη από το μηδέν

$$W[e^{rx}, xe^{rx}] = \begin{vmatrix} e^{rx} & xe^{rx} \\ re^{rx} & e^{rx} + rxe^{rx} \end{vmatrix} = e^{2rx} \neq 0$$

αυτές είναι γραμμικώς ανεξάρτητες και η γενική λύση της (4.17) σ' αυτή την περίπτωση θα είναι:

$$y_0(x) = c_1e^{rx} + c_2xe^{rx}, \quad c_1, c_2 : \text{σταθερές.} \tag{4.22}$$

(γ) $r_1 = k + i\lambda, r_2 = k - i\lambda, \lambda \neq 0$. Τότε από την (4.18) παίρνουμε τις συναρτήσεις $e^{(k+i\lambda)x}$ και $e^{(k-i\lambda)x}$, που είναι λύσεις της (4.17). Χρησιμοποιώντας τον τύπο του Euler, $e^{i\lambda x} = cos(\lambda x) + isin(\lambda x)$, μπορούμε να δείξουμε ότι οι ανωτέρω συναρτήσεις αντιστοιχούν στις συναρτήσεις $y_1(x) = e^{kx}cos(\lambda x)$ και $y_2(x) = e^{kx}sin(\lambda x)$, που είναι λύσεις της (4.17) και είναι γραμμικώς ανεξάρτητες, διότι η ορίζουσα Wronski αυτών είναι διάφορη από το μηδέν. Πράγματι:

$$W[e^{kx}cos(\lambda x), e^{kx}sin(\lambda x)] =$$

$$= \begin{vmatrix} e^{kx}cos(\lambda x) & e^{kx}sin(\lambda x) \\ ke^{kx}cos(\lambda x) - \lambda e^{kx}sin(\lambda x) & ke^{kx}sin(\lambda x) + \lambda e^{kx}cos(\lambda x) \end{vmatrix} = \lambda e^{kx} \neq 0$$

Έτσι, η γενική λύση της (4.17) σ' αυτή την περίπτωση θα είναι:

$$y_0(x) = c_1e^{kx}cos(\lambda x) + c_2e^{kx}sin(\lambda x), \quad c_1, c_2 : \text{σταθερές.} \tag{4.23}$$

Στην γενική περίπτωση, για την Σ.Δ.Ε. (4.16), η χαρακτηριστική εξίσωση θα είναι

$$f(r) = r^n + a_{n-1}r^{n-1} + ... + a_0 = 0 \Rightarrow f(r) = (r - r_1)^{p_1}(r - r_2)^{p_2}...(r - r_m)^{p_m} = 0$$

όπου $p_i, i = 1, ..., m$ είναι η πολλαπλότητα της ρίζας $r_i, i = 1, ..., m$ και $p_1 + ... + p_m = n$. Αν $p_i = 1$, τότε στη ρίζα r_i του χαρακτηριστικού πολυωνύμου θα αντιστοιχεί η λύση $y_i(x) = e^{r_ix}$. Αν $p_i \neq 1$, τότε στην πραγματική ρίζα r_i του χαρακτηριστικού πολυωνύμου θα αντιστοιχούν οι p_i το πλήθος λύσεις: $y_{i1}(x) = e^{r_ix}, y_{i2}(x) = xe^{r_ix}, y_{i3}(x) = x^2e^{r_ix}, ..., y_{ip_i-1}(x) = x^{p_i-1}e^{r_ix}$. Αν $p_i \neq 1$, τότε στις μιγαδικές ρίζες $r_i = k + i\lambda x$ και $\overline{r_i} = k - i\lambda x$ του χαρακτηριστικού πολυωνύμου θα αντιστοιχούν οι λύσεις:

$y_{i1}(x) = e^{r_i x}cos(\lambda x), y_{i2}(x) = xe^{r_i x}cos(\lambda x), ..., y_{ip_i-1}(x) = x^{p_i-1}e^{r_i x}cos(\lambda x)$
$y_{i1}(x) = e^{r_i x}sin(\lambda x), y_{i2}(x) = xe^{r_i x}sin(\lambda x), ..., y_{ip_i-1}(x) = x^{p_i-1}e^{r_i x}sin(\lambda x)$.
Ο γραμμικός συνδυασμός όλων των ανωτέρω λύσεων, που αποδεικνύεται ότι είναι γραμμικώς ανεξάρτητες, θα αποτελεί την γενική λύση της ομογενούς Σ.Δ.Ε. (4.16).

(γ) Εύρεση μερικής λύσης της μη ομογενούς γραμμικής Σ.Δ.Ε. με σταθερούς συντελεστές. Μέθοδος προσδιορισμού των συντελεστών.

Η μέθοδος αυτή εφαρμόζεται **μόνο** σε γραμμικές Σ.Δ.Ε. με σταθερούς συντελεστές και αν η συνάρτηση $g(x)$ στο μη ομογενές μέρος της Σ.Δ.Ε., είναι ή μπορούμε να την φέρουμε στη μορφή:

$$g(x) = e^{ax}[P_{m_1}(x)cos(bx) + P_{m_2}(x)sin(bx)] \tag{4.24}$$

όπου $P_{m_1}(x), P_{m_2}(x)$ είναι πολυώνυμα του x, βαθμού m_1, m_2 αντίστοιχα. Χρησιμοποιώντας τον τύπο του Euler, μπορούμε να γράψουμε:
$cos(bx) = \dfrac{e^{ibx} + e^{-ibx}}{2}$ και $sin(bx) = \dfrac{e^{ibx} - e^{-ibx}}{2i}$, τα οποία αν αντικαταστήσουμε στην (4.24), αυτή θα πάρει την μορφή:

$$g(x) = \left[\frac{1}{2}P_{m_1}(x) + \frac{1}{2i}P_{m_2}(x)\right]e^{(a+ib)x} + \left[\frac{1}{2}P_{m_1}(x) - \frac{1}{2i}P_{m_2}(x)\right]e^{(a-ib)x} \Rightarrow$$

$$g(x) = Q_{1k}(x)e^{(a+ib)x} + Q_{2k}(x)e^{(a-ib)x}$$

με $Q_{1k}(x), Q_{2k}(x)$ είναι πολυώνυμα του x, βαθμού $k = max\{m_1, m_2\}$ καθ' ένα. Αν ο μιγαδικός, εν γένει αριθμός, $a + ib$ είναι ρίζα του χαρακτηριστικού πολυωνύμου, πολλαπλότητας s, (αν δεν είναι ρίζα, τότε $s = 0$), τότε ζητούμε η μερική λύση της μη ομογενούς Σ.Δ.Ε. να είναι της μορφής:

$$y_\mu(x) = x^s e^{ax}[R_{1k}(x)cos(bx) + R_{2k}(x)sin(bx)] \tag{4.25}$$

όπου $R_{1k}(x), R_{2k}(x)$ είναι πολυώνυμα του x, βαθμού $k = max\{m_1, m_2\}$ καθ' ένα. Παραγωγίζουμε την (4.25) τόσες φορές όσες και η τάξη της Σ.Δ.Ε., αντικαθιστούμε σ' αυτήν και υπολογίζουμε τους συντελεστές των πολυωνύμων $R_{1k}(x)$ και $R_{2k}(x)$, αντικαθιστούμε στην (4.25) και έχουμε την μερική λύση που ζητούμε.

Παρατήρηση 4.5 Αν η συνάρτηση που έχουμε στο δεύτερο μέλος της μη ομογενούς Σ.Δ.Ε. αποτελείται από άθροισμα συναρτήσεων, κάθε μία από τις οποίες ανήκει στην μορφή (4.24), τότε η μερική λύση θα αποτελείται από άθροισμα μερικών λύσεων, που κάθε μία εξ' αυτών θα αντιστοιχεί σε μία συνάρτηση από το ανωτέρω άθροισμα.

