Τίτλος Μαθήματος: Συνήθεις Διαφορικές Εξισώσεις Ι

Ενότητα: Θεώρημα ύπαρξης και μοναδικότητας της λύσης του Π.Α.Τ.:

$y' = f(x, y),\ y(x_0)$ **(Θεώρημα Picard)**

Όνομα Καθηγητή: Χρυσή Κοκολογιαννάκη

Τμήμα: Μαθηματικών

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Πατρών**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο

ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ

ΕΣΠΑ
2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

3 Ύπαρξη και μοναδικότητα της λύσης του Π.Α.Τ.

$$y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0$$

Έστω το Π.Α.Τ.

$$y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0 \tag{3.1}$$

όπου $f(x, y)$ είναι συνεχής συνάρτηση σε υποσύνολο του $\mathbb{R}^2$.
Η μέθοδος Picard, γνωστή και ως μέθοδος των διαδοχικών προσεγγίσεων, μας εξασφαλίζει τόσο την ύπαρξη μιας λύσης του ανωτέρω Π.Α.Τ. όσο και την μοναδικότητα αυτής, καθώς επίσης μας δίνει και μια μέθοδο εύρεσης της μοναδικής αυτής λύσης.
Το μειονέκτημα της μεθόδου είναι ότι είναι τοπικού χαρακτήρα, δηλαδή τα συμπεράσματα ισχύουν μόνο σε μια περιοχή του σημείου (x_0, y_0).
Πριν τη διατύπωση του θεωρήματος, θα δώσουμε κάποιες προτάσεις και ορισμούς, οι οποίοι είναι απαραίτητοι.

Πρόταση 3.1 Έστω $f : D \to \mathbb{R}, D \subseteq \mathbb{R}^2$, συνεχής συνάρτηση. Κάθε λύση του Π.Α.Τ. (3.1) είναι επίσης λύση της ολοκληρωτικής εξίσωσης

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y(t))dt. \tag{3.2}$$

Απόδειξη. Αν η $y(x)$ είναι λύση του Π.Α.Τ. (3.1), τότε ολοκληρώνοντας και τα δύο μέλη της Σ.Δ.Ε. ως προς x, από x_0 έως x και λαμβάνοντας υπ' όψιν μας την αρχική συνθήκη, παίρνουμε την (3.2), οπότε η λύση του Π.Α.Τ. (3.1) είναι λύση της ολοκληρωτικής εξίσωσης (3.2).
Αν η $y(x)$ είναι λύση της ολοκληρωτικής εξίσωσης (3.2), τότε παραγωγίζοντας και τα δύο μέλη της (3.2) ως προς x, παίρνουμε την Σ.Δ.Ε. και αν στην (3.2) πάρουμε όπου x το x_0 παίρνουμε και την αρχική συνθήκη, οπότε η λύση της ολοκληρωτικής εξίσωσης (3.2) είναι και λύση του Π.Α.Τ. (3.1). □

Ορισμός 3.1 Έστω, $D \subseteq \mathbb{R}^2$. Η συνάρτηση $f(x, y), f : D \to \mathbb{R}$ ικανοποιεί την συνθήκη του Lipschitz ως προς y, με σταθερά $k > 0$, αν ισχύει η σχέση:

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq k|y_1 - y_2|, \text{για κάθε } (x, y_1), (x, y_2) \in D. \tag{3.3}$$

Σημείωση 3.1 Αν μια συνάρτηση $f(x, y) : D \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής και k είναι ένα φράγμα της $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ στο D, τότε η συνάρτηση ικανοποιεί την συνθήκη του

Lipschitz με σταθερά k.(Αποδεικνύεται αν εφαρμόσουμε το θεώρημα μέσης τιμής για $y_1 < y_0 < y_2$ και $(x, y_0) \in D$.) Το αντίστροφο δεν ισχύει πάντα.

