Τίτλος Μαθήματος: Ειδικές Συναρτήσεις

Ενότητα: Εφαρμογές στα κλασσικά Ορθογώνια Πολυώνυμα

Όνομα Καθηγήτριας: Χρυσή Κοκολογιαννάκη

Τμήμα: Μαθηματικών

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Πατρών**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο

ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ

ΕΣΠΑ
2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Ενότητα 11

17 Εφαρμογές

17.1 Πολυώνυμα Legendre

Άσκηση 1. Δοθέντος ότι ο τύπος του Rodrigues για τα πολυώνυμα Legendre είναι

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n \tag{17.1}$$

να δειχθεί ότι:

$$\textbf{i)}\ \int_{-1}^{1} f(x)P_n(x)dx = \frac{(-1)^n}{2^n n!}\int_{-1}^{1}(x^2-1)^n f^{(n)}(x)dx, \tag{17.2}$$

όπου $f(x)$ είναι μια συνεχής συνάρτηση τέτοια ώστε και οι παράγωγοί της μέχρι n τάξη να είναι συνεχείς στο $[-1,1]$ και

$$\textbf{ii)}\ d_n^2 = \int_{-1}^{1} P_n^2(x)dx = \frac{2}{2n+1}. \tag{17.3}$$

Λύση: **i**) Έχουμε:

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{1} f(x)P_n(x)dx &= \int_{-1}^{1} f(x)\frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n dx \\
&= \frac{1}{2^n n!}\left\{\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}(x^2-1)^n f(x)\Big|_{x=-1}^{1} - \int_{-1}^{1} f'(x)\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}(x^2-1)^n dx\right\} \\
&= -\int_{-1}^{1} f'(x)\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}(x^2-1)^n dx \\
&= -\frac{1}{2^n n!}\left\{\frac{d^{n-2}}{dx^{n-2}}(x^2-1)^n f'(x)\Big|_{x=-1}^{1} - \int_{-1}^{1} f''(x)\frac{d^{n-2}}{dx^{n-2}}(x^2-1)^n dx\right\} \\
&= \frac{(-1)^2}{2^n n!}\int_{-1}^{1} f''(x)\frac{d^{n-2}}{dx^{n-2}}(x^2-1)^n dx = \dots \\
&= \frac{(-1)^n}{2^n n!}\int_{-1}^{1} f^{(n)}(x)(x^2-1)^n dx.
\end{aligned}$$

ii) Θέτουμε στην ισότητα (17.2) $f(x) = P_n(x)$, οπότε:

$$d_n^2 = \int_{-1}^{1} P_n^2(x)dx = \frac{(-1)^n}{2^n n!}\int_{-1}^{1}\frac{d^n}{dx^n}P_n(x)(x^2-1)^n dx. \tag{17.4}$$

Όμως, απ' τον τύπο (17.1) παραγωγίζοντας ως προς x, προκύπτει:

$$\frac{d^n P_n(x)}{dx^n} = \frac{1}{2^n n!}\frac{d^{2n}}{dx^{2n}}(x^2-1)^n = \frac{(2n)!}{2^n n!}. \tag{17.5}$$

και αντικαθιστώντας στην (17.4) παίρνουμε:

$$d_n^2 = \frac{(-1)^n}{2^n n!}\int_{-1}^{1}\frac{(2n)!}{2^n n!}(x^2-1)^n dx \Rightarrow d_n^2 = \frac{(2n)!}{(2^n n!)^2}\int_{-1}^{1}(1-x^2)^n dx \Rightarrow$$
$$d_n^2 = \frac{(2n)!}{(2^n n!)^2}2\int_{0}^{1}(1-x^2)^n dx. \tag{17.6}$$

Όμως:

$$\int_0^1 (1-x^2)^n dx \underset{2xdx=dt}{\overset{x^2=t}{=}} \int_0^1 (1-t)^n \frac{dt}{2t^{1/2}} = \frac{1}{2}\int_0^1 t^{-1/2}(1-t)^n dt = \frac{1}{2}\int_0^1 t^{1/2-1}(1-t)^{n+1-1}dt$$
$$= \frac{1}{2}B\Big(\frac{1}{2}, n+1\Big) = \frac{1}{2}\frac{\Gamma\big(\frac{1}{2}\big)\Gamma(n+1)}{\Gamma\big(n+\frac{3}{2}\big)} = \frac{1}{2}\frac{\sqrt{\pi}n!}{\frac{(2n+1)(2n-1)(2n-3)\cdots 3\cdot 1\cdot\sqrt{\pi}}{2^{n+1}}}. \tag{17.7}$$