Παράδειγμα 7 Να βρεθεί η γενική λύση των κάτωθι Σ.Δ.Ε.:

1) $y''(x) + 3y'(x) - 4y(x) = 0.$

Ζητούμε λύση της μορφής $y(x) = e^{rx}$ και η χαρακτηριστική εξίσωση είναι:

$$r^2 + 3r - 4 = 0 \Rightarrow \begin{cases} r_1 = 1 \\ r_2 = -4 \end{cases} .$$

Οι γραμμικώς ανεξάρτητες λύσεις της δοθείσας Σ.Δ.Ε. είναι $y_1(x) = e^x$ και $y_2(x) = e^{-4x}$ και η γενική λύση αυτής, θα είναι:

$y_0(x) = c_1 e^x + c_2 e^{-4x}, \quad c_1, c_2$ σταθερές.

2) $y'''(x) - y'(x) = 0$

Ζητούμε λύση της μορφής $y(x) = e^{rx}$ και η χαρακτηριστική εξίσωση είναι:

$$r^3 - r = 0 \Rightarrow r(r^2 - 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} r_1 = 0 \\ r_2 = 1 \\ r_3 = -1 \end{cases} .$$

Οι γραμμικώς ανεξάρτητες λύσεις της δοθείσας Σ.Δ.Ε. είναι $y_1(x) = 1$, $y_2(x) = e^x$ και $y_3(x) = e^{-x}$ και η γενική λύση αυτής, θα είναι:

$y_0(x) = c_1 + c_2 e^x + c_3 e^{-x}, \quad c_1, c_2, c_3$ σταθερές.

3) $y'''(x) - 3y'(x) + 2y(x) = 0$

Ζητούμε λύση της μορφής $y(x) = e^{rx}$ και η χαρακτηριστική εξίσωση είναι:

$$r^3 - 3r + 2 = 0 \Rightarrow (r-1)(r^2 + r - 2) = 0 \Rightarrow (r-1)^2(r+2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} r_1 = 1 \\ r_2 = 1 \\ r_3 = -2 \end{cases} .$$

Οι γραμμικώς ανεξάρτητες λύσεις της δοθείσας Σ.Δ.Ε. είναι $y_1(x) = e^x$,

$y_2(x) = xe^x$ και $y_3(x) = e^{-2x}$ και η γενική λύση αυτής, θα είναι:

$y_0(x) = c_1e^x + c_2xe^x + c_3e^{-2x}, \quad c_1, c_2, c_3$ σταθερές.

4) $y^{(4)}(x) - y(x) = 0$

Ζητούμε λύση της μορφής $y(x) = e^{rx}$ και η χαρακτηριστική εξίσωση είναι:

$$r^4 - 1 = 0 \Rightarrow (r^2+1)(r^2-1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} r_1 = 1, r_2 = -1 \\ r_3 = i, r_4 = -i \end{cases}.$$

Οι γραμμικώς ανεξάρτητες λύσεις της δοθείσας Σ.Δ.Ε. είναι $y_1(x) = e^x$, $y_2(x) = e^{-x}$, $y_3(x) = cosx$ και $y_4(x) = sinx$ και η γενική λύση αυτής, θα είναι:

$y_0(x) = c_1e^x + c_2e^{-x} + c_3cosx + c_4sinx, \quad c_1, c_2, c_3, c_4$ σταθερές.

5) $y''' - y'' - y' + y = 0$

Ζητούμε λύση της μορφής $y(x) = e^{rx}$ και η χαρακτηριστική εξίσωση είναι:

$$r^3 - r^2 - r + 1 = 0 \Rightarrow r^2(r-1) - (r-1) = 0 \Rightarrow$$
$$(r-1)(r^2-1) = 0 \Rightarrow (r-1)^2(r+1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} r_1 = -1 \\ r_2 = r_3 = 1 \end{cases}$$

Οι γραμμικώς ανεξάρτητες λύσεις της δοθείσας Σ.Δ.Ε. είναι $y_1(x) = e^{-x}$, $y_2(x) = e^x$ και $y_3(x) = xe^x$ και η γενική λύση αυτής, θα είναι:

$y_0(x) = c_1e^{-x} + (c_2 + c_3x)e^x$

6) $y^{(4)} - 4y''' + 4y'' = 0$

Ζητούμε λύση της μορφής $y(x) = e^{rx}$ και η χαρακτηριστική εξίσωση είναι:

$$r^4 - 4r^3 + 4r^2 = 0 \Rightarrow r^2(r^2 - 4r + 4) = 0 \Rightarrow r^2(r-2)^2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} r_1 = r_2 = 0 \\ r_3 = r_4 = 2 \end{cases}$$

Οι γραμμικώς ανεξάρτητες λύσεις της δοθείσας Σ.Δ.Ε. είναι $y_1(x) = 1$, $y_2(x) = x$, $y_3(x) = e^{2x}$, $y_4(x) = xe^{2x}$ και η γενική λύση αυτής, θα είναι:

$y_0(x) = c_1 + c_2x + (c_3 + c_4x)e^{2x}$

7) $2y''' - 4y'' - 2y' + 4y = 0$

Ζητούμε λύση της μορφής $y(x) = e^{rx}$ και η χαρακτηριστική εξίσωση είναι:

$2r^3 - 4r^2 - 2r + 4 = 0 \Rightarrow 2r^2(r-2) - 2(r-2) = 0 \Rightarrow (r^2-1)(r-2) = 0 \Rightarrow$

$$(r+1)(r-1)(r-2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} r_1 = -1 \\ r_2 = 1 \\ r_3 = 2 \end{cases}$$

Οι γραμμικώς ανεξάρτητες λύσεις της δοθείσας Σ.Δ.Ε. είναι $y_1(x) = e^{-x}$, $y_2(x) = e^x$ και $y_3(x) = e^{2x}$ και η γενική λύση αυτής, θα είναι:

$y_0(x) = c_1e^{-x} + c_2e^x + c_3e^{2x}$

8) $y^{(4)} - 8y' = 0$

Ζητούμε λύση της μορφής $y(x) = e^{rx}$ και η χαρακτηριστική εξίσωση είναι:

$r^4 - 8r = 0 \Rightarrow r(r^3 - 8) = 0 \Rightarrow r(r^3 - 2^3) = 0 \Rightarrow r(r-2)(r^2 + 2r + 4) = 0$

$$\Rightarrow \begin{cases} r_1 = 0 \\ r_2 = 2 \\ r_3 = -1 + i\sqrt{3} \\ r_4 = -1 - i\sqrt{3} \end{cases}$$

Οι γραμμικώς ανεξάρτητες λύσεις της δοθείσας Σ.Δ.Ε. είναι $y_1(x) = 1$, $y_2(x) = e^{2x}$, $y_3(x) = e^{-x}cos\sqrt{3}x$ και $y_4(x) = e^{-x}sin\sqrt{3}x$ και η γενική λύση αυτής, θα είναι:

$y_0(x) = c_1 + c_2e^{2x} + e^{-x}(c_3cos\sqrt{3}x + c_4sin\sqrt{3}x)$

Παράδειγμα 8 Να κατασκευαστεί η γραμμική δ.ε. με σταθερούς συντελεστές που η γενική της λύση είναι: $y(x) = c_1e^x + c_2xe^x + c_3x^2e^x + c_4e^{-x}$.

Λύση

Οι ρίζες του χαρακτηριστικού πολυωνύμου θα είναι: $r_1 = r_2 = r_3 = 1$

και $r_4 = -1$.

Άρα το χαρακτηριστικό πολυώνυμο θα είναι:

$(r-1)^3(r+1) = 0 \Rightarrow r^4 - 2r^3 + 2r - 1 = 0$

και η δ.ε.:

$y^{(4)} - 2y''' + 2y' - y = 0$.

