Τίτλος Μαθήματος: Συνήθεις Διαφορικές Εξισώσεις Ι

Ενότητα: Εισαγωγικές έννοιες και ταξινόμηση Σ.Δ.Ε.

Όνομα Καθηγητή: Χρυσή Κοκολογιαννάκη

Τμήμα: Μαθηματικών

Άδειες Χρήσης

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Πατρών**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο

ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ

ΕΣΠΑ
2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

1 Εισαγωγικές έννοιες και ταξινόμηση Σ.Δ.Ε.

Με τον όρο **διαφορική εξίσωση** θεωρούμε κάθε εξίσωση που εκφράζει μια σχέση μεταξύ ανεξάρτητης, εξαρτημένης μεταβλητής (άγνωστη συνάρτηση) και κάποιων παραγώγων αυτής.
Αν η άγνωστη συνάρτηση είναι συνάρτηση μιας μεταβλητής, η διαφορική εξίσωση λέγεται **Συνήθης Διαφορική Εξίσωση (Σ.Δ.Ε.).**
Αν η άγνωστη συνάρτηση είναι δύο ή περισσοτέρων μεταβλητών, οι παράγωγοι είναι μερικές παράγωγοι και η διαφορική εξίσωση λέγεται **Διαφορική Εξίσωση με μερικές παραγώγους** ή Μερική Διαφορική Εξίσωση **(Μ.Δ.Ε.)**.

Παράδειγμα 1: Οι διαφορικές εξισώσεις:

$$y''(x) + 4y(x) = cosx, \qquad \frac{dy}{dx} = x^2 + 1$$

είναι Συνήθεις Διαφορικές Εξισώσεις, ενώ οι διαφορικές εξισώσεις

$$\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2} = 0, \qquad x\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} + y\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = 2f(x,y)$$

είναι Μερικές Διαφορικές Εξισώσεις.

Εδώ θα ασχοληθούμε με πραγματικές Σ.Δ.Ε. Αυτές χρησιμοποιούνται, για να περιγράψουν πολλά προβλήματα της φυσικής, της γεωμετρίας, της χημείας, της βιολογίας, της ιατρικής, της τεχνολογίας και κοινωνικών επιστημών. Η περιγραφή κάθε διαδικασίας π.χ. στη φύση, γίνεται μέσω μεταβλητών, που συνδέονται με τον ρυθμό μεταβολής τους, μέσω των φυσικών νόμων, που διέπουν την διαδικασία και η σχέση αυτή εκφράζεται με συναρτήσεις και τις παραγώγους αυτών. Πολλές εφαρμογές των Σ.Δ.Ε. σε όλους τους τομείς της επιστήμης μπορείτε να βρείτε στο βιβλίο "Εφαρμογές των Συνήθων Διαφορικών εξισώσεων, Τόμος Ι" του Π.Σιαφαρίκα.

Ορισμός 1.1: Πραγματική **Συνήθης Διαφορική εξίσωση (Σ.Δ.Ε.)** λέγεται μια εξίσωση της μορφής:

$$F\left(x, y(x), y'(x), ..., y^{(n)}(x)\right) = 0, \tag{1.1}$$

όπου $n \geq 1$ φυσικός αριθμός (οσοδήποτε μεγάλος αλλά όχι άπειρο), η $F : I \times \Omega \to \mathbb{R}$, $I \subset \mathbb{R}$, $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$, $y : I \to \mathbb{R}$ μια άγνωστη συνάρτηση και

$$y^{(k)}(x) = \frac{d^k y(x)}{dx^k}, \qquad k = 1, ..., n.$$

Ορισμός 1.2: **Τάξη** της Σ.Δ.Ε. λέγεται η μεγαλύτερη τάξη παραγώγιση της άγνωστης συνάρτησης, που εμπεριέχεται στην Σ.Δ.Ε.

Παράδειγμα 2: Η Σ.Δ.Ε. (1.1) είναι n-οστής τάξης, η Σ.Δ.Ε. $y''(x) = 2xy^2(x)$ είναι δεύτερης τάξης και η Σ.Δ.Ε. $dy = e^{x+y}dx$ είναι πρώτης τάξης.

