Τίτλος Μαθήματος: Συνήθεις Διαφορικές Εξισώσεις Ι

Ενότητα: Σ.Δ.Ε. χωριζομένων μεταβλητών, ομογενείς ως προς x, y και Σ.Δ.Ε. αναγόμενες σε αυτές

Όνομα Καθηγητή: Χρυσή Κοκολογιαννάκη

Τμήμα: Μαθηματικών

Άδειες Χρήσης

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Πατρών**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

2 Συνήθεις Διαφορικές Εξισώσεις πρώτης τάξης

Οι Σ.Δ.Ε. πρώτης τάξης έχουν τη μορφή $F(x, y(x), y'(x)) = 0$. Αν μπορούν να γραφούν στη μορφή $y'(x) = f(x, y(x))$ τότε λέμε ότι είναι γραμμένες στην κανονική τους μορφή.

Οι βασικές κατηγορίες Σ.Δ.Ε. πρώτης τάξης της μορφής $y'(x) = f(x, y(x))$ με τις οποίες θα ασχοληθούμε είναι οι Σ.Δ.Ε. χωριζομένων μεταβλητών, ακριβείς (ή πλήρεις), γραμμικές και συγκεκριμένες μορφές Σ.Δ.Ε. που ανάγονται σ' αυτές. Θα εξετάσουμε επίσης και κάποιες Σ.Δ.Ε. πρώτης τάξης και ανωτέρου βαθμού.

2.1 Σ.Δ.Ε. χωριζομένων μεταβλητών

Ορισμός 2.1 Σ.Δ.Ε. χωριζομένων μεταβλητών, λέγεται κάθε Σ.Δ.Ε. η οποία είναι ή μπορούμε να τη φέρουμε στη μορφή:

$$g(y)y'(x) = f(x) \tag{2.1}$$

όπου $g(y)$ και $f(x)$ είναι πραγματικές συναρτήσεις.

Για να βρούμε τη γενική λύση η το γενικό ολοκλήρωμα της Σ.Δ.Ε. (2.1) ολοκληρώνουμε ως προς x και τα δύο μέλη αυτής και προσθέτουμε μια σταθερά, λόγω της ολοκλήρωσης. Δηλαδή:

$$\int g(y)y'(x)dx = \int f(x)dx + c \tag{2.2}$$

Από τον ορισμό $dy = y'dx$ του διαφορικού μιας συνάρτησης $y = y(x)$, καταλήγουμε:

$$\int g(y)dy = \int f(x)dx + c \tag{2.3}$$

Η ισότητα (2.3) μας δίνει το γενικό ολοκλήρωμα της (2.2).

Σημείωση 2.1 Η Σ.Δ.Ε. (2.1) μπορεί να γραφεί ισοδύναμα στη διαφορική μορφή:

$$g(y)dy = f(x)dx \tag{2.4}$$

Σημείωση 2.2Στη μορφή (2.1) μπορούμε να φέρουμε κάθε Σ.Δ.Ε. της μορφής

$$a(x)b(y)y'(x) = k(x)h(y) \tag{2.5}$$

Πράγματι, αν θεωρήσουμε $a(x) \neq 0$,$h(y) \neq 0$ τότε η (2.5) γράφεται:

$\dfrac{b(y)}{h(y)}y'(x) = \dfrac{k(x)}{a(x)}$ η οποία είναι της μορφής (2.1), θέτοντας
$g(y) = \dfrac{b(y)}{h(y)}$ και $f(x) = \dfrac{k(x)}{a(x)}$.
Αν οι συναρτήσεις $a(x)$ και $h(y)$ είναι ίσες με μηδέν, τότε παίρνουμε ιδιάζουσες λύσεις της Σ.Δ.Ε (2.5), αν αυτές δεν εμπεριέχονται στη γενική λύση αυτής.

Παράδειγμα 1 Να λυθεί η Σ.Δ.Ε.: $y' = \dfrac{y}{x},\ x \neq 0.$

Λύση

Η δοθείσα Σ.Δ.Ε. για $y \neq 0$ γράφεται $\dfrac{y'}{y} = \dfrac{1}{x}$ η οποία είναι χωριζομένων μεταβλητών. Άρα η γενική της λύση προκύπτει από την ισότητα

$$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{x} + c \Rightarrow ln|y| = ln|x| + c \Rightarrow ln\left|\frac{y}{x}\right| = c \Rightarrow y = cx$$

Η $y = 0$ είναι ιδιάζουσα λύση της δοθείσας Σ.Δ.Ε.