Παράδειγμα 9 Να κατασκευαστεί η γραμμική δ.ε. με σταθερούς συντελεστές που η γενική της λύση είναι: $y(x) = c_1 coshx + c_2 sinhx + c_3 e^{2x}$.

Λύση

Λαμβάνοντας υπ' όψιν μας ότι $coshx = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$ και $sinhx = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$ η λύση μπορεί να γραφεί ως εξής: $y(x) = c_1\dfrac{e^x + e^{-x}}{2} + c_2\dfrac{e^x - e^{-x}}{2} + c_3e^{2x} \Rightarrow$

$y(x) = \dfrac{c_1 + c_2}{2}e^x + \dfrac{c_1 - c_2}{2}e^{-x} + c_3e^{2x}$

Οι ρίζες του χαρακτηριστικού πολυωνύμου θα είναι: $r_1 = 1$, $r_2 = -1$ και $r_3 = 2$.

Άρα το χαρακτηριστικό πολυώνυμο θα είναι:

$(r-1)(r+1)(r-2) = 0 \Rightarrow (r^2-1)(r-2) = 0 \Rightarrow r^3 - 2r^2 - r + 2 = 0$

και η δ.ε.:

$y''' - 2y'' - y' + 2y = 0$.

Παράδειγμα 10 Να βρεθεί η γραμμική, ομογενής 3ης τάξης δ.ε. με σταθερούς συντελεστές, της οποίας το χαρακτηριστικό πολυώνυμο έχει διπλή ρίζα το -1 και απλή το 2. Να γραφεί η γενική λύση αυτής.

Λύση

Οι ρίζες του χαρακτηριστικού πολυωνύμου είναι: $r_1 = r_2 = -1$ και $r_3 = 2$.

Άρα το χαρακτηριστικό πολυώνυμο θα είναι:

$(r+1)^2(r-2) = 0 \Rightarrow (r^2+2r+1)(r-2) = 0 \Rightarrow r^3 - 3r - 2 = 0$

και η δ.ε.:

$y''' - 3y' - 2y = 0.$

Η γενική λύση είναι:

$y(x) = c_1 e^{-x} + c_2 x e^{-x} + c_3 e^{2x}.$

Παράδειγμα 11 Να κατασκευαστεί γραμμική, ομογενής 2ης τάξης δ.ε. με σταθερούς συντελεστές, όπου μια λύση της είναι η $y_1(x) = xe^{-5x}$. Να βρείτε τη γενική λύση αυτής.

Λύση

Η ζητούμενη Σ.Δ.Ε. θα έχει τη μορφή $ay'' + by' + cy = 0$.

Η $y_1(x)$ είναι λύση της οπότε θα την ικανοποιεί. Έτσι:

$a(-10e^{-5x} + 25xe^{-5x}) + b(e^{-5x} - 5xe^{-5x}) + c(xe^{-5x}) = 0 \Rightarrow$

$a(-10+25x)+b(1-5x)+cx = 0 \Rightarrow \begin{cases} b - 10a = 0 \\ c - 5b + 25a = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = 10a \\ c = -25a + 50a = 25a \end{cases}$

Οπότε η δ.ε. είναι:

$y'' + 10y' + 25y = 0$

Ζητούμε λύση της μορφής $y(x) = e^{rx}$ και η χαρακτηριστική εξίσωση είναι:

$r^2 + 10r + 25 = 0 \Rightarrow (r+5)^2 = 0 \Rightarrow r_1 = r_2 = -5$

Η γενική λύση είναι:

$y(x) = c_1 e^{-5x} + c_2 x e^{-5x}$

Παράδειγμα 12 **α)** Να δείξετε ότι οι συναρτήσεις $y_1(x) = 1, y_2(x) = e^{2x}$, $y_3(x) = e^{-2x}$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητες $\forall x \in \mathbb{R}$.
β) Να βρείτε την ομογενή γραμμική 3ης τάξης δ.ε. που έχει για θεμελιώδες σύνολο λύσεων τις y_1, y_2, y_3.
γ) Να βρείτε τη λύση της δ.ε. που ικανοποιεί τις συνθήκες $y(0) = 0$, $y'(0) = 1, y''(0) = 0$.

Λύση

α) Παίρνουμε την ορίζουσα Wronski των συναρτήσεων $y_1(x), y_2(x), y_3(x)$:

$\begin{vmatrix} 1 & e^{2x} & e^{-2x} \\ 0 & 2e^{2x} & -2e^{-2x} \\ 0 & 4e^{2x} & 4e^{-2x} \end{vmatrix} = 8 + 8 = 16 \neq 0$, άρα είναι γραμμικώς ανεξάρτητες.

β) Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο θα είναι: $r(r-2)(r+2) = 0 \Rightarrow r^3 - 4r = 0$

και η δ.ε.:

$y''' - 4y' = 0$

ή θεωρώντας $ay''' + by'' + cy' + dy = 0$.

Όμως η $y(x) = 1$ είναι λύση της οπότε $d = 0$ και η δ.ε. γίνεται:

$ay''' + by'' + cy' = 0$

Η $y(x) = e^{2x}$ είναι λύση της οπότε:

$8ae^{2x} + 4be^{2x} + c2e^{2x} = 0 \Rightarrow 8a + 4b + 2c = 0 \Rightarrow 4a + 2b + c = 0$

Επίσης, η $y(x) = e^{-2x}$ είναι λύση της οπότε:

$-8ae^{-2x} + 4be^{-2x} - c2e^{-2x} = 0 \Rightarrow -8a + 4b - 2c = 0 \Rightarrow -4a + 2b - c = 0$

Από αυτές τις δύο σχέσεις προκύπτει $b = 0$ και $c = -4a$ οπότε η δ.ε. γίνεται:

$ay''' - 4ay' = 0 \Rightarrow y''' - 4y' = 0.$

γ) Η γενική λύση της δ.ε. θα έχει την μορφή: $y(x) = c_1 + c_2e^{2x} + c_3e^{-2x}$.
Επειδή οι αρχικές συνθήκες αναφέρονται στις y, y', y'' υπολογίζουμε τις παραγώγους:

$$\begin{cases} y(x) = c_1 + c_2e^{2x} + c_3e^{-2x} \\ y'(x) = 2c_2e^{2x} - 2c_3e^{-2x} \\ y''(x) = 4c_2e^{2x} + 4c_3e^{-2x} \end{cases}$$

Θέτοντας τις συνθήκες προκύπτει το σύστημα:

$$\begin{cases} y(0) = 0 \Rightarrow c_1 = 0 \\ y'(0) = 1 \Rightarrow 2c_2 - 2c_3 = 1 \\ y''(0) = 0 \Rightarrow 4c_2 + 4c_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1 = 0 \\ c_2 = \dfrac{1}{4} \\ c_3 = -\dfrac{1}{4} \end{cases}$$

Άρα η λύση της δ.ε. είναι:

$$y(x) = \frac{1}{4}(e^{2x} - e^{-2x}) = \frac{sinh2x}{2}.$$

Παράδειγμα 13 Να βρεθεί η γενική λύση της Σ.Δ.Ε.:
$y'''(x) - 4y'(x) = x + 3cosx + e^{-2x}$

Λύση

Κατ' αρχάς θα λύσουμε την αντίστοιχη ομογενή:

$$y'''(x) - 4y'(x) = 0$$

Ζητούμε λύση της μορφής $y(x) = e^{rx}$ και η χαρακτηριστική εξίσωση είναι:

$$r^3 - 4r = 0 \Rightarrow r(r-2)(r+2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} r_1 = 0 \\ r_2 = 2 \\ r_3 = -2 \end{cases}.$$