Ορισμός 1.3: Αν η Σ.Δ.Ε. (1.1) είναι πολυώνυμο ως προς την $y(x)$ και τις παραγώγους της, τότε η (1.1) λέγεται **πολυωνυμική Σ.Δ.Ε.** και η δύναμη στην οποία είναι υψωμένη η $y^{(n)}(x)$ λέγεται **βαθμός** αυτής.

Παράδειγμα 3: Η Σ.Δ.Ε. $y''(x) + (y'(x))^3 = x^2y(x)$ είναι δεύτερης τάξης και πρώτου βαθμού, ενώ η Σ.Δ.Ε. $y'(x) + xy''(x) - 2(y^{(4)}(x))^3 = 2x$ είναι τέταρτης τάξης και τρίτου βαθμού.

Ορισμός 1.4: Αν η Σ.Δ.Ε. (1.1) είναι γραμμική συνάρτηση ως προς την $y(x)$ και τις παραγώγους της, τότε η (1.1) λέγεται **γραμμική Σ.Δ.Ε.**. Η μορφή της γραμμικής Σ.Δ.Ε. n-οστής τάξης είναι:

$$a_n(x)y^{(n)}(x) + a_{n-1}(x)y^{(n-1)}(x) + ... + a_1(x)y'(x) + a_0(x)y(x) = \sigma(x) \quad (1.2)$$

όπου οι $a_i(x)$, $i = 0, 1, ..., n$ είναι συνεχείς συναρτήσεις στο $I \subset \mathbb{R}$, $a_n(x) \neq 0$ και λέγονται **συντελεστές** της γραμμικής Σ.Δ.Ε. (1.2). Αν όλοι οι συντελεστές είναι σταθεροί αριθμοί, τότε η (1.2) λέγεται **γραμμική Σ.Δ.Ε. με σταθερούς συντελεστές**, ενώ αν και ένας τουλάχιστον είναι συνάρτηση του x τότε η (1.2) λέγεται **γραμμική Σ.Δ.Ε. με μη σταθερούς συντελεστές**. Αν $\sigma(x) = 0$, τότε η (1.2) λέγεται **ομογενής γραμμική Σ.Δ.Ε.**, ένω αν $\sigma(x) \neq 0$, τότε η (1.2) λέγεται **μη ομογενής γραμμική Σ.Δ.Ε.**.

Παράδειγμα 4: Η Σ.Δ.Ε. $y'(x) + xy''(x) - 2y^{(4)}(x) = 0$ είναι γραμμική, 4-ης τάξης, με μη σταθερούς συντελεστές, ομογενής, ενώ η Σ.Δ.Ε. $y''(x) - y'(x) + 2y(x) = 0$ είναι γραμμική, 2-ης τάξης, με σταθερούς συντελεστές, ομογενής.

Ορισμός 1.5: Η Σ.Δ.Ε. (1.1) με την απαίτηση η $y(x)$ να ικανοποιεί τις συνθήκες: $y(x_0) = y_0, ..., y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}, x_0 \in I, y_i, i = 0, 1, ..., n-1$, πραγματικοί δοσμένοι αριθμοί (αρχικές συνθήκες), λέμε ότι αποτελεί **Πρόβλημα Αρχικών Τιμών (Π.Α.Τ.)**. Ενώ η Σ.Δ.Ε. (1.1) με την απαίτηση η $y(x)$ να ικανοποιεί κάποιες συνθήκες στα άκρα ενός διαστήματος $(a, b) \subset I$ (συνοριακές συνθήκες), λέμε ότι αποτελεί **Πρόβλημα Συνοριακών Τιμών (Π.Σ.Τ.)**.

Παράδειγμα 5: Η Σ.Δ.Ε. $y'+1 = xy^2$ με την αρχική συνθήκη $y(1) = 2, x \geq 1$, είναι Π.Α.Τ., ενώ η Σ.Δ.Ε $y''(x) + y(x) = 1, x \in [1, 2]$, με τις συνοριακές συνθήκες $y(1) = 1, y'(2) = 0$ είναι Π.Σ.Τ.

