Τίτλος Μαθήματος: Συνήθεις Διαφορικές Εξισώσεις Ι

Ενότητα: Σ.Δ.Ε. γραμμικές 1ης τάξης, Σ.Δ.Ε. Bernoulli και Riccatti

Όνομα Καθηγητή: Χρυσή Κοκολογιαννάκη

Τμήμα: Μαθηματικών

Άδειες Χρήσης

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Πατρών**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

2.5 Γραμμικές Σ.Δ.Ε. πρώτης τάξης

Ορισμός 2.5 Γραμμική διαφορική εξίσωση πρώτης τάξης λέγεται η δ.ε. που είναι γραμμική συνάρτηση ως προς y, y'. Η γραμμική Σ.Δ.Ε. πρώτης τάξης έχει την μορφή:

$$a_1(x)y'(x) + a_0(x)y(x) = g(x) \tag{2.25}$$

με $a_1(x), a_0(x), g(x)$ πραγματικές συναρτήσεις και $a_1(x) \neq 0$.

Η αντίστοιχη ομογενής της (2.25) είναι

$$a_1(x)y'(x) + a_0(x)y(x) = 0 \tag{2.26}$$

(i) Αν $a_0(x) = a_1'(x)$, τότε η (2.25) επιλύεται αμέσως, διότι μπορεί να γραφεί:

$a_1(x)y'(x) + a_1'(x)y(x) = g(x) \Rightarrow (a_1(x)y(x))' = g(x)$
Η γενική λύση αυτής προκύπτει ολοκληρώνοντας ως προς x:
Δηλαδή
$a_1(x)y(x) = \displaystyle\int g(x)dx + c \Rightarrow y(x) = \frac{1}{a_1(x)}\left[\int g(x)dx + c\right].$

(ii) Αν αυτό δεν συμβαίνει, τότε η (2.25) μπορεί πάντα να γραφεί στην μορφή:

$$y'(x) + a(x)y(x) = b(x) \tag{2.27}$$

όπου $a(x) = \dfrac{a_0(x)}{a_1(x)}$ και $b(x) = \dfrac{g(x)}{a_1(x)}$.

Θεώρημα 2.3 Η γραμμική Σ.Δ.Ε. (2.27) δέχεται πολ/στή

$$\mu(x) = e^{\int a(x)dx} \tag{2.28}$$

και έχει για γενική λύση την συνάρτηση:

$$y(x) = e^{-\int a(x)dx}\left[c + \int b(x)e^{\int a(x)dx}dx\right] \tag{2.29}$$

Απόδειξη Η (2.27) γράφεται:

$$y'(x) + a(x)y(x) = b(x) \Rightarrow dy + (a(x)y - b(x))\,dx = 0 \tag{2.30}$$

Θέτουμε $P(x,y) = a(x)y - b(x)$ και $Q(x,y) = 1$, και παρατηρούμε ότι $\dfrac{\partial P(x,y)}{\partial y} = a(x)$ και $\dfrac{\partial Q(x,y)}{\partial x} = 0$, δηλαδή δεν είναι ακριβής. Όμως

$$\frac{\dfrac{\partial P(x,y)}{\partial y} - \dfrac{\partial Q(x,y)}{\partial x}}{Q(x,y)} = \frac{a(x)}{1} = a(x)$$

δηλαδή συνάρτηση του x, οπότε η (2.30) θα δέχεται πολ/στή $\mu(x) = e^{\int a(x)dx}$. Πολ/ντας και τα δύο μέλη της (2.27) με τον πολ/τή αυτό, έχουμε:

$$e^{\int a(x)dx}y'(x)+e^{\int a(x)dx}a(x)y(x) = e^{\int a(x)dx}b(x) \Rightarrow \left(e^{\int a(x)dx}y(x)\right)' = b(x)e^{\int a(x)dx},$$

οπότε ολοκληρώνοντας ως προς x προκύπτει

$$\Rightarrow e^{\int a(x)dx}y(x) = \int b(x)e^{\int a(x)dx}dx + c \Rightarrow$$

$$y(x) = e^{-\int a(x)dx}\left[\int b(x)e^{\int a(x)dx}dx + c\right],$$

που είναι η (2.29).

Σημείωση 2.5 Από την (2.28), έπεται ότι $\dfrac{1}{\mu(x)} = e^{-\int a(x)dx} \neq 0$, άρα η γραμμική Σ.Δ.Ε. πρώτης τάξης δεν έχει ιδιάζουσες λύσεις.

Σημείωση 2.6 Η γενική λύση της (2.27) γράφεται ως το άθροισμα της λύσης της αντίστοιχης ομογενούς και μιας μερικής λύσης της μη ομογενούς. Πράγματι, η (2.29) γράφεται:

$$y(x) = ce^{-\int a(x)dx} + e^{-\int a(x)dx}\int b(x)e^{\int a(x)dx}dx \Rightarrow y(x) = y_o(x) + y_\mu(x),$$

όπου $y_o(x) = ce^{-\int a(x)dx}$. Αυτή είναι η λύση της αντίστοιχης ομογενούς, της (2.27), όπως προκύπτει από την γενική λύση (2.29) αν θέσουμε $b(x) = 0$. Η $y_\mu(x) = e^{-\int a(x)dx}\displaystyle\int b(x)e^{\int a(x)dx}dx$ είναι μερική λύση της (2.27), διότι αν την αντικαταστήσουμε στο πρώτο μέλος στην (2.27), έχουμε:

$$y_\mu'(x) + a(x)y_\mu(x) =$$

$$\left(e^{-\int a(x)dx}\int b(x)e^{\int a(x)dx}dx\right)' + a(x)e^{-\int a(x)dx}\int b(x)e^{\int a(x)dx}dx =$$
$$-a(x)e^{-\int a(x)dx}\int b(x)e^{\int a(x)dx}dx + b(x)e^{\int a(x)dx}e^{-\int a(x)dx}+$$
$$a(x)e^{-\int a(x)dx}\int b(x)e^{\int a(x)dx}dx = b(x)$$

που είναι το δεύτερο μέλος της (2.27).