Επιλέγουμε μια αρχική συνάρτηση $y_0(x)$ και οι διαδοχικές προσεγγίσεις ορίζονται από την λύση των προβλημάτων

$$y'_{n+1}(x) = f(x, y_n(x)), \quad y_n(x_0) = y_0, \quad n = 0, 1, 2, ...$$

Ολοκληρώνοντας το Π.Α.Τ. παίρνουμε την ακολουθία των προσεγγίσεων

$$y_{n+1}(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y_n(t))dt, \quad n = 0, 1, 2, ...$$

η οποία δημιουργεί την ακολουθία των συναρτήσεων:

$$y_0(x), y_1(x), ..., y_n(x), ...$$

Το θεώρημα του Picard μας δίνει συνθήκες που πρέπει να ικανοποιεί η συνάρτηση $f(x, y)$ έτσι ώστε να υπάρχει το όριο της ακολουθίας προσεγγίσεων $y_n(x)$ και αυτό να είναι η μοναδική λύση του Π.Α.Τ. (3.1).

Θεώρημα 3.2 (του Picard) Έστω D το κλειστό υποσύνολο του $\mathbb{R}^2$:

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x - x_0| \leq a, |y - y_0| \leq b, a, b \geq 0\}$$

και $f(x, y(x))$ μια συνάρτηση $f : D \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν:
(i) είναι συνεχής στο D και M είναι το φράγμα της, δηλαδή

$$|f(x, y(x))| \leq M, \quad \forall (x, y(x)) \in D \tag{3.4}$$

(ii) και ικανοποιεί την συνθήκη του Lipschitz ως προς y, με σταθερά k.
Τότε το Π.Α.Τ. (3.1) έχει μοναδική λύση, που είναι το όριο της ακολουθίας προσεγγίσεων

$$y_n(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y_{n-1}(t))dt, \quad n = 1, 2..., \tag{3.5}$$

δηλαδή $y(x) = lim_{n\to\infty} y_n(x)$, με $y_0(x)$ μια ολοκληρώσιμη συνάρτηση, που ικανοποιεί την συνθηκή $y_0(x_0) = y_0$. Η οριακή συνάρτηση $y(x)$ είναι συνεχής για $x \in [x_0 - h, x_0 + h]$, όπου $h = min\{a, \frac{b}{M}\}$.

Απόδειξη. Η απόδειξη του θεωρήματος βασίζεται στην απόδειξη των παρακάτω 4 προτάσεων. Οι αποδείξεις των προτάσεων θα γίνουν για

$x \in [x_0 - h, x_0 + h]$, όπου $h = min\{a, \frac{b}{M}\}$.Για ευκολία, θα περιοριστούμε στο διάστημα $x \in [x_0, x_0 + h]$, αλλά τα ίδια ακριβώς μπορούν να αποδειχθούν και για το διάστημα $x \in [x_0 - h, x_0]$. □

Πρόταση 3.2 Η ακολουθία των συναρτήσεων $\{y_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$, όπως ορίζονται από την (3.5) είναι ορισμένη και συνεχής για $x \in [x_0, x_0 + h]$ και μάλιστα:

$$|y_n(x) - y_0| \leq b, n = 1, 2, ... \tag{3.6}$$

Απόδειξη. Η απόδειξη θα γίνει με την μέθοδο της επαγωγής.
Για $n = 1$, η (3.5) γίνεται:

$$y_1(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y_0)dt \tag{3.7}$$

Επειδή η συνάρτηση $f(x, y_0)$ έχει έννοια και είναι συνεχής για $x \in [x_0, x_0 + h]$ από την (3.7) έπεται ότι η συνάρτηση $y_1(x)$ έχει έννοια, είναι συνεχής συνάρτηση και ισχύει:

$$|y_1(x) - y_0| = \left| \int_{x_0}^{x} f(t, y_0)dt \right| \leq \int_{x_0}^{x} |f(t, y_0)|dt \leq M \int_{x_0}^{x} dt \leq M(x - x_0)$$
$$\leq Mh \leq b.$$