Παράδειγμα 2 Να λυθεί η Σ.Δ.Ε.: $y - x\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y}{x},\ x \neq 0.$

Λύση

Η δοθείσα Σ.Δ.Ε. γράφεται

$y - x\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y}{x} \Rightarrow y - \dfrac{y}{x} = x\dfrac{dy}{dx} \Rightarrow y\left(\dfrac{x-1}{x}\right) = x\dfrac{dy}{dx}$ η οποία είναι χωριζομένων μεταβλητών, διότι για $y \neq 0$ γράφεται

$$\left(\frac{x-1}{x^2}\right)dx = \frac{dy}{y}$$

Το γενικό της ολοκλήρωμα θα είναι:

$$\int \left(\frac{x-1}{x^2}\right)dx = \int \frac{dy}{y} + c \Rightarrow ln|x| + \frac{1}{x} = ln|y| + c$$

Η $y = 0$ είναι ιδιάζουσα λύση αυτής.

Παράδειγμα 3 Να λυθεί η Σ.Δ.Ε.: $(x - y^2x)dx - (y - x^2y)dy = 0$

Λύση

Η δοθείσα Σ.Δ.Ε. γράφεται

$(x - y^2x)dx - (y - x^2y)dy = 0 \Rightarrow x(1 - y^2)dx - y(1 - x^2)dy = 0$

Για $1 - y^2 \neq 0$ και $1 - x^2 \neq 0$ μπορεί να γραφεί
$\frac{x}{1-x^2}dx = \frac{y}{1-y^2}dy$, η οποία είναι χωριζομένων μεταβλητών και το γενικό της ολοκλήρωμα θα προκύψει από την ισότητα:

$\int \frac{x}{1-x^2}dx = \int \frac{y}{1-y^2}dy + c$ οπότε

$$\frac{1}{2}\int \frac{1}{1-x}dx - \frac{1}{2}\int \frac{1}{1+x}dx = \frac{1}{2}\int \frac{1}{1-y}dy - \frac{1}{2}\int \frac{1}{1+y}dy + c \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{2}ln|1-x| + \frac{1}{2}ln|1+x| = -\frac{1}{2}ln|1-y| + \frac{1}{2}ln|1+y| + c \Rightarrow$$

$$\Rightarrow ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right| = ln\left|\frac{1+y}{1-y}\right| + c \Rightarrow \frac{1+x}{1-x} = c\frac{1+y}{1-y}$$

Οι $x = \pm 1, y = \pm 1$ είναι ιδιάζουσες λύσεις της δοθείσας Σ.Δ.Ε.

Παράδειγμα 4 Να βρεθεί η λύση του Π.Α.Τ.:

$(1 + e^x)yy' = e^x$, $y(0) = 1$

Λύση

Η δοθείσα Σ.Δ.Ε. μπορεί να γραφεί στη μορφή: $ydy = \frac{e^x}{1+e^x}dx$, η οποία είναι χωριζομένων μεταβλητών και το γενικό της ολοκλήρωμα θα προκύψει παίρνοντας τα ολοκληρώματα:
$\int ydy = \int \frac{e^x}{1+e^x}dx + c_1 \Rightarrow \frac{y^2}{2} = ln(1 + e^x) + c_1$
Χρησιμοποιώντας την αρχική συνθήκη $y(0) = 1$ έχουμε:
$\frac{1}{2} = ln2 + c_1 \Rightarrow c_1 = \frac{1}{2} - ln2$

Κάνοντας αντικατάσταση στην προηγούμενη σχέση το c_1 η λύση του Π.Α.Τ είναι:
$\dfrac{y^2}{2} = ln(1+e^x) + \dfrac{1}{2} - ln2 \Rightarrow y^2 = 2ln\left(\dfrac{1+e^x}{2}\right) + 1 \Rightarrow y^2 = ln\left(\dfrac{1+e^x}{2}\right)^2 + 1.$

Παράδειγμα 5 Να βρεθεί η λύση του Π.Α.Τ.:
$y' = xe^{y-x^2}$, όταν για $x = 0, y = 0$

Λύση

Η δοθείσα Σ.Δ.Ε. γράφεται: $e^{-y}dy = xe^{-x^2}dx$, που είναι χωριζομένων μεταβλητών. Το γενικό της ολοκλήρωμα θα είναι: $\int e^{-y}dy = \int xe^{-x^2}dx + c_1 \Rightarrow$
$-e^{-y} = -\dfrac{1}{2}e^{-x^2} + c_1 \Rightarrow 2e^{-y} - e^{-x^2} = c.$
Επειδή για $x = 0 \Rightarrow y = 0$, έχουμε:
$2 - 1 = c \Rightarrow c = 1.$
Άρα η λύση του Π.Α.Τ. είναι:
$2e^{-y} = 1 + e^{-x^2}.$