Επομένως, η (17.6) θα πάρει τη μορφή:

$$d_n^2 = \frac{(2n)!2}{2^{2n}(n!)^2}\cdot\frac{1}{2}\frac{n!2^{n+1}}{(2n+1)(2n-1)\cdots 3\cdot 1} \Rightarrow d_n^2 = \frac{(2n)!!2^{n+1}}{2^{2n}n!(2n+1)(2n-1)\cdots 3\cdot 1}$$
$$\Rightarrow d_n^2 = \frac{2n(2n-1)2(n-1)(2n-3)2(n-2)\cdots 3\cdot 2\cdot 1\cdot 2^{n+1}}{2^{2n}n!(2n+1)(2n-1)\cdots 3\cdot 1}$$
$$\Rightarrow d_n^2 = \frac{2^n n! 2^{n+1}}{2^{2n}n!(2n+1)} \Rightarrow d_n^2 = \frac{2^{2n+1}}{2^{2n}(2n+1)} \Rightarrow d_n^2 = \frac{2}{2n+1},$$

πράγμα που θέλαμε να αποδείξουμε. □

Άσκηση 2. Με τη βοήθεια της γεννήτριας συνάρτησης των πολυωνύμων Legendre να δειχθεί ότι: $\displaystyle\int_{-1}^{1} P_n^2(x)dx = \frac{2}{2n+1}$.

Λύση:

Ισχύει

$$(1-2tx+t^2)^{-1/2} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)t^n, \qquad (*)$$

οπότε για n και m η $(*)$ γίνεται:

$$(1-2tx+t^2)^{-1} = \Big(\sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)t^n\Big)\Big(\sum_{m=0}^{\infty} P_m(x)t^m\Big) \Rightarrow$$
$$(1-2tx+t^2)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n^2(x)t^{2n} + 2\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{\substack{m=0\\ n\neq m}}^{\infty} P_m(x)P_n(x)t^{m+n} \qquad (**)$$

Ολοκληρώνουμε την $(**)$ ως προς x από -1 έως 1:

$$\int_{-1}^{1}\frac{dx}{1-2tx+t^2}=\sum_{n=0}^{\infty}\int_{-1}^{1}P_n^2(x)t^{2n}dx+2\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{\substack{m=0\\n\neq m}}^{\infty}\int_{-1}^{1}P_m(x)P_n(x)t^{m+n}dx\Rightarrow$$

$$\int_{-1}^{1}\frac{dx}{1-2tx+t^2}=\sum_{n=0}^{\infty}t^{2n}\int_{-1}^{1}P_n^2(x)dx\Rightarrow-\frac{1}{2t}\ln|1-2tx+t^2|\Big|_{x=-1}^{1}=\sum_{n=0}^{\infty}t^{2n}\int_{-1}^{1}P_n^2(x)dx\Rightarrow$$

$$-\frac{1}{2t}\ln|\frac{1-2t+t^2}{1+2t+t^2}|=\sum_{n=0}^{\infty}t^{2n}\int_{-1}^{1}P_n^2(x)dx\Rightarrow-\frac{1}{2t}\ln|\frac{(1-t)^2}{(1+t)^2}|=\sum_{n=0}^{\infty}t^{2n}\int_{-1}^{1}P_n^2(x)dx\Rightarrow$$

$$\ln|t+1|-\ln|t-1|=\sum_{n=0}^{\infty}t^{2n+1}\int_{-1}^{1}P_n^2(x)dx\qquad(***)$$

Παραγωγίζουμε την $(***)$ ως προς t:

$$\frac{1}{t+1}-\frac{1}{t-1}=\sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)t^{2n}\int_{-1}^{1}P_n^2(x)dx\Rightarrow\frac{t-1-t-1}{t^2-1}=\sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)t^{2n}\int_{-1}^{1}P_n^2(x)dx$$

$$-\frac{2}{t^2-1}=\sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)t^{2n}\int_{-1}^{1}P_n^2(x)dx\Rightarrow\sum_{n=0}^{\infty}2t^{2n}=\sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)t^{2n}\int_{-1}^{1}P_n^2(x)dx\Rightarrow$$

$$2=(2n+1)\int_{-1}^{1}P_n^2(x)dx\Rightarrow\int_{-1}^{1}P_n^2(x)dx=\frac{2}{2n+1}.$$