Οι γραμμικώς ανεξάρτητες λύσεις της δοθείσας Σ.Δ.Ε. είναι $y_1(x) = 1$, $y_2(x) = e^{2x}$, $y_3(x) = e^{-2x}$ και η γενική λύση αυτής, θα είναι:

$$y_0(x) = c_1 + c_2e^{2x} + c_3e^{-2x}, \quad c_1, c_2, c_3 \text{ σταθερές.}$$

Η συνάρτηση $g(x) = x + 3cosx + e^{-2x}$ είναι άθροισμα τριών συναρτήσεων κάθε μία της μορφής (4.24), οπότε και η μερική λύση θα είναι άθροισμα των μερικών λύσεων των Σ.Δ.Ε.

$$y'''(x) - 4y'(x) = x \qquad (4.25.a)$$

$$y'''(x) - 4y'(x) = 3cosx \qquad (4.25.\text{β})$$

$$y'''(x) - 4y'(x) = e^{-2x} \qquad (4.25.\text{γ})$$

Για την μερική λύση $y_1(x)$ της (4.25.α): Η συνάρτηση x είναι της μορφής (4.24), διότι γράφεται:

$$x = e^{0x}[xcos(0x) + 0sin(0x)].$$

Παρατηρούμε επίσης ότι ο μιγαδικός αριθμός $0 + 0i$ είναι απλή ρίζα του χαρακτηριστικού πολυωνύμου, δηλαδή πολλαπλότητας $s = 1$. Άρα η μορφή της μερικής λύσης της (4.25.α), θα είναι, λόγω της (4.25):

$$y_1(x) = x(Ax + B).$$

Παραγωγίζουμε τρείς φορές, αντικαθιστούμε στην (4.25.α) και υπολογίζουμε τα A, B. Έτσι:

$$y_1(x) = Ax^2 + Bx, y_1'(x) = 2Ax + B, y_1''(x) = 2A, y_1'''(x) = 0$$

$$y_1'''(x) - 4y_1'(x) = x \Rightarrow -4(2Ax + B) = x \Rightarrow -8Ax - 4B = x \Rightarrow \begin{cases} A = -\dfrac{1}{8} \\ B = 0 \end{cases}$$

Άρα: $y_1(x) = -\dfrac{1}{8}x^2$

Για την μερική λύση $y_2(x)$ της (4.25.β): Η συνάρτηση $cosx$ είναι της μορφής (4.24), διότι γράφεται:

$$3cosx = e^{0x}[3cos(x) + 0sin(x)].$$

Παρατηρούμε επίσης ότι ο μιγαδικός αριθμός $0 + i = i$ δεν είναι ρίζα του χαρακτηριστικού πολυωνύμου, δηλαδή είναι πολλαπλότητας $s = 0$. Άρα η μορφή της μερικής λύσης της (4.25.β), θα είναι, λόγω της (4.25):

$y_2(x) = Acosx + Bsinx$

Παραγωγίζουμε:

$y_2'(x) = -Asinx + Bcosx, y_2''(x) = -Acosx - Bsinx, y_2'''(x) = Asinx - Bcosx$

και αντικαθιστούμε στην (4.25.β)
$y_2'''(x) - 4y_2'(x) = 3cosx \Rightarrow Asinx - Bcosx + 4Asinx - 4Bcosx = 3cosx \Rightarrow$
$\Rightarrow 5Asinx - 5Bcosx = 3cosx \Rightarrow \begin{cases} A = 0 \\ B = -\dfrac{3}{5} \end{cases}$
Άρα: $y_2(x) = -\dfrac{3}{5}sinx$

Για την μερική λύση $y_3(x)$ της (4.25.γ): Η συνάρτηση e^{-2x} είναι της μορφής (4.24), διότι γράφεται:

$e^{-2x} = e^{-2x}[1cos(0x) + 0sin(0x)].$

Παρατηρούμε επίσης ότι ο μιγαδικός αριθμός $-2 + 0i = -2$ είναι απλή ρίζα του χαρακτηριστικού πολυωνύμου, δηλαδή πολλαπλότητας $s = 1$. Άρα η μορφή της μερικής λύσης της (4.25.γ), θα είναι, λόγω της (4.25):

$y_3(x) = Axe^{-2x}.$

Παραγωγίζουμε τρείς φορές, αντικαθιστούμε στην (4.25.γ) και υπολογίζουμε τα A, B. Έτσι:

$y_3'(x) = -2Axe^{-2x} + Ae^{-2x}, y_3''(x) = 4Axe^{-2x} - 4Ae^{-2x},$
$y_3'''(x) = -8Axe^{-2x} + 12Ae^{-2x}$

$y_3'''(x) - 4y_3'(x) = e^{-2x} \Rightarrow -8Axe^{-2x} + 12Ae^{-2x} + 8Axe^{-2x} - 4Ae^{-2x} = e^{-2x} \Rightarrow$

$\Rightarrow 8Ae^{-2x} = e^{-2x} \Rightarrow A = \dfrac{1}{8}$

Άρα: $y_3(x) = \dfrac{1}{8}e^{-2x}$

Οπότε η μερική λύση της δοθείσας Σ.Δ.Ε. είναι το άθροισμα:

$y_\mu = -\dfrac{1}{8}x^2 - \dfrac{3}{5}sinx + \dfrac{1}{8}e^{-2x}$

και η γενική λύση αυτής:

$$y(x) = c_1 + c_2e^{2x} + c_3e^{-2x} - \frac{1}{8}x^2 - \frac{3}{5}sinx + \frac{1}{8}e^{-2x} \Rightarrow$$
$$y(x) = c_1 + c_2e^{2x} + c_3e^{-2x} - \frac{1}{8}x^2 - \frac{3}{5}sinx$$

Παράδειγμα 14 Να δείξετε ότι οι συναρτήσεις: $y_1(x) = x$ και $y_2(x) = e^{-x}$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητες λύσεις της Σ.Δ.Ε. $(x+1)y''(x)+xy'(x)-y(x) = 0, x > 0$. Κατόπιν να βρείτε την γενική λύση της Σ.Δ.Ε.:
$(x+1)y''(x) + xy'(x) - y(x) = (x+1)^2$.

Λύση
Επειδή
$y_1(x) = x, y_1'(x) = 1, y_1''(x) = 0,$
αντικαθιστούμε στο πρώτο μέλος της δοθείσας ομογενούς Σ.Δ.Ε.:

$$(x+1)y_1''(x) + xy_1(x) - y_1(x) = x - x = 0,$$

οπότε η $y_1(x) = x$ είναι λύση αυτής. Ομοίως,

$$y_2(x) = e^{-x}, y_2'(x) = -e^{-x}, y_2''(x) = e^{-x},$$
$$(x+1)y_2''(x) + xy_2(x) - y_2(x) = (x+1)e^{-x} + xe^{-x} - e^{-x} = 0$$

και η $y_2(x) = e^{-x}$ είναι λύση της ίδιας ομογενούς Σ.Δ.Ε. Η ορίζουσα Wronski αυτών είναι:

$$W[x, e^{-x}] = \begin{vmatrix} x & e^{-x} \\ 1 & -e^{-x} \end{vmatrix} = -(x+1)e^{-x} \neq 0$$

Άρα είναι γραμμικώς ανεξάρτητες λύσεις της ομογενούς, οπότε η γενική λύση της ομογενούς Σ.Δ.Ε. είναι

$$y_0(x) = c_1x + c_2e^{-x}, \quad c_1, c_2 \quad \text{σταθερές}$$

Η μερική λύση της μη ομογενούς, σύμφωνα με τη μέθοδο Lagrange θα έχει την μορφή:

$$y_\mu(x) = c_1(x)x + c_2(x)e^{-x}$$

Οι παράγωγοι των συναρτήσεων $c_1(x), c_2(x)$, ικανοποιούν το σύστημα:

$c_1'(x)x + c_2'(x)e^{-x} = 0$

$c_1'(x) - c_2'(x)e^{-x} = x + 1$

Λύνουμε το σύστημα και βρίσκουμε:

$c_1'(x) = 1 \Rightarrow c_1(x) = x$
$c_2'(x) = -xe^{x} \Rightarrow c_2(x) = (-x+1)e^{x}$

Οπότε η μερική λύση θα είναι:

$y_\mu(x) = xx + (-x+1)e^{x}e^{-x} = x^2 - x + 1$

και η γενική λύση της μη ομογενούς, θα είναι:

$y(x) = c_1 x + c_2 e^{-x} + x^2 - x + 1 \Rightarrow y(x) = c_1 x + c_2 e^{-x} + x^2 + 1.$

Παράδειγμα 15 Να βρεθεί η γενική λύση της Σ.Δ.Ε.
$(x'''(t) + x'(t))sint + (x''(t) + x(t))cost = 0.$

Λύση
Παρατηρούμε ότι η δοθείσα Σ.Δ.Ε. είναι με μη σταθερούς συντελεστές, όμως μπορεί να γραφεί:

$(x'''(t) + x'(t))sint + (x''(t) + x(t))cost = 0 \Rightarrow$
$(x''(t) + x(t))'sint + (x''(t) + x(t))(sint)' = 0 \Rightarrow$
$((x''(t) + x(t))sint)' = 0 \Rightarrow (x''(t) + x(t))sint = c \Rightarrow$
$x''(t) + x(t) = \dfrac{c}{sint}$

Η Σ.Δ.Ε. $x''(t) + x(t) = \dfrac{c}{sint}$ είναι με σταθερούς συντελεστές μη ομογενής. Λύνουμε πρώτα την αντίστοιχη ομογενή: $x''(t) + x(t) = 0$. Ζητούμε λύση της μορφής $x(t) = e^{rt}$ και η χαρακτηριστική εξίσωση είναι $r^2 + 1 = 0$ που έχει ρίζες το $\pm i$, άρα οι γραμμικώς ανεξάρτητες λύσεις της ομογενούς θα είναι $x_1(t) = cost$ και $x_2(t) = sint$ και η γενική λύση της ομογενούς:

$x_0(t) = c_1 cost + c_2 sint, \quad c_1, c_2$ σταθερές.

Για την μερική λύση της μη ομογενούς δεν μπορούμε να εφαρμόσουμε την μέθοδο προσδιορισμού των συντελεστών, γιατί η συνάρτηση $\dfrac{c}{sint}$ δεν ανήκει στην μορφή (4.24). Θα χρησιμοποιήσουμε λοιπόν τη μέθοδο μεταβολής των παραμέτρων. Η μερική λύση λοιπόν, θα έχει την μορφή

$$x_\mu(t) = c_1(t)cost + c_2(t)sint$$

Οι παράγωγοι των συναρτήσεων $c_1(t), c_2(t)$, ικανοποιούν το σύστημα:

$$c_1'(t)cost + c_2'(t)sint = 0$$

$$-c_1'(t)sint + c_2'(t)cost = \frac{c}{sint}$$

Λύνουμε το σύστημα και βρίσκουμε:

$$c_1'(t) = -c \Rightarrow c_1(t) = -ct$$

$$c_2'(t) = c\frac{cost}{sint} \Rightarrow c_2(t) = cln|sint|$$

Οπότε η μερική λύση θα είναι:

$$x_\mu(t) = -ctcost - csintln|sint|$$

και η γενική λύση της μη ομογενούς, θα είναι:

$$x(t) = c_1cost + c_2sint - ctcost - csintln|sint|.$$

Παράδειγμα 16 Να λυθεί η Σ.Δ.Ε.: $y''(x) + 9y(x) = x^2e^{3x} + 6$.

Λύση

Κατ' αρχάς θα λύσουμε την αντίστοιχη ομογενή:

$$y''(x) + 9y(x) = 0$$

Ζητούμε λύση της μορφής $y(x) = e^{rx}$ και η χαρακτηριστική εξίσωση είναι:

$$r^2 + 9 = 0 \Rightarrow r^2 = -9 \Rightarrow \begin{cases} r_1 = 3i \\ r_2 = -3i \end{cases}$$

Οι γραμμικώς ανεξάρτητες λύσεις της δοθείσας Σ.Δ.Ε. είναι $y_1(x) = cos3x$ και $y_2(x) = sin3x$ και η γενική λύση αυτής, θα είναι:

$y_0(x) = c_1cos3x + c_2sin3x, \quad c_1, c_2$ σταθερές.

Η συνάρτηση $g(x) = x^2e^{3x} + 6$ είναι άθροισμα δύο συναρτήσεων κάθε μία της μορφής (4.24), οπότε και η μερική λύση θα είναι άθροισμα των μερικών λύσεων των Σ.Δ.Ε.

$y''(x) + 9y(x) = x^2e^{3x} \quad (1)$

$y''(x) + 9y(x) = 6 \quad (2)$

Για την μερική λύση $y_1(x)$ της (1): Η συνάρτηση x είναι της μορφής (4.24), διότι γράφεται:

$x^2e^{3x} = e^{3x}[x^2cos(0x) + 0sin(0x)].$

Παρατηρούμε επίσης ότι ο μιγαδικός αριθμός $3 + 0i$ δεν είναι ρίζα του χαρακτηριστικού πολυωνύμου, δηλαδή πολλαπλότητας $s = 0$. Άρα η μορφή της μερικής λύσης της (1), θα είναι, λόγω της (4.25):

$y_1(x) = e^{3x}(Kx^2 + \Lambda x + M).$

Παραγωγίζουμε δύο φορές, αντικαθιστούμε στην (1) και υπολογίζουμε τα K, Λ, M. Έτσι:

$y_1(x) = e^{3x}(Kx^2 + \Lambda x + M), \; y_1'(x) = 3e^{3x}(Kx^2 + \Lambda x + M) + e^{3x}(2Kx + \Lambda),$

$y_1''(x) = 9e^{3x}(Kx^2 + \Lambda x + M) + 6e^{3x}(2Kx + \Lambda) + e^{3x}2K$

$y_1''(x) + 9y(x) = x^2e^{3x} \Rightarrow$

$9e^{3x}(Kx^2+\Lambda x+M)+6e^{3x}(2Kx+\Lambda)+e^{3x}2K+9e^{3x}(Kx^2+\Lambda x+M) = x^2e^{3x} \Rightarrow$

$18(Kx^2 + \Lambda x + M) + 6(2Kx + \Lambda) + 2K = x^2 \Rightarrow$

$18Kx^2 + (18\Lambda + 12K)x + (18M + 6\Lambda + 2K) = x^2 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} 18K = 1 \\ 18\Lambda + 12K = 0 \\ 18M + 6\Lambda + 2K = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} K = \dfrac{1}{18} \\ \Lambda = -\dfrac{1}{27} \\ M = \dfrac{1}{162} \end{cases}$$

Άρα: $y_1(x) = e^{3x}\left(\dfrac{x^2}{18} - \dfrac{x}{27} + \dfrac{1}{162}\right)$

Για την μερική λύση $y_2(x)$ της (2): Η συνάρτηση x είναι της μορφής (4.24), διότι γράφεται:

$$6 = e^{0x}[6cos(0x) + 0sin(0x)].$$

Παρατηρούμε επίσης ότι ο μιγαδικός αριθμός $0 + 0i$ δεν είναι ρίζα του χαρακτηριστικού πολυωνύμου, δηλαδή πολλαπλότητας $s = 0$. Άρα η μορφή της μερικής λύσης της (2), θα είναι, λόγω της (4.25):

$$y_2(x) = K.$$

Παραγωγίζουμε δύο φορές, αντικαθιστούμε στην (2) και υπολογίζουμε το K. Έτσι:

$$y_2(x) = k, y_2'(x) = 0, y_2''(x) = 0$$

$$y_2''(x) + 9y_2(x) = 6 \Rightarrow 9K = 6 \Rightarrow K = \frac{2}{3}$$

Άρα: $y_2(x) = \dfrac{2}{3}$

Οπότε η μερική λύση της δοθείσας Σ.Δ.Ε. είναι το άθροισμα:

$$y_\mu(x) = e^{3x}\left(\frac{x^2}{18} - \frac{x}{27} + \frac{1}{162}\right) + \frac{2}{3}$$

και η γενική λύση αυτής:

$$y(x) = c_1cos3x + c_2sin3x + e^{3x}\left(\frac{x^2}{18} - \frac{x}{27} + \frac{1}{162}\right) + \frac{2}{3}$$

Παράδειγμα 17 Να λυθεί η Σ.Δ.Ε.: $y''(x) + 4y'(x) + 4y(x) = 8e^{-2x}$.