2.2 Μορφές Σ.Δ.Ε πρώτης τάξης που ανάγονται σε Σ.Δ.Ε. χωριζομένων μεταβλητών

2.2.1 Σ.Δ.Ε. πρώτης τάξης ομογενείς ως προς x, y

Θεωρούμε την Σ.Δ.Ε. της μορφής:

$$y'(x) = \frac{P(x,y)}{Q(x,y)} \tag{2.6}$$

όπου $P(x,y), Q(x,y)$ συναρτήσεις συνεχείς σ' ένα υποσύνολο του $\mathbb{R}^2$, και $Q(x,y) \neq 0$. Η Σ.Δ.Ε. (2.6) μπορεί να γραφεί στη διαφορική μορφή

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0 \tag{2.7}$$

με $M(x,y)$ και $N(x,y)$ συνεχείς σ' ένα υποσύνολο του $\mathbb{R}^2$.

Ορισμός 2.2 Η Σ.Δ.Ε. της μορφής (2.6) ή ισοδύναμα (2.7) λέγεται ομογενής ως προς x και y αν οι συναρτήσεις $P(x,y)$ και $Q(x,y)$ είναι ομογενείς ως προς x, y του ίδιου βαθμού ομογενείας.
(Υπενθυμίζουμε ότι μια συνάρτηση $\phi(x,y)$ λέγεται ομογενής ως προς x και y, βαθμού ομογενείας $n \in \mathbb{R}$ αν ισχύει: $\phi(tx,ty) = t^n\phi(x,y)$).

Όταν η $\phi(x,y)$ είναι ομογενής βαθμού n, τότε θέτοντας $t = \dfrac{1}{x}, x \neq 0$ έχουμε:
$\phi\left(1, \dfrac{y}{x}\right) = \phi(tx, ty) = t^n\phi(x,y) = \dfrac{\phi(x,y)}{x^n}$
Άρα: $\phi(x,y) = x^n\phi\left(1, \dfrac{y}{x}\right)$

Συνεπώς η ομογενής Σ.Δ.Ε. ως προς x, y (2.6) γράφεται:

$$y'(x) = \frac{x^n P(1, \frac{y}{x})}{x^n Q(1, \frac{y}{x})} \Rightarrow y'(x) = \frac{P(1, \frac{y}{x})}{Q(1, \frac{y}{x})} \tag{2.8}$$

Θέτουμε λοιπόν $\dfrac{y(x)}{x} = z(x)$, με $z(x) \neq 0$, ή $y(x) = xz(x)$, παραγωγίζουμε ως προς x: $y'(x) = z(x) + xz'(x)$ και αντικαθιστούμε στη (2.8), οπότε αυτή μετατρέπεται στην Σ.Δ.Ε.

$$z(x) + xz'(x) = \frac{P(1,z)}{Q(1,z)} \Rightarrow xz'(x) = \frac{P(1,z)}{Q(1,z)} - z \tag{2.9}$$

η οποία είναι χωριζομένων μεταβλητών ως προς $z(x)$.
Λύνουμε την (2.9) και στη γενική της λύση ή το γενικό της ολοκλήρωμα, θέτουμε $z(x) = \dfrac{y(x)}{x}$ και παίρνουμε την λύση της αρχικής Σ.Δ.Ε. (2.6).

Παράδειγμα 6 Να λυθεί η Σ.Δ.Ε. $\quad xydx + (x^2 + y^2)dy = 0 \qquad$ (1)

Λύση

Παρατηρούμε ότι: $M(x,y) = xy$, $N(x,y) = x^2 + y^2 \quad$ και

$M(tx, ty) = txty = t^2xy = t^2M(x,y)$

$N(tx, ty) = (tx)^2 + (ty)^2 = t^2x^2 + t^2y^2 = t^2(x^2 + y^2) = t^2N(x,y)$

Δηλαδή οι συναρτήσεις $M(x,y)$ και $N(x,y)$ είναι ομογενείς συναρτήσεις ως προς x και y βαθμού ομογενείας 2 η κάθε μία, άρα η Σ.Δ.Ε. (1) είναι ομογενής ως προς x και y. Για να την λύσουμε, θέτουμε $\dfrac{y}{x} = u, x \neq 0, u \neq 0 \Rightarrow y = ux$, $y' = u'x + u$ και η (1) γίνεται:

$xydx + (x^2 + y^2)dy = 0 \Rightarrow ux^2dx + (x^2 + u^2x^2)(udx + xdu) = 0 \Rightarrow$
$udx + (1 + u^2)(udx + xdu) = 0 \Rightarrow (2u + u^3)dx + x(1 + u^2)du = 0 \quad (2)$