Έστω ότι η συνάρτηση $y_k(x)$ έχει έννοια και είναι συνεχής συνάρτηση.
Τότε και η συνάρτηση $f(x, y_k(x))$ είναι συνεχής, έχει έννοια το ολοκλήρωμα $\int_{x_0}^{x} f(t, y_k(t))dt$ άρα και η συνάρτηση $y_{k+1}(x)$, όπως προκύπτει από την (3.5) για $n = k$, έχει έννοια, είναι συνεχής συνάρτηση και ισχύει:

$$|y_{k+1}(x) - y_0| = \left| \int_{x_0}^{x} f(t, y_k(t))dt \right| \leq \int_{x_0}^{x} |f(t, y_k(t))|dt \leq M \int_{x_0}^{x} dt$$
$$\leq M(x - x_0) \leq Mh \leq b.$$

Άρα η πρόταση (3.2) απεδείχθει με την μέθοδο της επαγωγής. □

Πρόταση 3.3 Η ακολουθία των συναρτήσεων $\{y_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$, όπως ορίζονται από την (3.5), συγκλίνει ομοιόμορφα σε μια συνεχή συνάρτηση $y(x)$, για $x \in [x_0, x_0 + h]$.

Απόδειξη. Παρατηρούμε ότι

$$y_n(x) = y_0(x) + \sum_{n=1}^{\infty} [y_{n+1}(x) - y_n(x)]$$

Θα δείξουμε οτί η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty}[y_{n+1}(x) - y_n(x)]$ συγκλίνει ομοιόμορφα για $x \in [x_0, x_0 + h]$, χρησιμοποιώντας το θεώρημα του Weirstrass. Πράγματι έστω $\phi_n(x) = |y_n(x) - y_{n-1}(x)|, x \in [x_0, x_0 + h], \forall n \in \mathbb{N}$, οπότε λόγω της (3.5), έχουμε:

$$\phi_n(x) = \left| \int_{x_0}^{x} [f(t, y_{n-1}(t)) - f(t, y_{n-2}(t))]dt \right| \leq k \int_{x_0}^{x} |y_{n-1}(t) - y_{n-2}(t)|dt =$$
$$= k \int_{x_0}^{x} \phi_{n-1}(t)dt$$

δηλαδή

$$\phi_n(x) \leq k \int_{x_0}^{x} \phi_{n-1}(t)dt \tag{3.8}$$

Λαμβάνοντας υπ' όψιν μας την πρόταση (3.2) και την σχέση (3.6) έχουμε:

$$\phi_0(x) = |y_1(x) - y_0(x)| \leq M|x - x_0| \leq Mh$$

και από την (3.8) με διαδοχική εφαρμογή έχουμε:

$$\phi_1(x) \leq k \int_{x_0}^{x} M|t - x_0|dt \leq kM\frac{(x - x_0)^2}{2}$$
$$\phi_2(x) \leq k^2 M \int_{x_0}^{x} \frac{(t - x_0)^2}{2}dt = k^2 M\frac{(x - x_0)^3}{3!}$$

και επαγωγικά δείχνουμε ότι:

$$\phi_n(x) \leq k^n M\frac{(x - x_0)^{n+1}}{(n + 1)!} \leq \frac{M}{k}\frac{(kh)^{n+1}}{(n + 1)!}$$

Επειδή η σειρά $e^{kh} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(kh)^n}{n!}$ συγκλίνει, άρα και η σειρά συναρτήσεων $\sum_{n=0}^{\infty}\phi_n(x)$ συγκλίνει ομοιόμορφα στο $[x_0, x_0 + h]$, οπότε και η ακολουθία συναρτήσεων $y_n(x)$ συγκλίνει ομοιόμορφα σε μια συνάρτηση $y(x)$, που είναι συνεχής, αφού η $y_n(x)$ είναι συνεχής ακολουθία συναρτήσεων. □

Πρόταση 3.4 Η οριακή συνάρτηση $y(x)$ είναι λύση του Π.Α.Τ. (3.1).

Απόδειξη. Η συνάρτηση $f(x, y(x))$ είναι καλά ορισμένη $\forall x \in [x_0, x_0 + h]$. Πράγματι:

$$|y(x) - y_0| \leq |y(x) - y_n(x)| + |y_n(x) - y_0| \leq |y(x) - y_n(x)| + M|x - x_0|$$

και παίρνοντας το όριο $n \to \infty$, από την προηγούμενη ανισότητα προκύπτει:

$|y(x) - y_0| \leq M|x - x_0|$.