Σημείωση 2.7 Μια Σ.Δ.Ε. μπορεί να μην είναι γραμμική ως προς $y(x)$, αλλά ως προς $x(y)$, οπότε θα έχει την μορφή:

$$x'(y) + a(y)x(y) = b(y)$$

θα δέχεται τον πολ/στή

$\mu(y) = e^{\int a(y)dy}$ και έχει για γενική λύση την συνάρτηση:

$$x(y) = e^{-\int a(y)dy}\left[c + \int b(y)e^{\int a(y)dy}dy\right].$$

Σημείωση 2.8 Αν στη γραμμική Σ.Δ.Ε. (2.25) η συνάρτηση $a(x)$ ή η $b(x)$ ή και οι δύο αυτές είναι ασυνεχείς, και x_0 είναι το σημείο ασυνέχειας, τότε βρίσκουμε την γενική λύση της Σ.Δ.Ε. για $x < x_0$ και για $x > x_0$ και κατόπιν ζητούμε οι δύο λύσεις να είναι συνεχείς στο σημείο x_0. Αυτό το επιτυγχάνουμε για κατάλληλη επιλογή των σταθερών.

Παράδειγμα 30 Να λυθεί η Σ.Δ.Ε. $y' + \dfrac{y}{x} = 2x, \quad x \neq 0$

Λύση

Παρατηρούμε ότι η δοθείσα Σ.Δ.Ε. είναι γραμμική ως προς $y(x)$ με $a(x) = \dfrac{1}{x}$ και $b(x) = 2x$. Άρα δέχεται πολ/στή $\mu(x) = e^{\int \frac{1}{x}dx} = x$ και πολ/ντας και τα δύο μέλη της δοθείσας Σ.Δ.Ε. με x, παίρνουμε:

$$y' + \frac{y}{x} = 2x \Rightarrow xy' + y = 2x^2 \Rightarrow (xy)' = 2x^2$$

Ολοκληρώνουμε ως x και έχουμε:

$xy = \int 2x^2 dx + c \Rightarrow xy = \frac{2}{3}x^3 + c \Rightarrow y = \frac{2}{3}x^2 + \frac{c}{x}$,
που είναι η γενική λύση της δοθείσας δ.ε.

Παράδειγμα 31 Να λυθεί το Π.Α.Τ. $(1+x^2)dy + 2xydx = cotxdx$, $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$.

Λύση

Η δοθείσα Σ.Δ.Ε. γράφεται:

$$(1+x^2)dy + 2xydx = cotxdx \Rightarrow (1+x^2)y' + 2xy = cotx \quad (1)$$

η οποία είναι γραμμική με $a_1(x) = 1 + x^2, a_0 = 2x$ και $b(x) = cotx$.

Παρατηρούμε ότι $a_0(x) = a_1'(x)$, οπότε η (1) γίνεται:

$$\left((1+x^2)y\right)' = cotx \Rightarrow (1+x^2)y = \int cotxdx + c \Rightarrow (1+x^2)y = ln\,|sinx| + c \quad (2)$$

Εφαρμόζοντας την αρχική συνθήκη στην (2) προκύπτει $c = 0$, οπότε η λύση του Π.Α.Τ., προκύπτει από την (2) για $c = 0$,δηλαδή:

$y = \frac{ln\,|sinx|}{1+x^2}$.

Παράδειγμα 32 Να λυθεί η Σ.Δ.Ε. $\quad (x + 2y^3)\frac{dy}{dx} = y \qquad (1)$

Λύση

Παρατηρούμε ότι η Σ.Δ.Ε. (1) δεν είναι γραμμική ως προς $y(x)$. Όμως μπορεί να γραφεί ως εξής:

$(x+2y^3)\frac{dy}{dx} = y \Rightarrow (x+2y^3) = y\frac{1}{y'} \Rightarrow x + 2y^3 = y\frac{dx}{dy} \Rightarrow$
$y\frac{dx}{dy} - x = 2y^3 \Rightarrow \frac{dx}{dy} - \frac{1}{y}x = 2y^2 \qquad (2)$

Η Σ.Δ.Ε. (2) είναι γραμμική ως προς $x(y)$, άρα δέχεται πολ/στή

$$\mu(y) = e^{-\int \frac{1}{y} dy} = \frac{1}{y}$$

και πολ/ντας και τα δύο μέλη της, με αυτόν, έχουμε:

$$\frac{1}{y}\frac{dx}{dy} - \frac{1}{y^2}x = 2y \Rightarrow \left(\frac{1}{y}x(y)\right)' = 2y \Rightarrow \frac{1}{y}x(y) = y^2 + c \Rightarrow x(y) = y^3 + cy,$$

που είναι η λύση της δοθείσας Σ.Δ.Ε. .

Παράδειγμα 33 Να λυθεί το Π.Α.Τ. $y' + y = b(x) = \begin{cases} 2, & x \in [0,1] \\ 0, & x > 1 \end{cases}$, $y(0) = 0$.

Λύση

Επειδή η συνάρτηση $b(x)$ είναι ασυνεχής, θα λύσουμε την Σ.Δ.Ε. (α) όταν $x \in [0,1]$ και (β) όταν $x > 1$. Έτσι

(α) όταν $x \in [0,1]$ έχουμε: $y' + y = 2$

Η γραμμική Σ.Δ.Ε. δέχεται πολ/στή $\mu(x) = e^{\int dx} = e^x$, οπότε γίνεται

$$y' + y = 2 \Rightarrow e^x y' + e^x y = 2e^x \Rightarrow (e^x y)' = 2e^x$$

Ολοκληρώνοντας έχουμε

$$e^x y = 2\int e^x dx + c \Rightarrow e^x y = 2e^x + c \Rightarrow y = ce^{-x} + 2 \qquad (1)$$

(β) όταν $x > 1$ έχουμε: $y' + y = 0$, οπότε εργαζόμενοι όπως στην (α) περίπτωση η λύση προκύπτει:

$$y = c_1 e^{-x} \qquad (2)$$

Επειδή η λύση θέλουμε να είναι συνεχής στο σημείο $x_0 = 1$, από τις (1) και (2) θα βρούμε μια σχέση ανάμεσα στις δύο σταθερές c και c_1.
Πράγματι:

$lim_{x\to 1^-} y(x) = lim_{x\to 1^+} y(x) \Rightarrow lim_{x\to 1^-}(ce^{-x} + 2) = lim_{x\to 1^+}(c_1 e^{-x}) \Rightarrow ce^{-1} + 2 = c_1 e^{-1} \Rightarrow c_1 = c + 2e$

Οπότε η (2) γίνεται

$y = (c + 2e)e^{-x} \qquad (3)$

και η γενική λύση της δ.ε. είναι:

$$y(x) = \begin{cases} ce^{-x} + 2, & x \in [0,1] \\ (c + 2e)e^{-x}, & x > 1 \end{cases}$$

Όμως $y(0) = 0$, οπότε απ' την (1) έχουμε: $0 = c + 2 \Rightarrow c = -2$ και τελικά η λύση του δοθέντος Π.Α.Τ. είναι:

$$y(x) = \begin{cases} 2 - 2e^{-x}, & x \in [0,1] \\ (2e - 2)e^{x}, & x > 1 \end{cases}$$

Παράδειγμα 34 Να δείξετε ότι κάθε λύση της Σ.Δ.Ε. $y'(x) + ay(x) = be^{-\gamma x}$, όπου $a \neq \gamma$ και $a > 0, \gamma > 0, b \in \mathbb{R}$, τείνει στο μηδέν όταν το x τείνει στο $+\infty$.

Λύση

Η δοθείσα Σ.Δ.Ε. είναι γραμμική ως προς $y(x)$, δέχεται πολ/στή $\mu(x) = e^{\int a dx} = e^{ax}$ και η γενική της λύση θα είναι:

$$y'(x) + ay(x) = be^{-\gamma x} \Rightarrow (e^{ax}y)' = be^{(a-\gamma)x} \Rightarrow e^{ax}y = \frac{be^{(a-\gamma)x}}{a-\gamma} + c \Rightarrow$$
$$y(x) = ce^{-ax} + \frac{b}{a-\gamma}e^{-\gamma x}$$

Παίρνοντας στην τελευταία ισότητα το όριο του $x \to +\infty$, λόγω των προυποθέσεων που πληρούν τα a, b, γ, έχουμε $e^{-ax} \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0$ και $e^{-\gamma x} \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0$, οπότε προκύπτει το ζητούμενο αποτέλεσμα.

Παράδειγμα 35 Να λυθεί η Σ.Δ.Ε. $xy' + y = 3xcos2x$.

Λύση

Η δοθείσα Σ.Δ.Ε. μπορεί να γραφεί:

$(xy)' = 3xcos2x$, οπότε ολοκληρώνοντας:

$$xy = \int 3xcos2xdx + c \Rightarrow xy = \frac{3}{2}xsin2x - \int \frac{3}{2}sin2xdx + c \Rightarrow$$
$$xy = \frac{3}{2}xsin2x + \frac{3}{4}cos2x + c \Rightarrow y = \frac{3}{2}sin2x + \frac{3}{4}\frac{cos2x}{x} + \frac{c}{x}.$$

Παράδειγμα 36 Να λυθεί η Σ.Δ.Ε. $(1+x^2)y' + 4xy = (1+x^2)^{-2}$.

Λύση

Η δοθείσα Σ.Δ.Ε. μπορεί να γραφεί:

$$y' + \frac{4x}{1+x^2}y = \frac{1}{(1+x^2)^3}$$

Η Σ.Δ.Ε. είναι γραμμική ως προς $y(x)$, δέχεται πολ/στή
$\mu(x) = e^{\int \frac{4x}{1+x^2}dx} = e^{2ln(1+x^2)} = (1+x^2)^2$ και η γενική της λύση θα είναι:

$$(1+x^2)^2y' + 4x(1+x^2)y = \frac{1}{1+x^2} \Rightarrow \Big((1+x^2)^2y\Big)' = \frac{1}{1+x^2} \Rightarrow$$
$$(1+x^2)^2y = \int \frac{dx}{1+x^2} + c \Rightarrow y = \frac{c}{(1+x^2)^2} + \frac{arctanx}{(1+x^2)^2}.$$

Παράδειγμα 37 Να λυθεί το Π.Α.Τ. $xy' + y = |x-1|, x > 0, y(2) = 2$.

Λύση

Θα λύσουμε την Σ.Δ.Ε. (α) όταν $0 < x < 1$ και (β) όταν $x > 1$. Έτσι

(α) όταν $0 < x < 1$ έχουμε: $xy' + y = 1 - x \Rightarrow (xy)' = 1 - x \Rightarrow xy = x - \frac{x^2}{2} + c_1$

$$\Rightarrow y = 1 - \frac{x}{2} + \frac{c_1}{x} \quad (1)$$

(β) όταν $x > 1$ έχουμε: $xy' + y = x - 1 \Rightarrow (xy)' = x - 1 \Rightarrow xy = \frac{x^2}{2} - x + c_2$

$$\Rightarrow y = \frac{x}{2} - 1 + \frac{c_2}{x} \quad (2)$$

Επειδή θέλουμε η λύση να είναι συνεχής στο σημείο $x_0 = 1$, από τις (1) και (2) θα βρούμε μια σχέση ανάμεσα στις δύο σταθερές c_1 και c_2.
Πράγματι:

$$lim_{x\to 1^-} y(x) = lim_{x\to 1^+} y(x) \Rightarrow 1 - \frac{1}{2} + c_1 = \frac{1}{2} - 1 + c_2 \Rightarrow c_2 = c_1 + 1$$

Οπότε η (2) γίνεται

$$y = \frac{x}{2} - 1 + \frac{c_1 + 1}{x}$$

και η γενική λύση της δ.ε. είναι:

$$y(x) = \begin{cases} 1 - \dfrac{x}{2} + \dfrac{c_1}{x}, & x \in [0,1] \\ \dfrac{x}{2} - 1 + \dfrac{c_1 + 1}{x}, & x \geq 1 \end{cases}$$

Όμως $y(2) = 2$, οπότε απ' την δεύτερη έχουμε: $2 = \dfrac{2}{2} - 1 + \dfrac{c_1 + 1}{2} \Rightarrow 2 = \dfrac{c_1 + 1}{2} \Rightarrow c_1 = 3$ και τελικά η λύση του Π.Α.Τ. είναι:

$$y(x) = \begin{cases} 1 - \dfrac{x}{2} + \dfrac{3}{x}, & x \in [0,1] \\ \dfrac{x}{2} - 1 + \dfrac{4}{x}, & x \geq 1 \end{cases}$$