Η Σ.Δ.Ε. (2) είναι χωριζομένων μεταβλητών και μπορεί να γραφεί:

$$\frac{1+u^2}{2u+u^3}du + \frac{dx}{x} = 0$$

Το γενικό της ολοκλήρωμα θα βρεθεί παίρνοντας τα ολοκληρώματα:

$\displaystyle\int \frac{1+u^2}{2u+u^3}du + \int \frac{dx}{x} = c$ οπότε:

$$\frac{1}{2}\int \frac{du}{u} + \frac{1}{2}\int \frac{u}{u^2+2}du = -\int \frac{dx}{x} + c \Rightarrow$$
$$\frac{1}{2}ln|u| + \frac{1}{4}ln\left|u^2+2\right| = ln|x| + c \Rightarrow ln|u|^2 + ln\left|u^2+2\right| = ln|x|^{-4} + c \Rightarrow$$
$$ln\left|u^2(u^2+2)x^4\right| = c \Rightarrow u^2(u^2+2)x^4 = c$$

Θέτοντας $u = \dfrac{y}{x}$ βρίσκουμε το γενικό ολοκλήρωμα της δοθείσας δ.ε.
Άρα:

$$\left(\frac{y}{x}\right)^2\left(\left(\frac{y}{x}\right)^2 + 2\right)x^4 = c \Rightarrow y^2(y^2+2x^2) = c$$

Παράδειγμα 7 Να λυθεί η Σ.Δ.Ε. $\left(1+e^{\frac{x}{y}}\right)dx + e^{\frac{x}{y}}\left(1-\dfrac{x}{y}\right)dy = 0, y \neq 0 \ (1)$ με την συνθήκη $y(0) = 1$.

Λύση

Αν καλέσουμε $M(x,y) = 1 + e^{\frac{x}{y}}$ και $N(x,y) = e^{\frac{x}{y}}\left(1-\dfrac{x}{y}\right)$, τότε:

$$M(tx,ty) = 1 + e^{\frac{tx}{ty}} = 1 + e^{\frac{x}{y}} = M(x,y)$$

$$N(tx,ty) = e^{\frac{tx}{ty}}\left(1-\frac{tx}{ty}\right) = e^{\frac{x}{y}}\left(1-\frac{x}{y}\right) = N(x,y),$$

δηλαδή οι συναρτήσεις είναι ομογενείς ως προς x, y βαθμού ομογενείας 0.
Άρα η Σ.Δ.Ε. (1) είναι ομογενής ως προς x, y και θέτουμε

$\dfrac{x}{y} = u \Rightarrow x = yu \Rightarrow dx = udy + ydu$, οπότε:

$$\left(1+e^{\frac{x}{y}}\right)dx + e^{\frac{x}{y}}\left(1-\frac{x}{y}\right)dy = 0 \Rightarrow (1+e^u)(udy+ydu) + e^u(1-u)dy = 0 \Rightarrow$$
$$(u+e^u)dy + y(1+e^u)du = 0$$

Η δ.ε. είναι χωριζομένων μεταβλητών ως προς $u(x)$ και γράφεται

$$\frac{dy}{y} + \frac{1+e^u}{u+e^u}du = 0$$

Το γενικό ολοκλήρωμα θα είναι:

$$\int \frac{dy}{y} + \int \frac{1+e^u}{u+e^u}du = c \Rightarrow ln|y| + ln\,|u+e^u| = c \Rightarrow ln\,|y\,(u+e^u)| = c \Rightarrow$$
$$y(u+e^u) = c$$

Θέτοντας $u = \dfrac{x}{y}$ παίρνουμε το γενικό ολοκλήρωμα της δοθείσης δ.ε.
$x + ye^{\frac{x}{y}} = c.$

Χρησιμοποιώντας την αρχική συνθήκη, προκύπτει: $c = 1$, οπότε η λύση του δοθέντος Π.Α.Τ. είναι: $x + ye^{\frac{x}{y}} = 1.$

Παράδειγμα 8 Να λυθεί η Σ.Δ.Ε.: $x^2ydx - (x^3 + y^3)dy = 0$

Λύση
Η Σ.Δ.Ε. είναι ομογενής ως προς x, y, διότι: αν $M(x,y) = x^2y$ και
$N(x,y) = -(x^3 + y^3)$ ισχύει:
$M(tx,ty) = t^3x^2y = t^3M(x,y)$
$N(tx,ty) = t^3(x^3 + y^3) = t^3N(x,y),$
οπότε θέτουμε $y = xu, u \neq 0, x \neq 0, dy = xdu + udx.$
Αντικαθιστούμε στην αρχική οπότε:
$x^3udx - (x^3 + x^3u^3)(xdu + udx) \Rightarrow udx - (1+u^3)xdu - u(1+u^3)dx = 0$
$\Rightarrow \dfrac{dx}{x} + \dfrac{1+u^3}{u^4}du = 0$ η οποία είναι δ.ε. χωριζομένων μεταβλητών.
Το γενικό ολοκλήρωμα είναι:
$ln|x| - \dfrac{1}{3u^3} + ln|u| = c_1 \Rightarrow ln|xu| = \dfrac{1}{3u^3} + c_1 \Rightarrow ln|y| = \dfrac{x^3}{3y^3} + c_1 \Rightarrow y = ce^{\frac{x^3}{3y^3}}.$