Επειδή η συνάρτηση $f(x, y(x))$ πληροί την συνθήκη του Lipschitz, ως προς y, έχουμε:

$|f(x, y_n(x)) - f(x, y(x))| \leq k|y_n(x) - y(x)| \xrightarrow{n \to \infty} 0$

δηλαδή η συνάρτηση $f(x, y_n(x))$ συγκλίνει ομαλά στην συνάρτηση $f(x, y(x))$, οπότε προκύπτει:

$$lim_{n\to\infty} \int_{x_0}^{x} f(t, y_n(t))dt = \int_{x_0}^{x} lim_{n\to\infty} f(t, y_n(t))dt = \int_{x_0}^{x} f(t, y(t))dt$$

Χρησιμοποιώντας την (3.5), παίρνουμε:

$$y(x) = lim_{n\to\infty} y_n(x) = y_0 + lim_{n\to\infty} \int_{x_0}^{x} f(t, y_n(t))dt = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y(t))dt$$

και από την πρόταση 3.1, προκύπτει ότι η $y(x)$ είναι λύση του Π.Α.Τ. (3.1). □

Πρόταση 3.5 Η λύση του Π.Α.Τ. είναι μοναδική.

Απόδειξη. Έστω ότι το Π.Α.Τ. (3.1), έχει δύο λύσεις την $y(x)$ και την $\overline{y(x)}$. Χρησιμοποιούμε τις σχέσεις (3.2) και (3.3) και παίρνουμε:

$$|y(x) - \overline{y(x)}| \leq \int_{x_0}^{x} \left| f(t, y(t)) - f(t, \overline{y(t)}) \right| dt \leq k \int_{x_0}^{x} |y(x) - \overline{y(x)}| dt \quad (3.9)$$

Αφού οι συναρτήσεις $y(x)$ και $\overline{y(x)}$ είναι συνεχείς για $x \in [x_0, x_0 + h]$ έπεται ότι υπάρχει σταθερά $N > 0$ τέτοια ώστε:

$$|y(x) - \overline{y(x)}| \leq N, \quad \forall x \in [x_0, x_0 + h] \quad (3.10)$$

Η (3.9) λόγω της (3.10) γίνεται:

$$|y(x) - \overline{y(x)}| \leq kN(x - x_0) \quad (3.11)$$

Η (3.9) λόγω της (3.11) δίνει την ανίσωση:

$$|y(x)-\overline{y(x)}| \leq k^2 N \frac{(x-x_0)^2}{2}.$$

Συνεχίζοντας την ίδια διαδικασία αντικατάστασης καταλήγουμε:

$$|y(x)-\overline{y(x)}| \leq \frac{k^{n+1}}{(n+1)!} N (x-x_0)^{n+1}$$

Όμως $\frac{k^{n+1}}{(n+1)!} N (x-x_0)^{n+1} \xrightarrow{n\to\infty} 0$, διότι είναι ο $n+1$ όρος συγκλίνουσας σειράς. Άρα: $y(x)=\overline{y(x)}$. $\square$

Παράδειγμα 1 Να δειχθεί ότι τα κάτωθι Π.Α.Τ. έχουν μοναδική λύση.

α) $y' = y^2 - 2e^x y + e^{2x} + e^x, \quad y(0)=2$

β) $y' = e^x - y^2, \quad y(0)=1$

Λύση

α) Θεωρούμε την περιοχή D του $\mathbb{R}^2$:

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x| \leq \alpha, |y-2| \leq \beta,\ \alpha,\beta > 0\}.$$

Η συνάρτηση $f(x,y) = y^2 - 2e^x y + e^{2x} + e^x$ είναι συνεχής σ' ολόκληρο το $\mathbb{R}^2$, άρα και στην περιοχή D, οπότε μπορούμε να βρούμε ένα φράγμα της. Έτσι:

$$|f(x,y)| = |y^2 - 2e^x y + e^{2x} + e^x| \leq |y|^2 + 2|e^x||y| + |e^{2x}| + |e^x| \leq$$

$$\leq (\beta+2)^2 + 2e^{\alpha}(\beta+2) + e^{2\alpha} + e^{\alpha} = (\beta+2+e^{\alpha})^2 + e^{\alpha} = M$$

Επίσης επειδή:

$$\left|\frac{\partial f}{\partial y}\right| = |2y - 2e^x| \leq 2|y| + 2|e^x| \leq 2(\beta+2+e^{\alpha}) = k$$

η συνάρτηση $f(x,y)$ είναι Lipschitz ως προς y με σταθερά k.