Άσκηση 3. Να δειχθεί ότι:

i) $(1-x^2)P_n'(x)=nP_{n-1}(x)-nxP_n(x)$,

ii) $$\int_{-1}^{1}xP_n(x)P_m(x)dx=\begin{cases}\dfrac{2(n+1)}{(2n+1)(2n+3)} & \text{αν}\quad m=n+1,\\ \dfrac{2n}{(2n-1)(2n+1)} & \text{αν}\quad m=n-1\end{cases},$$

iii) $$\int_{-1}^{1}(x^2-1)P_{n+1}(x)P_n'(x)dx=\frac{2n(n+1)}{(2n+1)(2n+3)},$$

iv) $$\int_{-1}^{1}(1-x^2)P_n'(x)P_m'(x)dx=\begin{cases}0 & \text{αν}\quad m\neq n,\\ \dfrac{2n(n+1)}{2n+1} & \text{αν}\quad m=n\end{cases}.$$

Λύση:

i) Γνωρίζουμε ότι ισχύουν οι αναδρομικές σχέσεις $xP_n'(x)=P_{n-1}'(x)+nP_n(x)$ και $P_{n+1}'(x)-xP_n'(x)=(n+1)P_n(x)$. Πολλαπλασιάζουμε την πρώτη με x και στη δεύτερη θέτουμε όπου n το $n-1$, οπότε προκύπτουν, αντίστοιχα, οι ισότητες:

$x^2P_n'(x)=xP_{n-1}'(x)+nxP_n(x),\qquad(*)$

$P_n'(x)-xP_{n-1}'(x)=nP_{n-1}(x)\Rightarrow xP_{n-1}'(x)=P_n'(x)-nP_{n-1}(x).\qquad(**)$

Από την ισότητα $(*)$ έχουμε:

$$\begin{aligned}
&(1-x^2)P_n'(x) = P_n'(x) - xP_{n-1}'(x) - nxP_n(x) \overset{(**)}{\Rightarrow} \\
&(1-x^2)P_n'(x) = P_n'(x) - P_n'(x) + nP_{n-1}(x) - nxP_n(x) \Rightarrow \\
&(1-x^2)P_n'(x) = nP_{n-1}(x) - nxP_n(x).
\end{aligned}$$

ii) Ισχύει η αναδρομική σχέση $(n+1)P_{n+1}(x) = (2n+1)xP_n(x) - nP_{n-1}(x)$, την οποία πολλαπλασιάζουμε με $P_m(x)$ και ολοκληρώνουμε ως προς x από -1 έως 1:

$$(n+1)\int_{-1}^{1} P_{n+1}(x)P_m(x)dx = (2n+1)\int_{-1}^{1} xP_n(x)P_m(x)dx - n\int_{-1}^{1} P_{n-1}(x)P_m(x)dx.$$

Διακρίνουμε περιπτώσεις: αν $m = n+1$ τότε

$$(n+1)\frac{2}{2n+3} = (2n+1)\int_{-1}^{1} xP_n(x)P_{n+1}(x)dx \Rightarrow \int_{-1}^{1} xP_n(x)P_{n+1}(x)dx = \frac{2(n+1)}{(2n+1)(2n+3)},$$

ενώ αν $m = n-1$ τότε

$$0 = (2n+1)\int_{-1}^{1} xP_n(x)P_{n-1}(x)dx - n\frac{2}{2n-1} \Rightarrow \int_{-1}^{1} xP_n(x)P_{n-1}(x)dx = \frac{2n}{(2n-1)(2n+1)}.$$

iii) Πολλαπλασιάζουμε την ισότητα που δείξαμε στο ερώτημα $i)$ με $P_{n+1}(x)$ και ολοκληρώνουμε ως προς x από -1 έως 1:

$$\begin{aligned}
&\int_{-1}^{1}(1-x^2)P_n'(x)P_{n+1}(x)dx = n\int_{-1}^{1} P_{n-1}(x)P_{n+1}(x)dx - n\int_{-1}^{1} xP_n(x)P_{n+1}(x)dx \underset{m=n+1}{\overset{ii)}{\Rightarrow}} \\
&\int_{-1}^{1}(x^2-1)P_n'(x)P_{n+1}(x)dx = \frac{2n(n+1)}{(2n+1)(2n+3)}.
\end{aligned}$$

iv) Τα πολυώνυμα Legendre ικανοποιούν τη δ.ε.