Παράδειγμα 9 Να λυθεί η Σ.Δ.Ε.: $(x - 2y)dx + (2x + y)dy = 0.$

Λύση
Θέτουμε $M(x,y) = x - 2y$ και $N(x,y) = 2x + y$. Επειδή
$M(tx,ty) = tx - 2ty = tM(x,y)$ και $N(tx,ty) = 2tx + ty = tN(x,y)$
η δοθείσα Σ.Δ.Ε. είναι ομογενής ως προς x, y, οπότε θέτουμε $y = xu, u \neq 0, x \neq 0, dy = xdu + udx.$
Αντικαθιστούμε στην αρχική οπότε:

$(x-2xu)dx+(2x+xu)(udx+xdu)=0 \Rightarrow$
$(1-2u)dx+(2+u)(udx+xdu)=0 \Rightarrow (1+u^2)dx+(2+u)xdu=0 \Rightarrow$
$\dfrac{dx}{x}+\dfrac{2+u}{1+u^2}du=0$ η οποία είναι δ.ε. χωριζομένων μεταβλητών.
Το γενικό ολοκλήρωμα αυτής είναι:
$\int \dfrac{dx}{x}+\displaystyle\int \dfrac{2+u}{1+u^2}du=c_1 \Rightarrow \int \dfrac{dx}{x}+2\int \dfrac{1}{1+u^2}du+\int \dfrac{u}{1+u^2}du=c_1 \Rightarrow$
$ln|x|+2arctanu+\dfrac{1}{2}ln(1+u^2)=c_1 \Rightarrow ln\bigg(x^2(1+u^2)\bigg)=c-4arctanu \Rightarrow$
$ln(x^2+y^2)+4arctan\left(\dfrac{y}{x}\right)=c.$

Παράδειγμα 10 Να λυθεί η Σ.Δ.Ε.: $2(2x^2+y^2)dx-xydy=0.$

Λύση

Η Σ.Δ.Ε. είναι ομογενής οπότε θέτουμε $y=xu, u\neq 0, x\neq 0, dy=xdu+udx.$
Αντικαθιστούμε στην αρχική οπότε:
$2(2x^2+x^2u^2)dx-x^2u(xdu+udx)=0 \Rightarrow 2(2+u^2)dx-u(xdu+udx)=0 \Rightarrow$
$(4+u^2)dx-uxdu=0 \Rightarrow \dfrac{dx}{x}-\dfrac{u}{4+u^2}du=0$ η οποία είναι δ.ε. χωριζομένων μεταβλητών. Το γενικό ολοκλήρωμα αυτής είναι:
$\displaystyle\int \dfrac{dx}{x}-\int \dfrac{u}{4+u^2}du=c_1 \Rightarrow ln|x|-\dfrac{1}{2}ln(4+u^2)=c_1 \Rightarrow ln\left(\dfrac{x^2}{4+u^2}\right)=2c_1 \Rightarrow$
$\dfrac{x^2}{4+u^2}=c \Rightarrow x^4=c(4x^2+y^2).$

2.2.2 Σ.Δ.Ε. της μορφής $y'(x)=f\left(\dfrac{a_1x+b_1y+c_1}{a_2x+b_2y+c_2}\right)$

(α) Αν $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}=0$, δηλαδή $\dfrac{a_1}{a_2}=\dfrac{b_1}{b_2}=k$ οπότε $a_1=ka_2, b_1=kb_2$ και η Σ.Δ.Ε. γίνεται $y'(x)=f\left(\dfrac{k(a_2x+b_2y)+c_1}{a_2x+b_2y+c_2}\right)$ και ανάγεται σε Σ.Δ.Ε. χωριζομένων μεταβλητών ως προς $z(x)$, θέτοντας $a_2x+b_2y=z \Rightarrow y'=\dfrac{1}{b_2}(z'-a_2).$

(β) Αν $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}\neq 0$, τότε λύνουμε το σύστημα $\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1=0 \\ a_2x+b_2y+c_2=0 \end{cases}$ και έστω

(x_0, y_0) η λύση του. Θέτουμε $x = x_0 + X$ και $y = y_0 + Y$, οπότε $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dY}{dX}$ και η δοθείσα Σ.Δ.Ε. μετασχηματίζεται σε ομογενή ως προς $Y(X)$.