2.6 Μορφές Σ.Δ.Ε. που ανάγονται σε γραμμικές πρώτης τάξης

2.6.1 Σ.Δ.Ε. Bernoulli

Η μορφή αυτής της Σ.Δ.Ε. είναι

$$y'(x) + a(x)y(x) = b(x)y^n(x), \qquad n \neq 0, 1 \tag{2.31}$$

όπου $a(x)$ και $b(x)$ είναι συνεχείς συναρτήσεις. Αν $n = 0$ η (2.31) γίνεται γραμμική και αν $n = 1$ γίνεται χωριζομένων μεταβλητών.
Για να λύσουμε την (2.31), ακολουθούμε τα παρακάτω βήματα:
(α) πολ/με και τα δύο μέλη της (2.31) με $y^{-n}(x)$, οπότε:

$$y^{-n}(x)y'(x) + a(x)y^{-n+1}(x) = b(x) \tag{2.32}$$

(β) θέτουμε $y^{-n+1}(x) = z(x)$, παραγωγίζουμε ως προς x,
$(-n+1)y^{-n}(x)y'(x) = z'(x)$ και αντικαθιστούμε στην (2.32), οπότε:

$$\frac{1}{-n+1}z'(x) + a(x)z(x) = b(x) \Rightarrow z'(x) = (-n+1)a(x)z(x) = (-n+1)b(x)$$

(γ) λύνουμε την προκύπτουσα Σ.Δ.Ε., η οποία είναι γραμμική ως προς $z(x)$ και τελικά η $y(x)$ θα είναι:
$y^{-n+1}(x) = z(x) \Rightarrow y(x) = (z(x))^{\frac{1}{-n+1}}$.

Σημείωση 2.9 Μερικές φορές αντί να έχουμε Σ.Δ.Ε. Bernoulli ως προς $y(x)$, μπορεί να έχουμε Σ.Δ.Ε. Bernoulli ως προς $x(y)$, δηλαδή να έχει την μορφή:

$$x'(y) + a(y)x(y) = b(y)x^n(y),$$

Η λύση της οποίας γίνεται με ανάλογο τρόπο όπως της (2.31).

Παράδειγμα 38 Να λυθεί η Σ.Δ.Ε. $y' - xy = x^3y^3$.

Λύση
Η δοθείσα Σ.Δ.Ε. είναι Bernoulli ως προς $y(x)$, οπότε πολ/με και τα δύο μέλη με y^{-3}:

$$y' - xy = x^3y^3 \Rightarrow y^{-3}y' - xy^{-2} = x^3$$

Θέτουμε $y^{-2} = z(x) \Rightarrow (-2)y^{-3}y' = z'$ και αντικαθιστούμε στην προκύπτουσα Σ.Δ.Ε.. Έτσι:

$$y^{-3}y' - xy^{-2} = x^3 \Rightarrow -\frac{1}{2}z' - xz = x^3 \Rightarrow z' + 2xz = -2x^3$$

Η τελευταία Σ.Δ.Ε. είναι γραμμική ως προς $z(x)$. Ο πολ/τής Euler είναι

$\mu(x) = e^{2\int xdx} = e^{x^2}$, οπότε έχουμε:

$$z' + 2xz = -2x^3 \Rightarrow \left(e^{x^2}z\right)' = -2x^3e^{x^2} \Rightarrow e^{x^2}z = c - x^2e^{x^2} + \int 2xe^{x^2}dx \Rightarrow$$
$$\Rightarrow e^{x^2}z = c - x^2e^{x^2} + e^{x^2} \Rightarrow z = ce^{-x^2} + 1 - x^2$$

Άρα το γενικό ολοκλήρωμα της αρχικής Σ.Δ.Ε. θα είναι:

$y^{-2} = ce^{-x^2} + 1 - x^2 \Rightarrow y^2 = \dfrac{1}{ce^{-x^2} + 1 - x^2}.$

Παράδειγμα 39 Να λυθεί το Π.Α.Τ. $(x^2y^3 + xy)\, y' = 1,\ y\left(\dfrac{1}{2}\right) = 0.$

Λύση

Η δοθείσα Σ.Δ.Ε. δεν είναι γραμμική ή Bernoulli ως προς $y(x)$, όμως μπορεί να γραφεί:

$(x^2y^3 + xy)\, y' = 1 \Rightarrow x' = x^2y^3 + xy \Rightarrow x' - xy = x^2y^3$

η οποία είναι Bernoulli ως προς $x(y)$ και την λύνουμε κατά τα γνωστά:

$x' - xy = x^2y^3 \Rightarrow x^{-2}x' - yx^{-1} = y^3.$

Θέτουμε $x^{-1} = z(y)$, παραγωγίζουμε ως προς y, άρα:$-x^{-2}x' = z'(y)$ και αντικαθιστούμε στην προκύπτουσα δ.ε.:
$-z' - yz = y^3 \Rightarrow z' + yz = -y^3.$

Αυτή η δ.ε. είναι γραμμική ως προς $z(y)$ με πολ/τή $\mu(y) = e^{\frac{y^2}{2}}$, οπότε:
$\left(e^{\frac{y^2}{2}} z\right)' = y^3 e^{\frac{y^2}{2}} \Rightarrow e^{\frac{y^2}{2}} z = \int e^{\frac{y^2}{2}} y^3 dy + c \Rightarrow e^{\frac{y^2}{2}} z = c - y^2 e^{\frac{y^2}{2}} + 2e^{\frac{y^2}{2}} \Rightarrow$
$\Rightarrow z(y) = ce^{-\frac{y^2}{2}} + 2 - y^2 \Rightarrow x^{-1}(y) = ce^{-\frac{y^2}{2}} + 2 - y^2 \Rightarrow x(y) = \dfrac{1}{ce^{-\frac{y^2}{2}} + 2 - y^2}$

Επειδή δίνεται ότι $y\left(\dfrac{1}{2}\right) = 0$, από την τελευταία ισότητα έχουμε:

$\dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{c+2} \Rightarrow c = 0$

και έτσι προκύπτει ότι η λύση του δοθέντος Π.Α.Τ. είναι:

$x(y) = \dfrac{1}{2 - y^2}.$

Παράδειγμα 40 Να λυθεί η Σ.Δ.Ε. $xy' + y = xy^2 lnx.$

Λύση

Η δοθείσα Σ.Δ.Ε. είναι Bernoulli ως προς $y(x)$, οπότε πολ/με και τα δύο μέλη με y^{-2}:

$$y^{-2}y' + \frac{1}{x}y^{-1} = lnx$$

Θέτουμε $y^{-1} = u(x) \Rightarrow -y^{-2}y' = u'$ και αντικαθιστούμε στην προκύπτουσα Σ.Δ.Ε. Έτσι:

$$-u' + \frac{1}{x}u = lnx \Rightarrow u' - \frac{1}{x}u = -lnx$$

Η τελευταία Σ.Δ.Ε. είναι γραμμική ως προς $u(x)$. Ο πολ/τής Euler είναι

$\mu(x) = e^{-\int \frac{dx}{x}} = e^{-lnx} = \dfrac{1}{x}$, οπότε έχουμε:

$$\left(\frac{1}{x}u\right)' = -\frac{lnx}{x} \Rightarrow \frac{u}{x} = -\int \frac{lnx}{x}dx + c_1 \Rightarrow \frac{u}{x} = -\frac{ln^2x}{2} + c_1 \Rightarrow$$
$$u(x) = -\frac{x}{2}ln^2x + c_1x \Rightarrow y(x) = (-\frac{x}{2}ln^2x + c_1x)^{-1}.$$

Παράδειγμα 41 Να λυθεί η Σ.Δ.Ε. $xy - y' = y^3e^{-x^2}$.

Λύση

Η δοθείσα Σ.Δ.Ε. είναι Bernoulli ως προς $y(x)$, οπότε πολ/με και τα δύο μέλη με y^{-3}:

$$y^{-3}y' - xy^{-2} = -e^{-x^2}$$

Θέτουμε $y^{-2} = u(x) \Rightarrow -2y^{-3}y' = u'$ και αντικαθιστούμε στην προκύπτουσα Σ.Δ.Ε. Έτσι:

$$-\frac{u'}{2} - xu = -e^{-x^2} \Rightarrow u' + 2xu = 2e^{-x^2}$$

Η τελευταία Σ.Δ.Ε. είναι γραμμική ως προς $u(x)$. Ο πολ/τής Euler είναι

$\mu(x) = e^{2\int xdx} = e^{x^2}$, οπότε έχουμε:

$(e^{x^2}u)' = 2 \Rightarrow e^{x^2}u = 2x + c \Rightarrow u = (2x + c)e^{-x^2} \Rightarrow y^{-2} = (2x + c)e^{-x^2}$

2.6.2 Σ.Δ.Ε. Riccatti

Η Σ.Δ.Ε. Riccatti έχει τη μορφή:

$$y'(x) = \sigma_0(x) + \sigma_1(x)y(x) + \sigma_2(x)y^2(x) \tag{2.33}$$

όπου $\sigma_i(x) \quad i = 0, 1, 2$ είναι γνωστές συνεχείς συναρτήσεις. Την γενική λύση της Σ.Δ.Ε. μπορούμε να την υπολογίσουμε στις παρακάτω περιπτώσεις:

(α) Αν $y_1(x)$ είναι μια ειδική λύση της (2.33), τότε θέτουμε

$$y(x) = y_1(x) + u(x) \tag{2.34}$$

και η Σ.Δ.Ε. (2.33) μετασχηματίζεται σε Σ.Δ.Ε. Bernoulli ως προς $u(x)$. Πράγματι, αντικαθιστώντας την (2.34) στην (2.33) προκύπτει:

$$y_1'(x)+u'(x) = \sigma_0(x)+\sigma_1(x)(y_1(x)+u(x))+\sigma_2(x)(y_1^2(x)+u^2(x)+2y_1(x)u(x))$$

Λαμβάνοντας υπ' όψιν μας ότι η $y_1(x)$ είναι μια ειδική λύση της (2.33), δηλαδή ισχύει

$$y_1'(x) = \sigma_0(x) + \sigma_1(x)y_1(x) + \sigma_2(x)y_1^2(x)$$

η παραπάνω Σ.Δ.Ε. γίνεται:

$$u'(x) = \sigma_1(x)u(x) + \sigma_2(x)(u^2(x) + 2y_1(x)u(x)) \Rightarrow$$

$$u'(x) - [\sigma_1(x) + 2y_1(x)]u(x) = \sigma_2(x)u^2(x) \tag{2.35}$$

η οποία είναι Σ.Δ.Ε. Bernoulli ως προς $u(x)$. Βρίσκουμε την $u(x)$ από την (2.35), αντικαθιστούμε στην (2.34) και παίρνουμε τη γενική λύση της (2.33).

(β) Αν $y_1(x)$ είναι μια ειδική λύση της (2.33), τότε θέτουμε

$$y(x) = y_1(x) + \frac{1}{u(x)} \tag{2.36}$$

και η Σ.Δ.Ε. (2.33) μετασχηματίζεται σε Σ.Δ.Ε. γραμμική ως προς $u(x)$ την οποία επιλύουμε κατά τα γνωστά και από την (2.36) βρίσκουμε την γενική λύση της (2.33). Πράγματι, αντικαθιστώντας την (2.36) στην (2.33) προκύπτει:

$$y_1'(x)-\frac{u'(x)}{u^2(x)}=\sigma_0(x)+\sigma_1(x)\left(y_1(x)+\frac{1}{u(x)}\right)+\sigma_2(x)\left(y_1^2(x)+\frac{1}{u^2(x)}+2y_1(x)\frac{1}{u(x)}\right)$$

Λαμβάνοντας υπ' όψιν μας ότι η $y_1(x)$ είναι μια ειδική λύση της (2.33), δηλαδή ισχύει

$$y_1'(x)=\sigma_0(x)+\sigma_1(x)y_1(x)+\sigma_2(x)y_1^2(x)$$

η παραπάνω Σ.Δ.Ε. γίνεται:

$$-\frac{u'(x)}{u^2(x)}=\sigma_1(x)\frac{1}{u(x)}+\sigma_2(x)\left(\frac{1}{u^2(x)}+2y_1(x)\frac{1}{u(x)}\right)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow -u'(x)=\sigma_1(x)u(x)+\sigma_2(x)+2\sigma_2(x)y_1(x)u(x)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow u'(x)+[\sigma_1(x)+2\sigma_2(x)y_1(x)]u(x)=-\sigma_2(x)$$

η οποία είναι Σ.Δ.Ε. γραμμική ως προς $u(x)$.