$$(1-x^2)P_n''(x) - 2xP_n'(x) + n(n+1)P_n(x) = 0 \Rightarrow \frac{d}{dx}[(1-x^2)P_n'(x)] = -n(n+1)P_n(x)$$

Πολλαπλασιάζουμε την τελευταία ισότητα με $P_m(x)$ και ολοκληρώνουμε ως προς x από -1 έως 1:

$$\begin{aligned}
&\int_{-1}^{1}\frac{d}{dx}[(1-x^2)P_n'(x)]P_m(x)dx = -n(n+1)\int_{-1}^{1} P_n(x)P_m(x)dx \Rightarrow \\
&(1-x^2)P_n'(x)P_m(x)\Big|_{x=-1}^{1} - \int_{-1}^{1}(1-x^2)P_n'(x)P_m'(x)dx = -n(n+1)\int_{-1}^{1} P_n(x)P_m(x)dx \Rightarrow \\
&\int_{-1}^{1}(1-x^2)P_n'(x)P_m'(x)dx = n(n+1)\int_{-1}^{1} P_n(x)P_m(x)dx = \begin{cases} 0 & \text{αν} \quad m \neq n, \\ \dfrac{2n(n+1)}{2n+1} & \text{αν} \quad m = n \end{cases}.
\end{aligned}$$

Άσκηση 4. Χρησιμοποιώντας τη γεννήτρια συνάρτηση

$$(1-2xt+t^2)^{-1/2}=\sum_{n=0}^{\infty}P_n(x)t^n, \tag{17.8}$$

των πολυωνύμων Legendre $P_n(x)$, να αποδειχθούν οι αναδρομικές σχέσεις:
i) $(n+1)P_{n+1}(x)-(2n+1)P_n(x)+nP_{n-1}(x)=0, \quad n=1,2,\dots$
ii) $xP_n'(x)-P_{n-1}'(x)=nP_n(x)$.

Λύση: **i**) Παραγωγίζουμε τη γεννήτρια συνάρτηση ως προς t:

$$\Big(-\frac{1}{2}\Big)(2t-2x)(1-2xt+t^2)^{-3/2}=\sum_{n=1}^{\infty}nP_n(x)t^{n-1}\Rightarrow$$

$$(x-t)(1-2xt+t^2)^{-3/2}=\sum_{n=1}^{\infty}nP_n(x)t^{n-1}\Rightarrow$$

$$(x-t)(1-2xt+t^2)^{-1/2}=(1-2xt+t^2)\sum_{n=1}^{\infty}nP_n(x)t^{n-1}\stackrel{(17.8)}{\Longrightarrow}$$

$$(x-t)\sum_{n=0}^{\infty}P_n(x)t^n=(1-2xt+t^2)\sum_{n=1}^{\infty}nP_n(x)t^{n-1}\Rightarrow$$

$$x\sum_{n=0}^{\infty}P_n(x)t^n-\sum_{n=0}^{\infty}P_n(x)t^{n+1}=\sum_{n=1}^{\infty}nP_n(x)t^{n-1}-2x\sum_{n=1}^{\infty}nP_n(x)t^n+\sum_{n=1}^{\infty}nP_n(x)t^{n+1}\Rightarrow$$

$$\begin{aligned}x\sum_{n=0}^{\infty}P_n(x)t^n-\sum_{n=1}^{\infty}P_{n-1}(x)t^n=&\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)P_{n+1}(x)t^n-2x\sum_{n=1}^{\infty}nP_n(x)t^n\\&+\sum_{n=2}^{\infty}(n-1)P_{n-1}(x)t^n.\end{aligned} \tag{17.9}$$

Η ισότητα (17.9) μας δίνει:

για $n=0$: $\quad xP_0(x)=P_1(x) \qquad (17.10)$

για $n=1$: $\quad xP_1(x)-P_0(x)=2P_2(x)-2xP_1(x) \qquad (17.11)$

και για $n=2$:

$$\begin{aligned}xP_n(x)-P_{n-1}(x)&=(n+1)P_n(x)-2xnP_n(x)+(n-1)P_{n-1}(x)\Rightarrow\\(2n+1)xP_n(x)&=(n+1)P_{n+1}(x)+nP_{n-1}(x).\end{aligned}$$

Λόγω των ισοτήτων (17.10) και (17.11), έπεται η ζητούμενη αναδρομική σχέση $\forall n\geq 0$.