Παράδειγμα 11 Να λυθεί η Σ.Δ.Ε. $y'(x) - \dfrac{x-2y+9}{3x-6y+19} = 0, 3x-6y+19 \neq 0$.

Λύση

Παρατηρούμε ότι $\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -6 \end{vmatrix} = 0$, άρα θέτουμε $x - 2y = z$ και $1 - 2y' = z' \Rightarrow$ $y' = \dfrac{1}{2}(1-z')$, οπότε αντικαθιστούμε στην δοθείσα Σ.Δ.Ε. και έχουμε:

$$\frac{1}{2}(1-z') = \frac{z+9}{3z+19} \Rightarrow 1 - z' = \frac{2z+18}{3z+19} \Rightarrow \frac{dz}{dx} = \frac{z+1}{3z+19}$$

Για $z + 1 \neq 0$ έχουμε:

$\dfrac{3z+19}{z+1}dz = dx$ η οποία είναι χωριζομένων μεταβλητών ως προς $z(x)$ και το γενικό της ολοκλήρωμα θα προκύψει ολοκληρώνοντας,

$$\int \left(3 + \frac{16}{z+1}\right) dz = x + c \Rightarrow 3z + 16ln\,|z+1| = x + c \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3(x-2y) + 16ln\,|x-2y+1| = x + c \Rightarrow x - 3y + 8ln\,|x-2y+1| = c$$

Για $z + 1 = 0 \Rightarrow x - 2y + 1 = 0 \Rightarrow y = \dfrac{x+1}{2}$ προκύπτει ειδική λύση αυτής.

Παράδειγμα 12 Να λυθεί η Σ.Δ.Ε. $y'(x) = \dfrac{x+2y+2}{y-2x+6}, \quad y - 2x + 6 \neq 0$.

Λύση

Παρατηρούμε ότι $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 5 \neq 0$, οπότε λύνουμε το σύστημα $\begin{cases} x + 2y + 2 = 0 \\ -2x + y + 6 = 0 \end{cases}$ και $(2, -2)$ είναι η λύση του. Θέτουμε $x = 2 + X$ και $y = -2 + Y$, οπότε $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dY}{dX}$ και η δοθείσα Σ.Δ.Ε. παίρνει τη μορφή:

$$\frac{dY}{dX} = \frac{X+2Y}{-2X+Y} \Rightarrow \frac{dY}{dX} = \frac{1+2\dfrac{Y}{X}}{-2+\dfrac{Y}{X}}$$ η οποία είναι ομογενής και για την λύση της θέτουμε: $\dfrac{Y}{X} = U \Rightarrow Y'(X) = U'(X)X + U(X)$ και η ομογενής Σ.Δ.Ε. παίρνει την μορφή:

$$U'X + U = \frac{1+2U}{-2+U} \Rightarrow U'X = \frac{1+4U-U^2}{-2+U} \Rightarrow \frac{2-U}{1+4U-U^2}dU = -\frac{dX}{X},$$

για $U^2 - 4U - 1 \neq 0$ η οποία είναι χωριζομένων μεταβλητών ως προς $U(X)$.

Οπότε ολοκληρώνοντας έχουμε:

$$\int \frac{2-U}{1+4U-U^2}dU = \int \frac{dX}{X} + c \Rightarrow \frac{1}{2}ln\left|1+4U-U^2\right| = -ln\,|X| + c$$

$$\Rightarrow ln\left|\left(1+4U-U^2\right)X^2\right| = c \Rightarrow \left(1+4U-U^2\right)x^2 = c \xRightarrow{U=\frac{Y}{X}}$$

$$\left(1+4\frac{Y}{X} - \frac{Y^2}{X^2}\right)X^2 = c \Rightarrow X^2 + 4XY - Y^2 = c$$

Για να βρούμε το γενικό ολοκλήρωμα της δοθείσης δ.ε. θέτουμε: $X = x - 2$ και $Y = y + 2$, οπότε προκύπτει:
$\Rightarrow (x-2)^2 + 4(x-2)(y+2) - (y+2)^2 = c$
$\Rightarrow x^2 - y^2 - 12y + 4x - 4xy = c.$
Η ισότητα: $U^2 - 4U - 1 = 0$ μας δίνει ιδιάζον ολοκλήρωμα, δηλαδή:
$\left(\dfrac{Y}{X}\right)^2 - 4\dfrac{Y}{X} - 1 = 0 \Rightarrow Y^2 - 4YX - X^2 = 1$
$\Rightarrow (y+2)^2 - 4(y+2)(x-2) - (x-2)^2 = 1.$

Παράδειγμα 13 Να λυθεί η Σ.Δ.Ε. $y' = \dfrac{x+2y-3}{2x+y-3}$.