Άρα το θεώρημα του Picard ισχύει για το Π.Α.Τ. και η λύση του $y(x)$ υπάρχει και είναι μοναδική για $|x| \leq h = min\{\alpha, \frac{\beta}{(\beta+2+e^{\alpha})^2+e^{\alpha}}\}$.

β) Θεωρούμε την περιοχή D του $\mathbb{R}^2$:

$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| \leq \alpha, |y - 1| \leq \beta,\ \ \alpha, \beta > 0\}.$

Η συνάρτηση $f(x, y) = e^x - y^2$ είναι συνεχής σ' ολόκληρο το $\mathbb{R}^2$, άρα και στην περιοχή D και το φράγμα της είναι:

$$|f(x, y)| = |e^x - y^2| \leq |e^x| + |y|^2 \leq e^\alpha + (\beta + 1)^2 = M$$

Επίσης αφού:

$$\left|\frac{\partial f}{\partial y}\right| = |-2y| = 2|y| \leq 2(\beta + 1) = k,$$

η συνάρτηση $f(x, y)$ είναι Lipschitz ως προς y με σταθερά k.

Άρα το θεώρημα του Picard μας εξασφαλίζει μοναδική λύση του Π.Α.Τ. για $|x - 1| \leq h = min\{\alpha, \dfrac{\beta}{e^\alpha + (\beta + 1)^2}\}$.

Παράδειγμα 2 Να βρεθούν οι 3 πρώτες προσεγγίσεις της λύσης, που προβλέπει το θεώρημα του Picard για τα κάτωθι Π.Α.Τ.

α) $y' = 2y^2 - 2y, \quad y(0) = \dfrac{1}{2}$

β) $y' = 2xy + 2xy^2, \quad y(0) = 1.$

Λύση

α) Θεωρούμε την περιοχή D του $\mathbb{R}^2$:

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| \leq \alpha, \left|y - \frac{1}{2}\right| \leq \beta,\ \ \alpha, \beta > 0\}.$$

Η συνάρτηση $f(x, y) = 2y^2 - 2y$ είναι συνεχής σ' ολόκληρο το $\mathbb{R}^2$, άρα και στην περιοχή D και το φράγμα της είναι:

$$|f(x, y)| \leq 2|y|^2 + 2|y| \leq 2\left(\beta + \frac{1}{2}\right)\left(\beta + \frac{3}{2}\right)$$

Επίσης

$$\left|\frac{\partial f}{\partial y}\right| = |4y-2| \leq 2(2|y|+1) \leq 2\left(2\left(\beta+\frac{1}{2}\right)+1\right) = 4(\beta+1) = k$$

Άρα η συνάρτηση $f(x,y)$ είναι Lipschitz ως προς y με σταθερά k.

Οι προϋποθέσεις του θεωρήματος Picard ισχύουν και υπάρχει μοναδική λύση του Π.Α.Τ. για $|x| \leq h = min\{\alpha, \frac{2\beta}{(2\beta+1)(2\beta+3)}\}$.

Η ακολουθία των διαδοχικών προσεγγίσεων έχει την μορφή:

$$y_n(x) = \frac{1}{2} + \int_0^x f(t, y_{n-1}(t))dt$$

Θεωρούμε $y_0(x) = \frac{1}{2}$.

Οπότε:

$$y_1(x) = \frac{1}{2} + \int_0^x \left(2\frac{1}{4} - 2\frac{1}{2}\right)dt = \frac{1}{2} - \int_0^x \frac{1}{2}dt = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}x$$

και

$$y_2(x) = \frac{1}{2} + \int_0^x \left[2\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}t\right)^2 - 2\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}t\right)\right]dt =$$
$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\int_0^x [(1-t)^2 - 2(1-t)]dt = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\int_0^x (1-t^2)dt = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\left(x - \frac{x^3}{3}\right)$$

β) Θεωρούμε την περιοχή D του $\mathbb{R}^2$:

$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x| \leq \alpha, |y-1| \leq \beta,\ \ \alpha, \beta > 0\}$.