Ορισμός 1.6: **Λύση** της Σ.Δ.Ε. (1.1) λέγεται μια συνάρτηση $y = \phi(x)$, της οποίας υπάρχουν οι παράγωγοι μέχρι και n τάξης, το στοιχείο $\big(x, \phi(x), \phi'(x), ..., \phi^{(n)}(x)\big) \in I \times \Omega, \Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$ και ικανοποιεί την (1.1).
Γενική Λύση της (1.1) λέγεται μια συνάρτηση η οποία είναι λύση της (1.1) και είναι της μορφής $y = \phi(x, c_1, c_2, ..., c_n)$ όπου $c_i, i = 1, ..., n$ είναι αυθαίρετες σταθερές (τόσες όσες και η τάξη της Σ.Δ.Ε.) και για οποιεσδήποτε αρχικές συνθήκες $y(x_0) = y_0, ..., y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}, x_0 \in I$, να μπορούμε να επιλέγουμε τις σταθερές $c_i, i = 1, ..., n$, με μοναδικό τρόπο, ώστε να ισχύουν οι αρχικές συνθήκες.
Αν η συνάρτηση $f(x, \phi(x), c_1, ..., c_n) = 0$, όπου $c_i, i = 1, ..., n$ είναι αυθαίρετες σταθερές, είναι λύση της (1.1), αυτή λέγεται **γενικό ολοκλήρωμα** της (1.1).
Ειδική λύση της (1.1) λέγεται μια λύση αυτής που προκύπτει από την γενική λύση για κάποια συγκεκριμένη τιμή των σταθερών, ενώ η λύση της (1.1) που δεν περιέχει αυθαίρετες σταθερές και δεν προκύπτει από την γενική λύση της (1.1) για καμιά τιμή των σταθερών, λέγεται **ιδιάζουσα λύση** αυτής.

Παράδειγμα 6: Δίνεται η Σ.Δ.Ε. $y''(x) - y(x) = 0$. Η συνάρτηση $y_1(x) = e^x$, είναι λύση αυτής, διότι είναι δύο φορές παραγωγίσιμη και πολύ εύκολα βλέπουμε ότι την ικανοποιεί. Η συνάρτηση $y(x) = c_1e^x + c_2e^{-x}, c_1, c_2$ σταθερές, είναι η γενική λύση της δοθείσας Σ.Δ.Ε., διότι εύκολα διαπιστώνουμε ότι ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις της λύσης και επιπλέον, αν ισχύουν οι αρχικές συνθήκες $y(0) = 0$ και $y'(0) = 2$, τότε οι σταθερές υπολογίζονται με μοναδικό τρόπο. Πράγματι, από τις συνθήκες δημιουργείται το σύστημα $c_1 + c_2 = 0$, $c_1 - c_2 = 2$ και η μοναδική λύση του συστήματος είναι $c_1 = 1$ και $c_2 = -1$. Η συνάρτηση $y_1(x) = e^x$ είναι ειδική λύση της Σ.Δ.Ε., διότι προκύπτει από την γενική λύση αυτής, για $c_1 = 1$ και $c_2 = 0$.

Σημείωση 1.1: Κάθε συνάρτηση $f(x, y(x), c_1, ..., c_n) = 0$, για μια συγκεκριμένη τιμή των σταθερών $c_i, i = 1, ..., n$, παριστάνει μια καμπύλη στο xy επίπεδο. Από την n παραμετρική οικογένεια καμπυλών $f(x, y(x), c_1, ..., c_n) = 0$, μετά από n διαδοχικές παραγωγίσεις και απαλοιφή των n παραμέτρων από τις προκύπτουσες εξισώσεις και την δοθείσα, μπορούμε να βρούμε μια διαφορική εξίσωση n-οστής τάξης, που έχει για γενικό ολοκλήρωμα την δοθείσα οικογένεια καμπυλών.