Λύση

Κατ' αρχάς θα λύσουμε την αντίστοιχη ομογενή:

$y''(x) + 4y'(x) + 4y(x) = 0$

Ζητούμε λύση της μορφής $y(x) = e^{rx}$ και η χαρακτηριστική εξίσωση είναι:

$r^2 + 4r + 4 = 0 \Rightarrow (r+2)^2 = 0 \Rightarrow r_1 = r_2 = -2$

Οι γραμμικώς ανεξάρτητες λύσεις της δοθείσας Σ.Δ.Ε. είναι $y_1(x) = e^{-2x}$ και $y_2(x) = xe^{-2x}$ και η γενική λύση αυτής, θα είναι:

$y_0(x) = c_1 e^{-2x} + c_2 x e^{-2x}, \quad c_1, c_2$ σταθερές.

Για την μερική λύση $y_\mu(x)$: Η συνάρτηση x είναι της μορφής (4.24), διότι γράφεται:

$8e^{-2x} = e^{-2x}[8cos(0x) + 0sin(0x)].$

Παρατηρούμε επίσης ότι ο μιγαδικός αριθμός $-2 + 0i$ είναι διπλή ρίζα του χαρακτηριστικού πολυωνύμου, δηλαδή πολλαπλότητας $s = 2$. Άρα η μορφή της μερικής λύσης, θα είναι, λόγω της (4.25):

$y_\mu(x) = Kx^2 e^{-2x}.$

Παραγωγίζουμε δύο φορές, αντικαθιστούμε στην αρχική δ.ε. και υπολογίζουμε το K. Έτσι:

$y_\mu(x) = Kx^2 e^{-2x}, y'_\mu(x) = 2Kxe^{-2x} - 2Kx^2 e^{-2x},$
$y''_\mu(x) = 4Kx^2 e^{-2x} - 8Kxe^{-2x} + 2Ke^{-2x}$

$y''_\mu(x) + 4y'_\mu(x) + 4y_\mu(x) = 8e^{-2x} \Rightarrow$

$4Kx^2e^{-2x} - 8Kxe^{-2x} + 2Ke^{-2x} + 4(2Kxe^{-2x} - 2Kx^2e^{-2x}) + 4Kx^2e^{-2x} = 8e^{-2x}$

$\Rightarrow 2Ke^{-2x} = 8e^{-2x} \Rightarrow 2K = 8 \Rightarrow K = 4$

Οπότε η μερική λύση της δοθείσας Σ.Δ.Ε. είναι:

$y_\mu(x) = 4x^2 e^{-2x}$

και η γενική λύση αυτής:

$y(x) = c_1 e^{-2x} + c_2 x e^{-2x} + 4x^2 e^{-2x}$

Παράδειγμα 18 Να λυθεί η Σ.Δ.Ε.: $y''(x) + y(x) = 4xcosx$.

Λύση

Κατ' αρχάς θα λύσουμε την αντίστοιχη ομογενή:

$y''(x) + y(x) = 0$

Ζητούμε λύση της μορφής $y(x) = e^{rx}$ και η χαρακτηριστική εξίσωση είναι:

$$r^2 + 1 = 0 \Rightarrow r^2 = -1 \Rightarrow \begin{cases} r_1 = i \\ r_2 = -i \end{cases}$$

Οι γραμμικώς ανεξάρτητες λύσεις της δοθείσας Σ.Δ.Ε. είναι $y_1(x) = cosx$ και $y_2(x) = sinx$ και η γενική λύση αυτής, θα είναι:

$y_0(x) = c_1 cosx + c_2 sinx, \quad c_1, c_2$ σταθερές.

Για την μερική λύση $y_\mu(x)$: Η συνάρτηση x είναι της μορφής (4.24), διότι γράφεται:

$4xcosx = e^{0x}[4xcos(x) + 0sin(x)]$.

Παρατηρούμε επίσης ότι ο μιγαδικός αριθμός $0+i$ είναι απλή ρίζα του χαρακτηριστικού πολυωνύμου, δηλαδή πολλαπλότητας $s = 1$. Άρα η μορφή της μερικής λύσης, θα είναι, λόγω της (4.25):

$y_\mu(x) = x[(Ax+B)cosx+(Kx+\Lambda)sinx] = (Ax^2+Bx)cosx+(Kx^2+\Lambda x)sinx.$

Παραγωγίζουμε δύο φορές, αντικαθιστούμε στην αρχική δ.ε. και υπολογίζουμε τα A, B, K, Λ. Έτσι:

$y_\mu(x) = (Ax^2 + Bx)cosx + (Kx^2 + \Lambda x)sinx,$

$y'_{\mu}(x) = [Kx^2 + (2A + \Lambda)x + B]cosx - [Ax^2 + (B - 2K)x - \Lambda]sinx,$

$y''_{\mu}(x) = (-Ax^2+4Kx-Bx+2A+2\Lambda)cosx-(Kx^2+4Ax+\Lambda x+2B-2K)sinx$

$y''_{\mu}(x) + y_{\mu}(x) = 4xcosx \Rightarrow$

$(-Ax^2 + 4Kx - Bx + 2A + 2\Lambda)cosx - (Kx^2 + 4Ax + \Lambda x + 2B - 2K)sinx +$
$(Ax^2 + Bx)cosx + (Kx^2 + \Lambda x)sinx = 4xcosx \Rightarrow$

$(4Kx + 2A + 2\Lambda)cosx + (-4Ax - 2B + 2K)sinx = 4xcosx \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} 4Kx + 2A + 2\Lambda = 4x \\ -4Ax - 2B + 2K = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4K = 4 \\ 2A + 2\Lambda = 0 \\ -4A = 0 \\ -2B + 2K = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} K = 1 \\ \Lambda = 0 \\ A = 0 \\ B = 1 \end{cases}$$

Οπότε η μερική λύση της δοθείσας Σ.Δ.Ε. είναι:

$y_{\mu}(x) = xcosx + x^2sinx$

και η γενική λύση αυτής:

$y(x) = c_1cosx + c_2sinx + xcosx + x^2sinx$

Παράδειγμα 19 Να λυθεί η Σ.Δ.Ε.: $y^{(4)}(x) + y''(x) = x^2 + x$.

Λύση

Κατ' αρχάς θα λύσουμε την αντίστοιχη ομογενή:

$y^{(4)}(x) + y''(x) = 0$

Ζητούμε λύση της μορφής $y(x) = e^{rx}$ και η χαρακτηριστική εξίσωση είναι:

$$r^4 + r^2 = 0 \Rightarrow r^2(r^2 + 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} r_1 = r_2 = 0 \\ r_3 = i \\ r_4 = -i \end{cases}$$

Οι γραμμικώς ανεξάρτητες λύσεις της δοθείσας Σ.Δ.Ε. είναι $y_1(x) = 1$,

$y_2(x) = x$, $y_3(x) = cosx$ και $y_4(x) = sinx$ και η γενική λύση αυτής, θα είναι:

$y_0(x) = c_1 + c_2x + c_3cosx + c_4sinx, \quad c_1, c_2, c_3, c_4$ σταθερές.