Η συνάρτηση $f(x,y) = 2xy + 2xy^2$ είναι συνεχής σ' ολόκληρο το $\mathbb{R}^2$, άρα και στην περιοχή D και το φράγμα της είναι:

$|f(x,y)| \leq 2|x||y||y+1| \leq 2\alpha(\beta+1)(\beta+2) = M$

Επίσης αφού:

$$\left|\frac{\partial f}{\partial y}\right| = |2x+4xy| \leq 2|x|(1+2|y|) \leq 2\alpha(1+2(\beta+1)) = k$$

η συνάρτηση $f(x,y)$ είναι Lipschitz ως προς y με σταθερά k.

Άρα πληρούνται οι προϋποθέσεις του θεωρήματος Picard και η μοναδική λύση του Π.Α.Τ. υπάρχει για $|x| \leq h = min\{\alpha, \dfrac{\beta}{2\alpha(\beta+1)(\beta+2)}\}$.

Η ακολουθία των διαδοχικών προσεγγίσεων έχει την μορφή:

$$y_n(x) = 1 + \int_0^x f(t, y_{n-1}(t))dt$$

Θεωρούμε $y_0(x) = 1$.

Οπότε:

$$y_1(x) = 1 + \int_0^x 4tdt = 1 + 2x^2$$

και

$$y_2(x) = 1 + \int_0^x [2t(1+2t^2) + 2t(1+2t^2)^2]dt =$$
$$= 1 + \int_0^x 2t(1+2t^2)(1+1+2t^2)dt =$$
$$= 1 + 4\int_0^x (t + 3t^3 + 2t^5)dt =$$
$$= 1 + 2x^2 + 3x^4 + \frac{4}{3}x^6.$$

Παράδειγμα 3 Να βρεθεί η τέταρτη προσέγγιση της μεθόδου Picard , για το Π.Α.Τ. καθώς και το σφάλμα για αυτήν την προσέγγιση:
$y' = x - y, \quad y(0) = 1.$

Λύση

Θεωρούμε την περιοχή D του $\mathbb{R}^2$:

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x| \leq \alpha, |y-1| \leq \beta, \ \alpha, \beta > 0\}.$$

Η συνάρτηση $f(x,y) = x - y$ είναι συνεχής σ' ολόκληρο το $\mathbb{R}^2$, άρα και στην περιοχή D και το φράγμα της είναι:

$|f(x,y)| \leq |x| + |y| = \alpha + \beta + 1 = M$

Επίσης αφού:

$\left|\frac{\partial f}{\partial y}\right| = |-1| = 1 = k$

η συνάρτηση $f(x, y)$ είναι Lipschitz ως προς y με σταθερά k.

Άρα πληρούνται οι προϋποθέσεις του θεωρήματος Picard και η μοναδική λύση του Π.Α.Τ. υπάρχει για $|x| \leq h = min\{\alpha, \frac{\beta+1}{\alpha+\beta+1}\}$.

Η ακολουθία των διαδοχικών προσεγγίσεων έχει την μορφή:

$$y_n(x) = 1 + \int_0^x f(t, y_{n-1}(t))dt$$

Θεωρούμε $y_0(x) = 1$.

Οπότε:

$y_1(x) = 1 + \int_0^x (t-1)dt = 1 - x + \frac{x^2}{2}$
$y_2(x) = 1 + \int_0^x (t - 1 - \frac{t^2}{2} + t)dt = 1 - x + x^2 + \frac{x^3}{6}$
$y_3(x) = 1 + \int_0^x (t - 1 + t - t^2 - \frac{t^3}{6})dt = 1 - x + x^2 - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{24}$

Η λύση είναι:

$y(x) = lim_{n\to+\infty} y_n(x)$

Το σφάλμα υπολογίζεται από τον τύπο:

$|y(x) - y_n(x)| \leq \frac{M}{k}\frac{(kh)^{n+1}}{(n+1)!}e^{kh}$

όπου n ο αριθμός των προσεγγίσεων, M το φράγμα της $f(x, y)$, k η σταθερά Lipschitz και $h = min\{\alpha, \frac{\beta+1}{\alpha+\beta+1}\}$.