Άσκηση 1. Να χαρακτηρίσετε κάθε μία από τις παρακάτω Σ.Δ.Ε.:

$$\textbf{α)}\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{dy}{dx}-2y=x^3 \qquad \textbf{β)}\frac{dy}{dx}+y^4=sinx \qquad \textbf{γ)}x^2\frac{d^2y}{dx^2}-x\frac{dy}{dx}-2y=0$$

$$\textbf{δ)}x\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^4+2y=2x \qquad \textbf{ε)}2x-y-\frac{dy}{dx}=0$$

Λύση

α) Είναι Σ.Δ.Ε., 2ης τάξης, γραμμική, με σταθερούς συντελεστές, μη ομογενής.

β) Είναι Σ.Δ.Ε., 1ης τάξης, μη γραμμική, πολυωνυμική, 1ου βαθμού.

γ) Είναι Σ.Δ.Ε., 2ης τάξης, γραμμική, με μη σταθερούς συντελεστές, ομογενής.

δ) Είναι Σ.Δ.Ε., 2ης τάξης, μη γραμμική, πολυωνυμική, 4ου βαθμού.

ε) Παρατηρούμε ότι η δοθείσα Σ.Δ.Ε. γράφεται:

$$2x-y-\frac{dy}{dx}=0 \Rightarrow \frac{dy}{dx}+y=2x$$

Άρα, είναι Σ.Δ.Ε., 1ης τάξης, γραμμική, με σταθερούς συντελεστές, μη ομογενής.

Άσκηση 2. Να βρεθεί η τάξη και ο βαθμός των κάτωθι Σ.Δ.Ε.:

$$\textbf{α)}\frac{d^2y}{dx^2}=\left(1+\frac{dy}{dx}\right)^2, \ \textbf{β)}\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2=\left(\sqrt{1+\frac{dy}{dx}}\right)^2, \ \textbf{γ)}\left(1+\frac{d^3y}{dx^3}\right)^2=\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^3$$

$$\textbf{δ)}\left\{\frac{y''}{[1+(y')^2]^{\frac{1}{2}}}\right\}^6=\left(\sqrt[3]{y'''}\right)^6.$$

Λύση

α) Η Σ.Δ.Ε. είναι δεύτερης τάξης και πρώτου βαθμού.

β) Η Σ.Δ.Ε. είναι δεύτερης τάξης και δεύτερου βαθμού.

γ) Η Σ.Δ.Ε. είναι τρίτης τάξης και δεύτερου βαθμού.

δ) Η Σ.Δ.Ε. είναι τρίτης τάξης και δεύτερου βαθμού.

Άσκηση 3. Να χαρακτηρίσετε κάθε μία από τις κάτωθι Σ.Δ.Ε :

1) $y' = x^2 - y,$ **2)** $y'' - (y')^2 + xy = 0,$ **3)** $(y')^2 + xy' - y^2 = 0,$
4) $x^3y'' - xy' + 5y = 2x,$ **5)** $y^{(6)} - y'' = 0,$ **6)** $sin(y'') + e^{y'} = 1,$
7) $\dfrac{d^2x}{dt^2} + k^2x = 0,$ **8)** $(x^2 + y^2)dx + 2xydy = 0,$ **9)** $yy'' = x,$
10) $x(y'')^3 + (y')^4 - y = 0,$ **11)** $\dfrac{dy}{dx} = 1 - xy + y^2,$ **12)** $y'' + 2y' - 8y = x^2 + cosx$

Λύση

1) $y' + y = x^2$: γραμμική, 1ης τάξης, με σταθερούς συντελεστές, μη ομογενής
2) 2ης τάξης, μη γραμμική, 1ου βαθμού
3) 1ης τάξης, μη γραμμική, 2ου βαθμού
4) 2ης τάξης, γραμμική, με μη σταθερούς συντελεστές, μη ομογενής
5) 6ης τάξης, γραμμική, με σταθερούς συντελεστές, ομογενής
6) 2ης τάξης, μη γραμμική
7) 2ης τάξης, γραμμική, με σταθερούς συντελεστές, ομογενής
8) $x^2 + y^2 + 2xyy' = 0$: 1ης τάξης, μη γραμμική, 1ου βαθμού
9) 2ης τάξης, μη γραμμική, 1ου βαθμού
10) 2ης τάξης, μη γραμμική, 3ου βαθμού
11) 1ης τάξης, μη γραμμική, 1ου βαθμού
12) 2ης τάξης, γραμμική, με σταθερούς συντελεστές, μη ομογενής