ii) Παραγωγίζουμε τη γεννήτρια συνάρτηση ως προς x:

$$\Big(-\frac{1}{2}\Big)(-2t)(1-2xt+t^2)^{-3/2}=\sum_{n=0}^{\infty}P_n'(x)t^n \Rightarrow t(1-2xt+t^2)^{-3/2}=\sum_{n=0}^{\infty}P_n'(x)t^n \Rightarrow$$

$$(1-2xt+t^2)^{-3/2}=\sum_{n=0}^{\infty}P_n'(x)t^{n-1} \underset{\text{με } (x-t)}{\overset{\text{πολ/με}}{\Longrightarrow}}$$

$$(x-t)(1-2xt+t^2)^{-3/2}=(x-t)\sum_{n=0}^{\infty}P_n'(x)t^{n-1} \Rightarrow$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}nP_n(x)t^{n-1}=x\sum_{n=0}^{\infty}P_n'(x)t^{n-1}-\sum_{n=0}^{\infty}P_n'(x)t^n \Rightarrow$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}nP_n(x)t^{n-1}=x\sum_{n=0}^{\infty}P_n'(x)t^{n-1}-\sum_{n=1}^{\infty}P_{n-1}'(x)t^{n-1}.$$

Για $n=0$ η ισότητα δίνει: $0=P_0'(x)$, που ισχύει διότι το $P_0(x)$ είναι πολυώνυμο μηδενικού βαθμού και για $n\geq 1$:

$$nP_n(x)=xP_n'(x)-P_{n-1}'(x).$$

□

17.2 Πολυώνυμα Tchebychev

Η δ.ε. Tchebychev έχει τη μορφή:

$$(1-x^2)y''(x)-xy'(x)+n^2y(x)=0. \tag{17.1}$$

Θέτοντας $x=\cos\theta$, έχουμε $dx=-\sin\theta d\theta$, οπότε:

$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{dy}{d\theta}\dfrac{d\theta}{dx}=-\dfrac{1}{\sin\theta}\dfrac{dy}{d\theta}$ και

$\dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{d}{d\theta}\Big(-\dfrac{1}{\sin\theta}\dfrac{dy}{d\theta}\Big)\dfrac{d\theta}{dx}=-\dfrac{1}{\sin\theta}\Big(\dfrac{\cos\theta}{\sin^2\theta}\dfrac{dy}{d\theta}\Big)+\dfrac{1}{\sin^2\theta}\dfrac{d^2y}{d\theta^2}.$

Άρα η (17.1) γράφεται:

$$\begin{aligned}&(1-\cos^2\theta)\Big[\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{d^2y}{d\theta^2}-\frac{\cos\theta}{\sin^3\theta}\frac{dy}{d\theta}\Big]+\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\frac{dy}{d\theta}+n^2y(\theta)=0\Rightarrow\\ &\Rightarrow\frac{d^2y}{d\theta^2}-\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\frac{dy}{d\theta}+\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\frac{dy}{d\theta}+n^2y(\theta)=0\\ &\Rightarrow\frac{d^2y}{d\theta^2}+n^2y(\theta)=0.\end{aligned} \tag{17.2}$$

Η (17.2) είναι δ.ε. με σταθερούς συντελεστές και γενική λύση:

$$y(\theta)=c_1\cos(n\theta)+c_2\sin(n\theta).$$

Δηλαδή οι γραμμικώς ανεξάρτητες λύσεις της (17.2) είναι $\cos(n\theta)$ και $\sin(n\theta)$, άρα οι γραμμικώς ανεξάρτητες λύσεις της (17.1) θα είναι

$$\cos(n\cos^{-1}x) \quad \text{και} \quad \sin(n\cos^{-1}x).$$

Θα δείξουμε ότι το $\cos(n\theta)$ είναι ένα πολυώνυμο n βαθμού ως προς $\cos\theta$. Πράγματι:

$$\begin{aligned}\cos(n\theta)+\mathrm{i}\sin(n\theta) &= (\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)^n \\ &= \cos^n\theta+n\cos^{n-1}\theta(\mathrm{i}\sin\theta)+\frac{n(n-1)}{2}\cos^{n-2}\theta(\mathrm{i}\sin\theta)^2+\cdots+(\mathrm{i}\sin\theta)^n \\ &= \sum_{m=0}^{n}\binom{n}{m}\cos^{n-m}\theta(\mathrm{i}\sin\theta)^m. \qquad (17.3)\end{aligned}$$

Από την (17.3) έπεται ότι το $\cos(n\theta)$ είναι ίσο με το πραγματικό μέρος του δεξιού μέλους της (17.3), δηλαδή με τους όρους που περιέχουν άρτιες δυνάμεις του $\mathrm{i}\sin\theta$ κι επειδή $\sin^2\theta=1-\cos^2\theta$, έπεται ότι το $\cos(n\theta)$ είναι πολυώνυμο βαθμού n ως προς $\cos\theta$.