Για την μερική λύση $y_\mu(x)$: Η συνάρτηση x είναι της μορφής (4.24), διότι γράφεται:

$x^2 + x = e^{0x}[(x^2 + x)cos(0x) + 0sin(0x)].$

Παρατηρούμε επίσης ότι ο μιγαδικός αριθμός $0 + 0i$ είναι διπλή ρίζα του χαρακτηριστικού πολυωνύμου, δηλαδή πολλαπλότητας $s = 2$. Άρα η μορφή της μερικής λύσης, θα είναι, λόγω της (4.25):

$y_\mu(x) = x^2(Kx^2 + \Lambda x + M).$

Παραγωγίζουμε τέσσερις φορές, αντικαθιστούμε στην αρχική δ.ε. και υπολογίζουμε τα K, Λ, M. Έτσι:

$y_\mu(x) = x^2(Kx^2 + \Lambda x + M),$

$y'_\mu(x) = 4Kx^3 + 3\Lambda x^2 + 2Mx,$

$y''_\mu(x) = 12Kx^2 + 6\Lambda x + 2M,$

$y'''_\mu(x) = 24Kx + 6\Lambda,$

$y^{(4)}_\mu(x) = 24K$

$y^{(4)}_\mu(x) + y''_\mu(x) = x^2 + x \Rightarrow 24K + 12Kx^2 + 6\Lambda x + 2M = x^2 + x \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} 12K = 1 \\ 6\Lambda = 1 \\ 24K + 2M = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} K = \dfrac{1}{12} \\ \Lambda = \dfrac{1}{6} \\ M = -1 \end{cases}$$

Οπότε η μερική λύση της δοθείσας Σ.Δ.Ε. είναι:

$y_\mu(x) = \dfrac{x^4}{12} + \dfrac{x^3}{6} - x^2$

και η γενική λύση αυτής:

$$y(x) = c_1 + c_2x + c_3cosx + c_4sinx + \frac{x^4}{12} + \frac{x^3}{6} - x^2$$

Παράδειγμα 20 Να λυθεί το Π.Α.Τ.: $u''(t) + u(t) = f(t) = \begin{cases} 1 - t^2, & 0 \le t \le 1 \\ 0, & t > 1 \end{cases}$, $u(0) = 0, u'(0) = 0.$

Λύση

Κατ' αρχάς θα λύσουμε την αντίστοιχη ομογενή:

$$u''(t) + u(t) = 0$$

Ζητούμε λύση της μορφής $u(t) = e^{rt}$ και η χαρακτηριστική εξίσωση είναι:

$$r^2 + 1 = 0 \Rightarrow \begin{cases} r_1 = i \\ r_2 = -i \end{cases}$$

Οι γραμμικώς ανεξάρτητες λύσεις της δοθείσας Σ.Δ.Ε. είναι $u_1(t) = cost$, $u_2(t) = sint$ και η γενική λύση αυτής, θα είναι:

$u_0(t) = c_1cost + c_2sint, \quad c_1, c_2$, σταθερές.

$i) \quad 0 \le t \le 1 : u'' + u = 1 - t^2, u(0) = u'(0) = 0$

Η μορφή της μερικής λύσης, θα είναι

$$u_\mu(t) = At^2 + Bt + \Gamma$$

Παραγωγίζουμε δύο φορές, αντικαθιστούμε στην αρχική δ.ε. και υπολογίζουμε τα A, B, Γ. Έτσι:

$$u'_\mu(t) = 2At + B$$

$$u''_\mu(t) = 2A$$

$$u''_\mu(t) + u_\mu(t) = 1 - t^2 \Rightarrow 2A + At^2 + Bt + \Gamma = 1 - t^2 \Rightarrow \begin{cases} 2A + \Gamma = 1 \\ B = 0 \\ A = -1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A = -1 \\ B = 0 \\ \Gamma = 3 \end{cases}$$

Οπότε η μερική λύση της είναι:

$u_\mu(t) = -t^2 + 3$

Άρα: $u(t) = c_1 cost + c_2 sint - t^2 + 3$, $u'(t) = -c_1 sint + c_2 cost - 2t$

$$\begin{cases} u(0) = 0 \\ u'(0) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1 + 3 = 0 \\ c_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1 = -3 \\ c_2 = 0 \end{cases}$$

Άρα: $u(t) = -3cost - t^2 + 3, \quad u'(t) = 3sint - 2t$

$ii) \quad t > 1 : u'' + u = 0 \Rightarrow u(t) = c_1 cost + c_2 sint$

Η υποχρεωτική συνέχεια της $u(t)$ και της $u'(t)$ στο σημείο 1 μας οδηγεί στις σχέσεις:

$$\begin{cases} \lim\limits_{t\to1^-} u(t) = \lim\limits_{t\to1^+} u(t) \\ \lim\limits_{t\to1^-} u'(t) = \lim\limits_{t\to1^+} u'(t) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -3cos1 - 1 + 3 = c_1 cos1 + c_2 sin1 \\ 3sin1 - 2 = -c_1 sin1 + c_2 cos1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -3cos1 + 2 = c_1 cos1 + c_2 sin1 \\ 3sin1 - 2 = -c_1 sin1 + c_2 cos1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -3sin1cos1 + 2sin1 = c_1 cos1sin1 + c_2 sin^2 1 \\ 3sin1cos1 - 2cos1 = -c_1 sin1cos1 + c_2 cos^2 1 \end{cases} \Rightarrow c_2 = 2(sin1 - cos1)$$

$$c_1 = \frac{-3cos1 + 2 - 2(sin1 - cos1)sin1}{cos1} = -3 + \frac{2 - 2sin^2 1 + 2sin1cos1}{cos1} \Rightarrow$$

$c_1 = -3 + cos1 + 2sin1$

$$\text{Άρα: } u(t) = \begin{cases} -3cost + 3 - t^2, \quad 0 \le t \le 1 \\ (-3 + cos1 + 2sin1)cost + 2(sin1 - cos1)sint, \quad t > 1 \end{cases}$$

Παράδειγμα 21 Να λυθεί η Σ.Δ.Ε.: $y''(x) - 2y'(x) + y(x) = \dfrac{e^x}{(1-x)^2}$.

Λύση

Κατ' αρχάς θα λύσουμε την αντίστοιχη ομογενή:

$y''(x) - 2y'(x) + y(x) = 0$

Ζητούμε λύση της μορφής $y(x) = e^{rx}$ και η χαρακτηριστική εξίσωση είναι:

$r^2 - 2r + 1 = 0 \Rightarrow (r-1)^2 = 0 \Rightarrow r_1 = r_2 = 1$

Οι γραμμικώς ανεξάρτητες λύσεις της δοθείσας Σ.Δ.Ε. είναι $y_1(x) = e^x$, $y_2(x) = xe^x$ και η γενική λύση αυτής, θα είναι:

$y_0(x) = c_1 e^x + c_2 x e^x, \quad c_1, c_2,$ σταθερές.