Άσκηση 4. Να δείξετε ότι κάθε μία από τις δοθείσες συναρτήσεις, ή δοθείσες σχέσεις, ικανοποιεί την αντίστοιχη Σ.Δ.Ε. (A,B, είναι αυθαίρετες σταθερές):

α) $y(x) = e^{-\frac{x^2}{2}},\ \dfrac{dy}{dx} + xy = 0,$ **β)** $y(x) = Acosx + Bsinx + e^x,\ \dfrac{d^2y}{dx^2} + y = 2e^x,$

$$\textbf{γ)}\ x + \frac{x^2}{y} = A,\ \frac{dy}{dx} = \frac{y^2 + 2xy}{x^2},$$

Λύση

α) Θα παραγωγίσουμε την δοθείσα συνάρτηση ως προς x

$$y'(x) = -xe^{-\frac{x^2}{2}}$$

και θα αντικαταστήσουμε αυτήν και την παράγωγό της στο πρώτο μέλος της δοθείσας Σ.Δ.Ε.Έτσι έχουμε:

$$\frac{dy}{dx} + xy = -xe^{-\frac{x^2}{2}} + xe^{-\frac{x^2}{2}} = 0,$$

δηλαδή πράγματι η συνάρτηση $y(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$ είναι λύση της δοθείσας Σ.Δ.Ε.

β) Θα παραγωγίσουμε την δοθείσα συνάρτηση δύο φορές

$y'(x) = -Asinx + Bcosx + e^x$

$y''(x) = -Acosx - Bsinx + e^x$

και θα αντικαταστήσουμε αυτήν και την δεύτερη παράγωγό της στο πρώτο μέλος της δοθείσας Σ.Δ.Ε. Έχουμε λοιπόν:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + y = -Acosx - Bsinx + e^x + Acosx + Bsinx + e^x = 2e^x,$$

που είναι το δεύτερο μέλος της δοθείσας Σ.Δ.Ε., άρα πράγματι η συνάρτηση $y(x) = Acosx + Bsinx + e^x$ είναι λύση της

$$\frac{d^2y}{dx^2} + y = 2e^x.$$

γ) Η δοθείσα εξίσωση γράφεται:

$$x + \frac{x^2}{y} = A \overset{y\neq 0}{\Longrightarrow} (A-x)y = x^2 \overset{A-x\neq 0}{\Longrightarrow} y = \frac{x^2}{A-x} \qquad \textbf{(1)}$$

Παραγωγίζουμε την προκύπτουσα συνάρτηση ως προς x,

$$y' = \frac{2x(A-x) - x^2(-1)}{(A-x)^2} \Rightarrow y' = \frac{2Ax - x^2}{(A-x)^2} \qquad \textbf{(2)}$$

Το δεύτερο μέλος της δοθείσας Σ.Δ.Ε., λόγω της (1), παίρνει την μορφή

$$\frac{y^2 + 2xy}{x^2} = \frac{\left(\dfrac{x^2}{A-x}\right)^2 + 2x\dfrac{x^2}{A-x}}{x^2} = \frac{x^2}{(A-x)^2} + \frac{2x}{A-x} = \frac{x^2 + 2x(A-x)}{(A-x)^2}$$

$= \dfrac{2Ax - x^2}{(A-x)^2} = y'$, λόγω της (2).