Επομένως το ζητούμενο σφάλμα είναι:

$$|y(x) - y_3(x)| \leq (\alpha + \beta + 1)\frac{h^4}{4!}e^h.$$

Παράδειγμα 4 Να βρεθεί η τρίτη προσέγγιση της μεθόδου Picard , για το Π.Α.Τ. καθώς και το σφάλμα για αυτήν την προσέγγιση:
$y' = x^2 + y, \quad y(1) = 3.$

Λύση

Θεωρούμε την περιοχή D του $\mathbb{R}^2$:

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x - 1| \leq \alpha, |y - 3| \leq \beta, \ \alpha, \beta > 0\}.$$

Η συνάρτηση $f(x, y) = x^2 + y$ είναι συνεχής σ' ολόκληρο το $\mathbb{R}^2$, άρα και στην περιοχή D και το φράγμα της είναι:

$$|f(x, y)| \leq |x^2| + |y| \leq (\alpha + 1)^2 + \beta + 3 = M$$

Επίσης αφού:

$$\left|\frac{\partial f}{\partial y}\right| = |1| = 1 = k$$

η συνάρτηση $f(x, y)$ είναι Lipschitz ως προς y με σταθερά k.

Άρα πληρούνται οι προϋποθέσεις του θεωρήματος Picard και η μοναδική λύση του Π.Α.Τ. υπάρχει για $|x| \leq h = min\{\alpha + 1, \frac{\beta + 3}{(\alpha + 1)^2 + \beta + 3}\}$.

Η ακολουθία των διαδοχικών προσεγγίσεων έχει την μορφή:

$$y_n(x) = 3 + \int_1^x f(t, y_{n-1}(t))dt$$

Θεωρούμε $y_0(x) = 3$.

Οπότε:

$$y_1(x) = 3 + \int_1^x (t^2 + 3)dt = 3 + \frac{x^3}{3} - \frac{1}{3} + 3x - 3 = -\frac{1}{3} + 3x + \frac{x^3}{3}$$

$$y_2(x) = 3 + \int_1^x \left(t^2 - \frac{1}{3} + 3t + \frac{t^3}{3}\right)dt =$$

$$= 3 - \frac{1}{3}(x-1) + 3\left(\frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}\right) + \frac{x^3}{3} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3}\left(\frac{x^4}{4} - \frac{1}{4}\right) =$$
$$= \frac{17}{12} - \frac{x}{3} + \frac{3}{2}x^2 + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{12}$$

Η λύση είναι:

$$y(x) = lim_{n\to+\infty} y_n(x)$$

Το σφάλμα υπολογίζεται από τον τύπο:

$$|y(x) - y_n(x)| \leq \frac{M}{k}\frac{(kh)^{n+1}}{(n+1)!}e^{kh}$$

όπου n ο αριθμός των προσεγγίσεων, M το φράγμα της $f(x,y)$, k η σταθερά Lipschitz και $h = min\{\alpha+1, \frac{\beta+3}{(\alpha+1)^2+\beta+3}\}$.

Επομένως το ζητούμενο σφάλμα είναι:

$$|y(x) - y_2(x)| \leq ((\alpha+1)^2 + \beta + 3)\frac{h^3}{3!}e^h.$$

Παράδειγμα 5 Να λυθεί η παρακάτω εξίσωση με τη μέθοδο του Picard: $y' = 2y + 5, \quad y(0) = 3.$

Λύση

Θεωρούμε την περιοχή D του $\mathbb{R}^2$:

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x| \leq \alpha, |y-3| \leq \beta,\ \alpha, \beta > 0\}.$$

Η συνάρτηση $f(x,y) = 2y + 5$ είναι συνεχής σ' ολόκληρο το $\mathbb{R}^2$, άρα και στην περιοχή D και το φράγμα της είναι:

$$|f(x,y)| \leq 2|y| + 5 \leq 2(\beta+3) + 5 = 2\beta + 11 = M$$

Επίσης αφού:

$$\left|\frac{\partial f}{\partial y}\right| = |2| = 2 = k$$

η συνάρτηση $f(x, y)$ είναι Lipschitz ως προς y με σταθερά k.