(γ) Αν $y_1(x)$ και $y_2(x)$ είναι δύο ειδικές λύσεις της (2.33) τότε η γενική λύση αυτής δίνεται από τον τύπο:

$$\frac{y(x)-y_1(x)}{y(x)-y_2(x)}=ce^{\int\sigma_2(x)[y_1(x)-y_2(x)]dx},\quad c=\text{αυθαίρετη σταθερά} \qquad (2.37)$$

Πράγματι, αφού $y_1(x)$ και $y_2(x)$ είναι δύο ειδικές λύσεις της (2.33), θα την ικανοποιούν και θα ισχύουν οι παρακάτω σχέσεις:

$$y'(x)-y_1'(x)=\sigma_1(x)(y(x)-y_1(x))+\sigma_2(x)(y^2(x)-y_1^2(x))$$
$$y'(x)-y_2'(x)=\sigma_1(x)(y(x)-y_2(x))+\sigma_2(x)(y^2(x)-y_2^2(x))$$

Από όπου προκύπτουν αντίστοιχα:

$$\frac{y'(x)-y_1'(x)}{y(x)-y_1(x)}=\sigma_1(x)+\sigma_2(x)(y(x)+y_1(x))$$

$$\frac{y'(x)-y_2'(x)}{y(x)-y_2(x)}=\sigma_1(x)+\sigma_2(x)(y(x)+y_2(x)).$$

Αφαιρούμε τις ανωτέρω ισότητες κατά μέλη και παίρνουμε:

$$\frac{y'(x) - y_1'(x)}{y(x) - y_1(x)} - \frac{y'(x) - y_2'(x)}{y(x) - y_2(x)} = \sigma_2(x)[y_1(x) - y_2(x)] \text{ ή}$$
$$\frac{d}{dx}\Big[ln\,|y(x) - y_1(x)|\Big] - \frac{d}{dx}\Big[ln\,|y(x) - y_2(x)|\Big] = \sigma_2(x)[y_1(x) - y_2(x)].$$

Εφαρμόζοντας ιδιότητες της παραγώγου και της λογαριθμικής συνάρτησης, έχουμε:

$$\frac{d}{dx}\left[ln\left|\frac{y(x) - y_1(x)}{y(x) - y_2(x)}\right|\right] = \sigma_2(x)[y_1(x) - y_2(x)].$$

Ολοκληρώνουμε ως προς x, οπότε παίρνουμε:

$$ln\left|\frac{y(x) - y_1(x)}{y(x) - y_2(x)}\right| = \int \sigma_2(x)\,[y_1(x) - y_2(x)]\,dx + c \Rightarrow$$

$$\frac{y(x) - y_1(x)}{y(x) - y_2(x)} = ce^{\int \sigma_2(x)[y_1(x) - y_2(x)]dx}$$

η οποία είναι η αποδεικτέα ισότητα.

(δ) Ο μετασχηματισμός

$$y(x) = -\frac{1}{\sigma_2(x)}\frac{u'(x)}{u(x)} \tag{2.38}$$

μετατρέπει την Σ.Δ.Ε. (2.33) σε γραμμική ομογενή, δεύτερης τάξης ως προς $u(x)$. Πράγματι αντικαθιστώντας την $y(x)$ και την παράγωγό της από την (2.38) στην (2.33) έχουμε:

$$\frac{\sigma_2'(x)}{\sigma_2^2(x)}\frac{u'(x)}{u(x)} - \frac{1}{\sigma_2(x)}\frac{u''(x)}{u(x)} + \frac{1}{\sigma_2(x)}\left(\frac{u'(x)}{u(x)}\right)^2 =$$
$$= \sigma_0(x) - \sigma_1(x)\frac{1}{\sigma_2(x)}\frac{u'(x)}{u(x)} + \sigma_2(x)\frac{1}{\sigma_2^2(x)}\left(\frac{u'(x)}{u(x)}\right)^2 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \frac{\sigma_2'(x)}{\sigma_2^2(x)}\frac{u'(x)}{u(x)} - \frac{1}{\sigma_2(x)}\frac{u''(x)}{u(x)} = \sigma_0(x) - \sigma_1(x)\frac{1}{\sigma_2(x)}\frac{u'(x)}{u(x)}$$
$$\Rightarrow -\frac{1}{\sigma_2(x)}u''(x) + \left[\frac{\sigma_2'(x)}{\sigma_2^2(x)} + \sigma_1(x)\frac{1}{\sigma_2(x)}\right]u'(x) - \sigma_0(x)u(x) = 0$$

η οποία είναι γραμμική ομογενής δεύτερης τάξης ως προς $u(x)$.

Σημείωση 2.10 Η μορφή της ειδικής λύσης εξαρτάται από την μορφή των συναρτήσεων $\sigma_i(x) \quad i=0,1,2$. Έτσι, αν $\sigma_i(x)$ είναι πολυώνυμα του x, ζητούμε ειδική λύση της μορφής: $y_1(x)=ax+b$. Αν $\sigma_i(x)$ είναι εκθετικής μορφής, ζητούμε ειδική λύση της μορφής $y_1(x)=ae^{bx}$. Αν $\sigma_i(x)$ είναι ρητές συναρτήσεις, ζητούμε ειδική λύση της μορφής $y_1(x)=ax^b$. Την μορφή της ειδικής λύσης αυτής την αντικαθιστούμε στην δοθείσα Σ.Δ.Ε. και υπολογίζουμε τα a,b. Μερικές φορές μια ειδική λύση μπορεί να είναι προφανής.

Παράδειγμα 42 Να βρεθεί η γενική λύση της Σ.Δ.Ε. $y'-y^2+2e^xy=e^{2x}+e^x$.