Άσκηση 5. Δίνεται το Π.Α.Τ. $\dfrac{d^3y}{dx^3} - 4\dfrac{dy}{dx} = 0, y(0) = 1, y'(0) = -1, y''(0) = 0.$
(i) Να δειχθεί ότι η συνάρτηση $y(x) = A + Be^{2x} + Ce^{-2x}$ είναι γενική λύση της δ.ε.
(ii) Να προσδιοριστούν οι σταθερές A, B, C ώστε να ικανοποιούνται οι αρχικές συνθήκες.

Λύση

(i) Παραγωγίζουμε τη συνάρτηση $y(x)$ οπότε:
$y' = 2Be^{2x} - 2Ce^{-2x}, y'' = 4Be^{2x} + 4Ce^{-2x}, y''' = 8Be^{2x} - 8Ce^{-2x}.$
Άρα παίρνοντας το πρώτο μέλος της δ.ε. και κάνοντας αντικατάσταση τις παραγώγους έχουμε:
$y''' - 4y' = 8Be^{2x} - 8Ce^{-2x} - 8Be^{2x} + 8Ce^{-2x} = 0.$

(ii) $\begin{cases} y(0) = 1 \\ y'(0) = -1 \\ y''(0) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A + B + C = 1 \\ 2B - 2C = -1 \\ 4B + 4C = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A + B + C = 1 \\ 2B - 2C = -1 \\ 2B + 2C = 0 \end{cases} \Rightarrow$
$4B = -1 \Rightarrow B = -\dfrac{1}{4}, C = -B = \dfrac{1}{4}, A = 1 - \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{4} = 1$
Συνεπώς, $y(x) = 1 - \dfrac{1}{4}e^{2x} + \dfrac{1}{4}e^{-2x}$

Άσκηση 6. Δίνεται το Π.Σ.Τ: $\dfrac{d^2y}{dx^2} + 9y = 0, y(0) = 0, y\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 1.$
(i) Να δειχθεί ότι η συνάρτηση $y(x) = Acos3x + Bsin3x$ είναι γενική λύση της δ.ε.
(ii) Να προσδιοριστεί η λύση του δοθέντος Π.Σ.Τ.

Λύση

(i) Παραγωγίζουμε τη συνάρτηση $y(x)$ οπότε:
$y' = -3Asin3x + 3Bcos3x, y'' = -9Acos3x - 9Bsin3x$
Άρα παίρνοντας το πρώτο μέλος της δ.ε. και κάνοντας αντικατάσταση τις παραγώγους έχουμε:
$y'' + 9y = -9Acos3x - 9Bsin3x + 9Acos3x + 9Bsin3x = 0.$

$$(ii)\begin{cases} y(0)=0 \\ y\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} Acos0+Bsin0=0 \\ Acos\dfrac{\pi}{2}+Bsin\dfrac{\pi}{2}=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=0 \\ B=1 \end{cases}$$

Συνεπώς, $y(x)=sin3x$.

Άσκηση 7. Να δείξετε ότι:

(i) η συνάρτηση $y(x)=c_1e^{-x}cos2x+c_2e^{-x}sin2x$, c_1,c_2 αυθαίρετες σταθερές είναι λύση της δ.ε $y''+2y'+5y=0$.

(ii) το Π.Α.Τ. $y''(x)+2y'(x)+5y(x)=0, y(0)=0, y'(0)=1$ έχει μοναδική μη μηδενική λύση.

(iii) το Π.Σ.Τ. $y''(x)+2y'(x)+5y(x)=0, y(0)=0, y\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=0$ έχει άπειρες λύσεις.

(iv) το Π.Σ.Τ. $y''(x)+2y'(x)+5y(x)=0, y(0)=0, y\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=0$ έχει μόνο τη μηδενική λύση.

(v) το Π.Σ.Τ. $y''(x)+2y'(x)+5y(x)=0, y(0)=1, y\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=0$ έχει μοναδική μη μηδενική λύση.