Λύση

Παρατηρούμε ότι $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -3 \neq 0$, οπότε λύνουμε το σύστημα $\begin{cases} x+2y-3=0 \\ 2x+y-3=0 \end{cases}$ και $(1,1)$ είναι η λύση του. Θέτουμε $x = u+1$ και $y = v+1$, οπότε $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dv}{du}$ και η δοθείσα Σ.Δ.Ε. παίρνει τη μορφή:

$$\frac{dv}{du} = \frac{u+1+2v+2-3}{2u+2+v+1-3} \Rightarrow \frac{dv}{du} = \frac{u+2v}{2u+v},$$ η οποία είναι ομογενής. Για

να την λύσουμε, θέτουμε $\dfrac{v}{u} = w \Rightarrow v = uw \Rightarrow dv = udw + wdu$, οπότε παίρνει τη μορφή:
$u\dfrac{dw}{du} + w = \dfrac{1+2w}{2+w} \Rightarrow u\dfrac{dw}{du} = \dfrac{1+2w-2w-w^2}{2+w} \Rightarrow \dfrac{(2+w)dw}{1-w^2} = \dfrac{du}{u}$, για $1 - w^2 \neq 0$ η οποία είναι χωριζομένων μεταβλητών ως προς $w(u)$. Οπότε ολοκληρώνοντας έχουμε:

$$2\int \frac{dw}{1-w^2} - \frac{1}{2}\int \frac{(-2w)}{1-w^2}dw = \int \frac{du}{u} + c_1 \Rightarrow$$
$$\int \frac{dw}{1+w} + \int \frac{dw}{1-w} - \frac{1}{2}ln|1-w^2| = ln|u| + c_1 \Rightarrow$$
$$ln|1+w| - ln|1-w| - \tfrac{1}{2}ln|1-w^2| = ln|u| + c_1 \Rightarrow$$
$$ln\left|\frac{(1+w)^2}{(1-w)^2(1-w^2)}\right| = ln|u^2 c_1| \Rightarrow \frac{(1+w)^2}{(1-w)^2(1-w^2)} = u^2 c_1 \Rightarrow$$
$$\frac{1+w}{(1-w)^3} = u^2 c_1 \Rightarrow \frac{1+\frac{v}{u}}{\left(1-\frac{v}{u}\right)^3} = u^2 c_1 \Rightarrow \frac{u+v}{(u-v)^3} = c_1 \Rightarrow$$
$$\frac{x-1+y-1}{(x-1-y+1)^3} = c_1 \Rightarrow x+y-2 = c_1(x-y)^3.$$

Αν $w^2 = 1 \Rightarrow w = \pm 1$ οπότε $v = \pm u \Rightarrow y - 1 = \pm(x-1) \Rightarrow y = 1 \pm (x-1)$ είναι ιδιάζουσες λύσεις.

Παράδειγμα 14 Να λυθεί η Σ.Δ.Ε. $y' = \left(\dfrac{x-y+3}{x-y+1}\right)^2$.

Λύση

Παρατηρούμε ότι $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 0$, οπότε θέτουμε $x - y = u$, $\dfrac{dy}{dx} = 1 - \dfrac{du}{dx}$ και η δοθείσα Σ.Δ.Ε. παίρνει τη μορφή:

$$1 - \frac{du}{dx} = \left(\frac{u+3}{u+1}\right)^2 \Rightarrow \frac{du}{dx} = 1 - \frac{(u+3)^2}{(u+1)^2} \Rightarrow \frac{du}{dx} = \frac{u^2+2u+1-u^2-6u-9}{(u+1)^2} \Rightarrow$$
$$\frac{du}{dx} = -\frac{4u+8}{(u+1)^2} \Rightarrow \frac{(u+1)^2}{u+2}du = -4dx,$$

η οποία είναι δ.ε. χωριζομένων μεταβλητών ως προς $u(x)$. Οπότε ολοκληρώνοντας έχουμε:

$$\int \frac{u^2+2u+1}{u+2}du = -4x + c_1 \Rightarrow \int \left(u + \frac{1}{u+2}\right)du = -4x + c_1 \Rightarrow$$
$$\frac{u^2}{2} + ln|u+2| = -4x + c_1 \Rightarrow u^2 + ln(u+2)^2 = 2(c_1 - 4x) \Rightarrow$$
$$(x-y)^2 + ln(x-y+2)^2 = c - 8x$$

Σημείωση 2.3 Οι Σ.Δ.Ε. της μορφής $y' = f(ax + by + c)$, ή της μορφής $y' = f\left(\dfrac{1}{ax + by + c}\right)$ ανάγονται σε Σ.Δ.Ε. χωριζομένων μεταβλητών της μορφής $z'(x) = g(z)$, θέτοντας $z = ax + by + c$.