Η μερική λύση της δ.ε. θα βρεθεί εφαρμόζοντας τη μέθοδο Lagrange δηλαδή θα έχει τη μορφή:

$y_\mu(x) = c_1(x)e^x + c_2(x)xe^x$

Οπότε, δημιουργούμε το σύστημα:

$$\begin{cases} c_1'(x)e^x + c_2'(x)xe^x = 0 \\ c_1'(x)e^x + c_2'(x)(e^x + xe^x) = \dfrac{e^x}{(1-x)^2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1'(x) + c_2'(x)x = 0 \\ c_1'(x) + c_2'(x)(1+x) = \dfrac{1}{(1-x)^2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} c_2'(x) = \dfrac{1}{(1-x)^2} \\ c_1'(x) = -\dfrac{x}{(1-x)^2} \end{cases}$$

$$c_1(x) = -\int \frac{x}{(1-x)^2}dx \Rightarrow c_1(x) = -\int \frac{dx}{x-1} - \int \frac{dx}{(x-1)^2} \Rightarrow$$

$$c_1(x) = ln\left(\frac{1}{x-1}\right) + \frac{1}{x-1}$$

$$c_2(x) = \int \frac{dx}{(x-1)^2} \Rightarrow c_2(x) = -\frac{1}{x-1}$$

Οπότε, κάνοντας αντικατάσταση τα $c_1(x), c_2(x)$ η μερική λύση θα είναι:

$$y_\mu(x) = \left(ln\left(\frac{1}{x-1}\right) + \frac{1}{x-1}\right)e^x + \frac{xe^x}{1-x}$$

και η γενική λύση είναι:

$$y(x) = c_1 e^x + c_2 x e^x + \left(ln\left(\frac{1}{x-1}\right) + \frac{1}{x-1}\right) e^x + \frac{x e^x}{1-x}$$

Παράδειγμα 22 Να λυθεί η Σ.Δ.Ε.: $y'''(x) + y''(x) = \dfrac{x-1}{x^2}$.

Λύση

Κατ' αρχάς θα λύσουμε την αντίστοιχη ομογενή:

$$y'''(x) + y''(x) = 0$$

Ζητούμε λύση της μορφής $y(x) = e^{rx}$ και η χαρακτηριστική εξίσωση είναι:

$$r^3 + r^2 = 0 \Rightarrow r^2(r+1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} r_1 = r_2 = 0 \\ r_3 = -1 \end{cases}$$

Οι γραμμικώς ανεξάρτητες λύσεις της δοθείσας Σ.Δ.Ε. είναι $y_1(x) = 1$, $y_2(x) = x$, $y_3(x) = e^{-x}$ και η γενική λύση αυτής, θα είναι:

$$y_0(x) = c_1 + c_2 x + c_3 e^{-x}, \quad c_1, c_2, c_3 \text{ σταθερές.}$$

Η μερική λύση της δ.ε. θα βρεθεί εφαρμόζοντας τη μέθοδο Lagrange δηλαδή θα έχει τη μορφή:

$$y_\mu(x) = c_1(x) + c_2(x)x + c_3(x)e^{-x}$$

Οπότε, δημιουργούμε το σύστημα:

$$\begin{cases} c_1'(x) + c_2'(x)x + c_3'(x)e^{-x} = 0 \\ c_2'(x) - c_3'(x)e^{-x} = 0 \\ c_3'(x)e^{-x} = \dfrac{x-1}{x^2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_3'(x) = \dfrac{e^x(x-1)}{x^2} = \dfrac{e^x}{x} - \dfrac{e^x}{x^2} \\ c_2'(x) = \dfrac{x-1}{x^2} = \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x^2} \\ c_1'(x) = -\dfrac{x-1}{x} - \dfrac{x-1}{x^2} = -1 + \dfrac{1}{x^2} \end{cases}$$

$$c_1(x) = \int \left(-1 + \frac{1}{x^2}\right) dx \Rightarrow c_1(x) = -x - \frac{1}{x}$$

$$c_2(x) = \int \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}\right) dx \Rightarrow c_2(x) = lnx - \frac{1}{x}$$

$$c_3(x) = \int \frac{e^x}{x}dx - \int \frac{e^x}{x^2}dx \Rightarrow c_3(x) = \int \frac{e^x}{x}dx + \int e^x\left(\frac{1}{x}\right)'dx \Rightarrow$$
$$c_3(x) = \frac{e^x}{x} - \int \frac{e^x}{x}dx + \int \frac{e^x}{x}dx \Rightarrow c_3(x) = \frac{e^x}{x}$$

Οπότε, κάνοντας αντικατάσταση τα $c_1(x), c_2(x), c_3(x)$ η μερική λύση θα είναι:

$$y_\mu(x) = -x - \frac{1}{x} + xlnx - 1 + \frac{1}{x} = -x - 1 + xlnx$$

και η γενική λύση είναι:

$$y(x) = c_1 + c_2x + c_3e^{-x} - x - 1 + xlnx = c_1 + c_2x + c_3e^{-x} + xlnx$$

Παράδειγμα 23 Να λυθεί η Σ.Δ.Ε.: $y''(x) + 4y(x) = \dfrac{4}{sin2x}$.

Λύση

Κατ' αρχάς θα λύσουμε την αντίστοιχη ομογενή:

$$y''(x) + 4y(x) = 0$$

Ζητούμε λύση της μορφής $y(x) = e^{rx}$ και η χαρακτηριστική εξίσωση είναι:

$$r^2 + 4 = 0 \Rightarrow r^2 = -4 \Rightarrow \begin{cases} r_1 = 2i \\ r_2 = -2i \end{cases}$$

Οι γραμμικώς ανεξάρτητες λύσεις της δοθείσας Σ.Δ.Ε. είναι $y_1(x) = cos2x$, $y_2(x) = sin2x$ και η γενική λύση αυτής, θα είναι:

$$y_0(x) = c_1cos2x + c_2sin2x, \quad c_1, c_2, \text{ σταθερές.}$$

Η μερική λύση της δ.ε. θα βρεθεί εφαρμόζοντας τη μέθοδο Lagrange δηλαδή θα έχει τη μορφή:

$$y_\mu(x) = c_1(x)cos2x + c_2(x)sin2x$$

Οπότε, δημιουργούμε το σύστημα:

$$\begin{cases} c_1'(x)cos2x + c_2'(x)sin2x = 0 \\ -2c_1'(x)sin2x + 2c_2'(x)cos2x = \dfrac{4}{sin2x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1'(x) = -2 \\ c_2'(x) = \dfrac{2cos2x}{sin2x} \end{cases}$$

$$c_1(x) = -\int 2dx = -2x$$

$$c_2(x) = 2\int \frac{cos2x}{sin2x}dx = \int \frac{cos(2x)}{sin(2x)}d(2x) = ln|sin2x|$$

Οπότε, κάνοντας αντικατάσταση τα $c_1(x), c_2(x)$ η μερική λύση θα είναι:

$$y_\mu(x) = -2xcos2x + ln|sin2x|sin2x$$

και η γενική λύση είναι:

$$y(x) = c_1cos2x + c_2sin2x - 2xcos2x + ln|sin2x|sin2x$$

Ελληνική βιβλιογραφία

[1] Γ. Δάσιος, Συνήθεις Διαφορικές Εξισώσεις, Πάτρα, 1985

[2] Θ. Κυβεντίδης, Διαφορικές εξισώσεις, Εκδόσεις Ζήτη, Θεσ/κη, 1993

[3] Β. Μπαρμπάνης, Μαθήματα Διαφορικών Εξισώσεων, Πάτρα, 1976

[4] Π. Σιαφαρίκας, Εφαρμογές των Σ.Δ.Ε., Τόμος Ι, Πάτρα, 2002

[5] Ν. Σταυρακάκης, ΣΔΕ : γραμμική και μη γραμμική θεωρία από τη φύση και τη ζωή, Παπασωτηρίου, Αθήνα, 1997

Ξενόγλωσση βιβλιογραφία

[1] W. E. Boyce, R. C. Di Prima, Elementary differential equations and boundary value problems, N. Y. John Wiley & Sons, 1977

[2] M. Braun, Differential equations and their Applications, Springer-Verlag, 1993

[3] Abell and Braselton, Modern Differential equations, Theory, Application, Technology, Saunders College Publishing, 1996

[4] B. Rai and D. P. Choudhury, Ordinary Differential Equations, An introduction, Alpha Science, International Ltd, 2005

[5] Rice and Strange, Ordinary Differential Equations with Application, Brooks/Cole Publishing Company, 1996