Λύση

(i) Παραγωγίζουμε τη συνάρτηση $y(x)$ οπότε:

$y'=-c_1e^{-x}cos2x-2c_1e^{-x}sin2x-c_2e^{-x}sin2x+2c_2e^{-x}cos2x$

$y''=-3c_1e^{-x}cos2x+4c_1e^{-x}sin2x-3c_2e^{-x}sin2x-4c_2e^{-x}cos2x$

Άρα παίρνοντας το πρώτο μέλος της δ.ε. και κάνοντας αντικατάσταση τις παραγώγους έχουμε:

$y''+2y'+5y=-3c_1e^{-x}cos2x+4c_1e^{-x}sin2x-3c_2e^{-x}sin2x-4c_2e^{-x}cos2x-2c_1e^{-x}cos2x-4c_1e^{-x}sin2x-2c_2e^{-x}sin2x+4c_2e^{-x}cos2x+5c_1e^{-x}cos2x+5c_2e^{-x}sin2x=0$.

$$(ii)\begin{cases} y(0)=0 \\ y'(0)=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1=0 \\ -c_20+2c_2=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1=0 \\ c_2=\dfrac{1}{2} \end{cases}$$

Συνεπώς, $y(x)=\dfrac{1}{2}e^{-x}sin2x$.

$$(iii)\begin{cases} y(0)=0 \\ y\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1=0 \\ c_2e^{-\frac{\pi}{2}}sin\pi=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1=0 \\ c_2 \text{ αυθαίρετο} \end{cases}$$

Συνεπώς, $y(x) = c_2 e^{-x} sin2x$.

$$(iv) \begin{cases} y(0) = 0 \\ y\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1 = 0 \\ c_2 e^{-\frac{\pi}{4}} sin\frac{\pi}{2} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1 = 0 \\ c_2 = 0 \end{cases}$$

Συνεπώς, $y(x) = 0$.

$$(v) \begin{cases} y(0) = 1 \\ y\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1 = 1 \\ c_2 e^{-\frac{\pi}{4}} sin\frac{\pi}{2} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1 = 1 \\ c_2 = 0 \end{cases}$$

Συνεπώς, $y(x) = e^{-x} cos2x$.

Άσκηση 8. **α)** Να βρεθεί η Σ.Δ.Ε. η οποία έχει γενικό ολοκλήρωμα $lny = Ax^2 + B$, A, B σταθερές.

β) Να βρεθεί η Σ.Δ.Ε. της οικογενείας των καμπυλών: $y = Ae^3x + Be^5x$.

Λύση

α) Παραγωγίζουμε την δοθείσα εξίσωση ως προς x . Έτσι:

$$\frac{y'}{y} = 2Ax \Rightarrow y' = 2Axy \qquad \textbf{(1)}$$

Έχει ήδη απαλειφθεί η σταθερά B. Παραγωγίζουμε την (1) ξανά ως προς x και απαλείφουμε την σταθερά A χρησιμοποιώντας την (1). Έτσι:

$$y'' = 2A(y + xy') \stackrel{(1)}{\Longrightarrow} y'' = \frac{y'}{xy}(y + xy') \Rightarrow xyy'' = yy' + x(y')^2 \qquad \textbf{(2)}$$

Η (2) είναι η Σ.Δ.Ε. δεύτερης τάξης που έχει για γενικό ολοκλήρωμα την δοθείσα εξίσωση.

β) Παραγωγίζουμε την δοθείσα συνάρτηση ως προς x. Έτσι:

$$y' = 3Ae^{3x} + 5Be^{5x} \qquad \textbf{(1)}$$

Παραγωγίζουμε την (1) ως προς x, οπότε:

$$y'' = 9Ae^{3x} + 25Be^{5x} \quad \textbf{(2)}$$

Από την δοθείσα συνάρτηση και τις (1) και (2) θα απαλείψουμε τις σταθερές A, B, έτσι:

$y = Ae^{3x} + Be^{5x} \Rightarrow Ae^{3x} = y - Be^{5x}$

(1)$\Rightarrow y' = 3(y - Be^{5x}) + 5Be^{5x} \Rightarrow y' = 3y + 2Be^{5x} \Rightarrow Be^{5x} = y' - 3y$

(2)$\Rightarrow y'' = 9\left(y - (y' - 3y)\right) + 25(y' - 3y) \Rightarrow y'' = 16y' - 39y \Rightarrow$

$y'' - 16y' + 39y = 0$

Η Σ.Δ.Ε. $y'' - 16y' + 39y = 0$ είναι η ζητούμενη Σ.Δ.Ε.