Λύση

Η κανονική μορφή της δοθείσας δ.ε. είναι:

$$y'=y^2+2e^xy-e^{2x}-e^x$$

Η ειδική λύση θα είναι της μορφής: $y_1(x)=ae^{bx}$. Παραγωγίζουμε ως προς x: $y_1'(x)=abe^{bx}$ και αντικαθιστούμε στην δοθείσα Σ.Δ.Ε. Έχουμε λοιπόν:

$$abe^{bx}-\left(ae^{bx}\right)^2+2e^xae^{bx}=e^{2x}+e^x \Rightarrow abe^{bx}-a^2e^{2bx}+2abe^{(b+1)x}=e^{2x}+e^x$$

Μας ενδιαφέρει να βρούμε τουλάχιστον μια ειδική λύση, άρα αρκεί να βρούμε ένα a και ένα b για τα οποία ισχύει η παραπάνω σχέση. Παρατηρούμε λοιπόν ότι αν $b=1$, τότε

$$ae^x-a^2e^{2x}+2ae^{2x}=e^{2x}+e^x \Rightarrow \begin{cases} a=1 \\ -a^2+2a-1=0 \end{cases} \Rightarrow a=1$$

οπότε μια ειδική λύση είναι: $y_1(x)=e^x$. Θέτουμε λοιπόν

$$y(x)=e^x+\frac{1}{u(x)} \Rightarrow y'(x)=e^x-\frac{u'(x)}{u^2(x)}$$

στην δοθείσα Σ.Δ.Ε. και παίρνουμε:

$$e^x-\frac{u'(x)}{u^2(x)}-e^{2x}-\frac{1}{u^2(x)}-2e^x\frac{1}{u(x)}+2e^{2x}+2e^x\frac{1}{u(x)}=e^{2x}+e^x \Rightarrow$$
$$\Rightarrow -\frac{u'(x)}{u^2(x)}-\frac{1}{u^2(x)}=0 \Rightarrow u'(x)+1=0 \Rightarrow du=-dx \Rightarrow u(x)=-x+c$$

Και η γενική λύση της δοθείσας Σ.Δ.Ε. είναι:

$y(x) = e^x + \dfrac{1}{-x+c}.$

Παράδειγμα 43 Να λυθεί η Σ.Δ.Ε. $y' + 2y^2 = \dfrac{1}{x^2}$.

Λύση

Ζητούμε ειδική λύση της μορφής $y = ax^b \Rightarrow y' = abx^{b-1}$ και αντικαθιστούμε στην Σ.Δ.Ε. για να υπολογίσουμε τα a και b. Έτσι:

$$abx^{b-1} + 2a^2x^{2b} = x^{-2}$$

Αν $b = -1$, τότε $-a + 2a^2 - 1 = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ a = -\dfrac{1}{2} \end{cases}$. Άρα παίρνουμε δύο ειδικές λύσεις: $y_1(x) = \dfrac{1}{x}$ και $y_2(x) = -\dfrac{1}{2x}$ και η γενική λύση της δοθείσας Σ.Δ.Ε. θα δίνεται από τον τύπο (2.37). Έτσι:

$$\frac{y(x) - \dfrac{1}{x}}{y(x) + \dfrac{1}{2x}} = ce^{\int -2[\frac{1}{x} + \frac{1}{2x}]dx} \Rightarrow \frac{y(x) - \dfrac{1}{x}}{y(x) + \dfrac{1}{2x}} = ce^{-3lnx} \Rightarrow$$

$$\frac{y(x) - \dfrac{1}{x}}{y(x) + \dfrac{1}{2x}} = \frac{c}{x^3} \Rightarrow \frac{y(x) - \dfrac{1}{x}}{\dfrac{3}{2x}} = \frac{c}{x^3 - c} \Rightarrow y(x) = \frac{1}{x} + \frac{3c}{2x(x^3 - c)}$$

Παράδειγμα 44 Να λυθεί η Σ.Δ.Ε. $y' = (1-y)\left(\dfrac{1}{x} + 1 - y\right)$

Λύση

Παρατηρούμε ότι η $y = 1$ είναι ειδική λύση της δ.ε. που είναι Riccati, διότι μπορεί να γραφτεί: $y' = \dfrac{1}{x} + 1 - \left(\dfrac{1}{x} + 2\right)y + y^2$, οπότε θέτουμε:

$$y(x) = 1 + \frac{1}{u(x)} \Rightarrow y'(x) = -\frac{u'(x)}{u^2(x)}$$

οπότε η δοθείσα μετατρέπεται σε γραμμική, την οποία επιλύουμε:

$$-\frac{u'(x)}{u^2(x)} = -\frac{1}{u(x)}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{u(x)}\right) \Rightarrow u'(x) = u(x)\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{u(x)}\right) \Rightarrow$$
$$u'(x) - \frac{u(x)}{x} = -1$$
είναι γραμμική δ.ε. με πολλαπλασιαστή Euler $\mu(x) = \dfrac{1}{x}$, οπότε
$$\left(\frac{1}{x}u(x)\right)' = -\frac{1}{x} \Rightarrow \frac{1}{x}u(x) = -ln|x| + c \Rightarrow u(x) = cx - xln|x| \Rightarrow$$
$$y(x) = 1 + \frac{1}{cx - xln|x|}.$$

Παράδειγμα 45 Να λυθεί η Σ.Δ.Ε. $y' + x = (1-x)y^2 + (2x-1)y$

Λύση

Ζητούμε ειδική λύση της μορφής $y = ax + b \Rightarrow y' = a$ και αντικαθιστούμε στην Σ.Δ.Ε. για να υπολογίσουμε τα a και b. Έτσι:
$$a = -x + (2x-1)(ax+b) + (1-x)(a^2x^2 + b^2 + 2abx) \Rightarrow$$

$$a = -x + 2ax^2 + 2bx - ax - b + a^2x^2 + b^2 + 2abx - ax^3 - b^2x - 2abx^2 \Rightarrow$$

Αν $a = 0$, τότε $0 = -x + 2bx - b + b^2 - b^2x \Rightarrow 0 = -b + b^2 + (-1 + 2b - b^2)x \Rightarrow$

$$\begin{cases} -1 + 2b - b^2 = 0 \\ -b + b^2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (b-1)^2 = 0 \\ b(b-1) = 0 \end{cases} \Rightarrow b = 1$$