Άρα πληρούνται οι προϋποθέσεις του θεωρήματος Picard και η μοναδική λύση του Π.Α.Τ. υπάρχει για $|x| \leq h = min\{\alpha, \frac{\beta}{2\beta + 11}\}$.

Η ακολουθία των διαδοχικών προσεγγίσεων έχει την μορφή:

$$y_n(x) = 3 + \int_0^x f(t, y_{n-1}(t))dt$$

Θεωρούμε $y_0(x) = 3$.

Οπότε:

$$y_1(x) = 3 + \int_0^x (6+5)dt = 3 + 11x$$
$$y_2(x) = 3 + \int_0^x (2(3+11t)+5)dt = 3 + 11x + 2\frac{11}{2}x^2$$
$$y_3(x) = 3 + \int_0^x \left(2(3 + 11t + 2\frac{11}{2}t^2) + 5\right)dt = 3 + 11x + 2\frac{11}{2!}x^2 + 2^2\frac{11}{3!}x^3$$
$$y_4(x) = 3 + \int_0^x \left(2(3 + 11t + 2\frac{11}{2}t^2 + 2^2\frac{11}{3!}t^3) + 5\right)dt =$$
$$= 3 + 11x + 2\frac{11}{2!}x^2 + 2^2\frac{11}{3!}x^3 + 2^3\frac{11}{4!}x^4$$

Με επαγωγή αποδεικνύεται ότι:

$$y_n(x) = 3 + 11x + 2\frac{11}{2!}x^2 + 2^2\frac{11}{3!}x^3 + 2^3\frac{11}{4!}x^4 + ... + 2^{n-1}\frac{11}{n!}x^n \Rightarrow$$
$$y_n(x) = 3 + \frac{11}{2}\left(2x + \frac{(2x)^2}{2!} + \frac{(2x)^3}{3!} + ... + \frac{(2x)^n}{n!}\right)$$

Άρα η λύση είναι:

$$y(x) = \lim_{n\to+\infty} y_n(x) = 3 + \frac{11}{2}(e^{2x} - 1) \Rightarrow y(x) = \frac{11}{2}e^{2x} - \frac{5}{2}$$
$$\left(\text{ αφού } e^{2x} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2x)^n}{n!} = 1 + \frac{2x}{1} + ...\right)$$

Ελληνική βιβλιογραφία

[1] Γ. Δάσιος, Συνήθεις Διαφορικές Εξισώσεις, Πάτρα, 1985

[2] Θ. Κυβεντίδης, Διαφορικές εξισώσεις, Εκδόσεις Ζήτη, Θεσ/κη, 1993

[3] Β. Μπαρμπάνης, Μαθήματα Διαφορικών Εξισώσεων, Πάτρα, 1976

[4] Π. Σιαφαρίκας, Εφαρμογές των Σ.Δ.Ε., Τόμος Ι, Πάτρα, 2002

[5] Ν. Σταυρακάκης, ΣΔΕ : γραμμική και μη γραμμική θεωρία από τη φύση και τη ζωή, Παπασωτηρίου, Αθήνα, 1997

Ξενόγλωσση βιβλιογραφία

[1] W. E. Boyce, R. C. Di Prima, Elementary differential equations and boundary value problems, N. Y. John Wiley & Sons, 1977

[2] M. Braun, Differential equations and their Applications, Springer-Verlag, 1993

[3] Abell and Braselton, Modern Differential equations, Theory, Application, Technology, Saunders College Publishing, 1996

[4] B. Rai and D. P. Choudhury, Ordinary Differential Equations, An introduction, Alpha Science, International Ltd, 2005

[5] Rice and Strange, Ordinary Differential Equations with Application, Brooks/Cole Publishing Company, 1996