Άσκηση 9. Να βρεθεί η δ.ε. της 3-παραμετρικής οικογένειας:
$y = Ax^2 + Bx + C$.

Λύση
Η οικογένεια των καμπυλών περιέχει τρεις αυθαίρετες σταθερές A, B, C οπότε παραγωγίζουμε τρεις φορές και απαλείφουμε τις σταθερές. Οπότε:
$y' = 2Ax + B, y'' = 2A, y''' = 0$
Άρα, η ζητούμενη δ.ε. είναι η $y''' = 0$.

Άσκηση 10. Να βρεθεί η δ.ε. όλων των κύκλων που βρίσκονται σ' ένα επίπεδο
$x^2 + y^2 + 2Ax + 2By + C = 0$.

Λύση
Η οικογένεια των κύκλων περιέχει τρεις αυθαίρετες σταθερές A, B, C οπότε παραγωγίζουμε τρεις φορές και απαλείφουμε τις σταθερές. Οπότε:
$2x + 2yy' + 2A + 2By' = 0 \Rightarrow x + yy' + A + By' = 0$
$1 + (y')^2 + yy'' + By'' = 0 \quad (1)$
$3y'y'' + yy''' + By''' = 0 \quad (2)$
Για να απαλείψουμε τη σταθερά B πολλαπλασιάζουμε την (1) με y''' και την (2) με y'' και τις αφαιρούμε κατά μέλη οπότε προκύπτει η ζητούμενη δ.ε.
$y''' + (y')^2y''' - 3y'(y'')^2 = 0$.

Άσκηση 11 Να βρεθεί η δ.ε. της μονοπαραμετρικής οικογένειας
$y = cx^2 + c^2$ (1).

Λύση

Η οικογένεια των καμπυλών περιέχει μια αυθαίρετη σταθερά οπότε παραγωγίζουμε μία φορά και απαλείφουμε την σταθερά. Οπότε:

$y' = 2cx \Rightarrow c = \dfrac{y'}{2x} \quad (2)$

Κάνοντας αντικατάσταση στην (1) την (2) έχουμε:

$$y = \left(\frac{y'}{2x}\right)x^2 + \frac{(y')^2}{(2x)^2} \Rightarrow y = \frac{y'x}{2} + \frac{(y')^2}{4x^2} \Rightarrow 4x^2y = 2x^2y' + (y')^2.$$

Ελληνική βιβλιογραφία

[1] Γ. Δάσιος, Συνήθεις Διαφορικές Εξισώσεις, Πάτρα, 1985

[2] Θ. Κυβεντίδης, Διαφορικές εξισώσεις, Εκδόσεις Ζήτη, Θεσ/κη, 1993

[3] Β. Μπαρμπάνης, Μαθήματα Διαφορικών Εξισώσεων, Πάτρα, 1976

[4] Π. Σιαφαρίκας, Εφαρμογές των Σ.Δ.Ε., Τόμος Ι, Πάτρα, 2002

[5] Ν. Σταυρακάκης, ΣΔΕ : γραμμική και μη γραμμική θεωρία από τη φύση και τη ζωή, Παπασωτηρίου, Αθήνα, 1997

Ξενόγλωσση βιβλιογραφία

[1] W. E. Boyce, R. C. Di Prima, Elementary differential equations and boundary value problems, N. Y. John Wiley & Sons, 1977

[2] M. Braun, Differential equations and their Applications, Springer-Verlag, 1993

[3] Abell and Braselton, Modern Differential equations, Theory, Application, Technology, Saunders College Publishing, 1996

[4] B. Rai and D. P. Choudhury, Ordinary Differential Equations, An introduction, Alpha Science, International Ltd, 2005

[5] Rice and Strange, Ordinary Differential Equations with Application, Brooks/Cole Publishing Company, 1996