Συνεπώς η $y = 1$ είναι ειδική λύση της δ.ε. που είναι Riccati, οπότε θέτουμε:
$$y(x) = 1 + \frac{1}{u(x)} \Rightarrow y'(x) = -\frac{u'(x)}{u^2(x)}$$

οπότε η δοθείσα μετατρέπεται σε γραμμική, την οποία επιλύουμε:

$$-\frac{u'}{u^2} = -x + (2x-1)\left(1 + \frac{1}{u}\right) + (1-x)\left(1 + \frac{1}{u^2} + \frac{2}{u}\right) \Rightarrow$$
$$-\frac{u'}{u^2} = -x + 2x - 1 + \frac{2x-1}{u} + 1 - x + \frac{1-x}{u^2} + \frac{2(1-x)}{u} \Rightarrow$$
$$-\frac{u'}{u^2} = \frac{1}{u} + \frac{1-x}{u^2} \Rightarrow u' = -u + x - 1 \Rightarrow u' + u = x - 1$$
είναι γραμμική δ.ε. με πολλαπλασιαστή Euler $\mu(x) = e^x$, οπότε

$$(e^x u)' = (x-1)e^x \Rightarrow e^x u = (x-1)e^x - e^x + c \Rightarrow u = x - 1 - 1 + ce^{-x}$$

$$\Rightarrow u = x - 2 + ce^{-x} \Rightarrow y = 1 + \frac{1}{x - 2 + ce^{-x}}.$$

Παράδειγμα 46 Να λυθεί η Σ.Δ.Ε. $y' + e^{-x}y^2 - y - e^x = 0$

Λύση

Ζητούμε ειδική λύση της μορφής $y = ae^{bx} \Rightarrow y' = abe^{bx}$ και αντικαθιστούμε στην Σ.Δ.Ε. για να υπολογίσουμε τα a και b. Έτσι:

$$abe^{bx} + e^{-x}a^2e^{2bx} - ae^{bx} - e^x = 0 \Rightarrow a(b-1)e^{bx} + a^2e^{(2b-1)x} - e^x = 0 \Rightarrow$$

$a(b-1)e^{bx} = 0$ και $a^2e^{(2b-1)x} - e^x = 0 \Rightarrow b = 1$ και $a^2 - 1 = 0 \Rightarrow$

$b = 1$ και $a = \pm 1$.

Άρα παίρνουμε δύο ειδικές λύσεις: $y_1(x) = e^x$ και $y_2(x) = -e^x$ και η γενική λύση της δοθείσας Σ.Δ.Ε. θα δίνεται από τον τύπο (2.37). Έτσι:

$$\frac{y(x) - e^x}{y(x) + e^x} = ce^{-\int e^{-x}[e^x + e^x]dx} \Rightarrow \frac{y(x) - e^x}{y(x) + e^x} = ce^{-2\int dx} \Rightarrow \frac{y(x) - e^x}{y(x) + e^x} = ce^{-2x}$$
$$\Rightarrow y(x) = \frac{e^x + ce^{-x}}{1 - ce^{-2x}}$$

Παράδειγμα 47 Να λυθεί η Σ.Δ.Ε. $y' - xy^2 - \dfrac{y}{x} + x^3 = 0$

Λύση

Ζητούμε ειδική λύση της μορφής $y = ax^b \Rightarrow y' = abx^{b-1}$ και αντικαθιστούμε στην Σ.Δ.Ε. για να υπολογίσουμε τα a και b. Έτσι:

$$abx^{b-1} - xa^2x^{2b} - \frac{1}{x}ax^b + x^3 = 0 \Rightarrow abx^{b-1} - a^2x^{2b+1} - ax^{b-1} + x^3 = 0 \Rightarrow$$

$a(b-1)x^{b-1} - a^2x^{2b+1} + x^3 = 0 \Rightarrow a(b-1)x^{b-1} = 0$ και $-a^2x^{2b+1} + x^3 = 0 \Rightarrow$

$b - 1 = 0$ και $a^2 - 1 = 0 \Rightarrow b = 1$ και $a = \pm 1$.

Άρα παίρνουμε δύο ειδικές λύσεις: $y_1(x) = x$ και $y_2(x) = -x$ και η γενική λύση της δοθείσας Σ.Δ.Ε. θα δίνεται από τον τύπο (2.37). Έτσι:

$$\frac{y(x) - x}{y(x) + x} = ce^{\int x[x+x]dx} \Rightarrow \frac{y(x) - x}{y(x) + x} = ce^{\int 2x^2 dx} \Rightarrow \frac{y(x) - x}{y(x) + x} = ce^{\frac{2x^3}{3}} \Rightarrow$$

$$y(x) = \frac{x(1 + ce^{\frac{2x^3}{3}})}{1 - ce^{\frac{2x^3}{3}}}$$

Ελληνική βιβλιογραφία

[1] Γ. Δάσιος, Συνήθεις Διαφορικές Εξισώσεις, Πάτρα, 1985

[2] Θ. Κυβεντίδης, Διαφορικές εξισώσεις, Εκδόσεις Ζήτη, Θεσ/κη, 1993

[3] Β. Μπαρμπάνης, Μαθήματα Διαφορικών Εξισώσεων, Πάτρα, 1976

[4] Π. Σιαφαρίκας, Εφαρμογές των Σ.Δ.Ε., Τόμος Ι, Πάτρα, 2002

[5] Ν. Σταυρακάκης, ΣΔΕ : γραμμική και μη γραμμική θεωρία από τη φύση και τη ζωή, Παπασωτηρίου, Αθήνα, 1997

Ξενόγλωσση βιβλιογραφία

[1] W. E. Boyce, R. C. Di Prima, Elementary differential equations and boundary value problems, N. Y. John Wiley & Sons, 1977

[2] M. Braun, Differential equations and their Applications, Springer-Verlag, 1993

[3] Abell and Braselton, Modern Differential equations, Theory, Application, Technology, Saunders College Publishing, 1996

[4] B. Rai and D. P. Choudhury, Ordinary Differential Equations, An introduction, Alpha Science, International Ltd, 2005

[5] Rice and Strange, Ordinary Differential Equations with Application, Brooks/Cole Publishing Company, 1996