Οι μορφές αυτές προκύπτουν από την προηγούμενη περίπτωση, αν θέσουμε $a_2 = b_2 = 0, c_2 \neq 0$, ή $a_1 = b_1 = 0, c_1 \neq 0$ αντίστοιχα.

Παράδειγμα 15 Να λυθεί η Σ.Δ.Ε.: $y' = (y - x)^2$.

Λύση

Θέτουμε $y - x = z$. Παραγωγίζουμε ως προς x: $y' - 1 = z' \Rightarrow y' = z + 1$, οπότε η δ.ε. γίνεται:

$$y' = (y - x)^2 \Rightarrow z' + 1 = z^2 \Rightarrow z' = z^2 - 1 \Rightarrow \frac{dz}{z^2 - 1} = dx, z^2 - 1 \neq 0$$

είναι χωριζομένων μεταβλητών ως προς $z(x)$. Ολοκληρώνουμε ως προς x και έχουμε

$$\int \frac{dz}{z^2 - 1} = x + c \Rightarrow \frac{1}{2}\int \frac{1}{z - 1}dz - \frac{1}{2}\int \frac{1}{z + 1}dz = x + c \Rightarrow$$
$$\frac{1}{2}ln\,|z - 1| - \frac{1}{2}ln\,|z + 1| = x + c \Rightarrow ln\left|\frac{z - 1}{z + 1}\right| = 2x + c \Rightarrow$$
$$\frac{z - 1}{z + 1} = ce^{2x} \Rightarrow z = \frac{ce^{2x} + 1}{1 - ce^{2x}}$$

Θέτουμε $z = y - x$, οπότε η γενική λύση της αρχικής είναι

$$y = x + \frac{ce^{2x} + 1}{1 - ce^{2x}}$$

Η ισότητα $z^2 - 1 = 0 \Rightarrow z = \pm 1 \Rightarrow y = x \pm 1$ δίνει ιδιάζουσες λύσεις της αρχικής.

Παράδειγμα 16 Να λυθεί η Σ.Δ.Ε. $y' = \dfrac{1}{x + y + 1}$, $x + y + 1 \neq 0$.

Λύση

Θέτουμε $x + y + 1 = z \Rightarrow y' = z' - 1$. Άρα:

$y' = \dfrac{1}{x+y+1} \Rightarrow z' - 1 = \dfrac{1}{z} \Rightarrow z' = \dfrac{z+1}{z} \xRightarrow{z+1\neq 0} \dfrac{z}{z+1}dz = dx \Rightarrow$
$\left(1 - \dfrac{1}{z+1}\right) dz = dx,$
είναι χωριζομένων μεταβλητών ως προς $z(x)$ και ολοκληρώνοντας ως προς x έχουμε:

$$\int \left(1 - \frac{1}{z+1}\right) dz = x + c \Rightarrow z + ln|z+1| = x + c \Rightarrow$$

$y + ln\,|x+y+2| = c$, αφού $z = x+y+1$.

Η συνάρτηση $y = -x-2$ είναι ιδιάζουσα λύση της δοθείσας.

Ελληνική βιβλιογραφία

[1] Γ. Δάσιος, Συνήθεις Διαφορικές Εξισώσεις, Πάτρα, 1985

[2] Θ. Κυβεντίδης, Διαφορικές εξισώσεις, Εκδόσεις Ζήτη, Θεσ/κη, 1993

[3] Β. Μπαρμπάνης, Μαθήματα Διαφορικών Εξισώσεων, Πάτρα, 1976

[4] Π. Σιαφαρίκας, Εφαρμογές των Σ.Δ.Ε., Τόμος Ι, Πάτρα, 2002

[5] Ν. Σταυρακάκης, ΣΔΕ : γραμμική και μη γραμμική θεωρία από τη φύση και τη ζωή, Παπασωτηρίου, Αθήνα, 1997

Ξενόγλωσση βιβλιογραφία

[1] W. E. Boyce, R. C. Di Prima, Elementary differential equations and boundary value problems, N. Y. John Wiley & Sons, 1977

[2] M. Braun, Differential equations and their Applications, Springer-Verlag, 1993

[3] Abell and Braselton, Modern Differential equations, Theory, Application, Technology, Saunders College Publishing, 1996

[4] B. Rai and D. P. Choudhury, Ordinary Differential Equations, An introduction, Alpha Science, International Ltd, 2005

[5] Rice and Strange, Ordinary Differential Equations with Application, Brooks/Cole Publishing Company, 1996