Επίσης απ' την (17.3) έπεται ότι το $\sin(n\theta)$ δεν είναι ένα πολυώνυμο ως προς $\cos\theta$, αλλά το $\dfrac{\sin(n\theta)}{\sin\theta}$ είναι ένα πολυώνυμο $n-1$ βαθμού ως προς το $\cos\theta$. Πράγματι, για $m=2k$, $k=0,1,\ldots,\left[\dfrac{n}{2}\right]$, έχουμε:

$(\mathrm{i}\sin\theta)^m=(\mathrm{i}\sin\theta)^{2k}=(-1)^k(\sin^2\theta)^k=(-1)^k(1-\cos^2\theta)^k$. Άρα:

$$\cos(n\theta)=\sum_{k=0}^{[\frac{n}{2}]}\binom{n}{2k}\cos^{n-2k}\theta(-1)^k(1-\cos^2\theta)^k \qquad (17.4)$$

και για $m=2k+1$, $k=0,1,\ldots,\left[\dfrac{n-1}{2}\right]$, προκύπτει:

$$\sin(n\theta)=\sum_{k=0}^{[\frac{n-1}{2}]}\binom{n}{2k+1}\cos^{n-2k-1}\theta\sin\theta(-1)^k(1-\cos^2\theta)^k \Rightarrow$$

$$\frac{\sin(n\theta)}{\sin\theta}=\sum_{k=0}^{[\frac{n-1}{2}]}\binom{n}{2k+1}\cos^{n-2k-1}\theta(-1)^k(1-\cos^2\theta)^k. \qquad (17.5)$$

Οπότε ορίζουμε ως πολυώνυμα Tchebychev $1^{ου}$ είδους $T_n(\cos\theta)=\cos(n\theta)$ από την ισότητα (17.4) και $2^{ου}$ είδους $U_n(\cos\theta)=\dfrac{\sin((n+1)\theta)}{\sin\theta}$ από την ισότητα (17.5), θέτοντας όπου n το $n+1$.

Αν $x\in[-1,1]$ και $x=\cos\theta$ με $0\le\theta\le\pi$, τότε οι σχέσεις για τα πολυώνυμα θα γίνουν:

$$T_n(x)=\cos(n\cos^{-1}x)=\sum_{k=0}^{[\frac{n}{2}]}\frac{(-1)^k n!}{(2k)!(n-2k)!}x^{n-2k}(1-x^2)^k \qquad (17.6)$$

και

$$U_n(x)=\frac{\sin(n\cos^{-1}x)}{\sqrt{1-x^2}}=\sum_{k=0}^{[\frac{n}{2}]}\frac{(-1)^k(n+1)!}{(2k+1)!(n-2k)!}x^{n-2k}(1-x^2)^k. \qquad (17.7)$$

Άσκηση 1. Να δειχθεί ότι:

i) $\displaystyle\int_{-1}^{1}\frac{T_m(x)T_n(x)}{\sqrt{1-x^2}}=\begin{cases}0, & m\neq n\\ \frac{\pi}{2}, & m=n\neq 0\\ \pi, & m=n=0\end{cases},$

ii) $T_{n+1}(x)-2xT_n(x)+T_{n-1}(x)=0,$

iii) $(1-x^2)T_n'(x)=-nxT_n(x)+nT_{n-1}(x).$

Λύση: **i)** Θέτουμε $x=\cos\theta$, $dx=-\sin\theta$, οπότε $T_n(x)=\cos(n\theta)$, για $x=-1$ το $\theta=\pi$ και για $x=1$ το $\theta=0$, επομένως το ολοκλήρωμα παίρνει τη μορφή:

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1}\frac{T_m(x)T_n(x)}{\sqrt{1-x^2}}&=\int_{\pi}^{0}\frac{\cos(m\theta)\cos(n\theta)}{\sin(n\theta)}\big(-sin(n\theta)\big)d\theta=\int_0^{\pi}\cos(m\theta)\cos(n\theta)d\theta\\&=\frac{1}{2}\int_0^{\pi}[\cos(m+n)\theta+\cos(m-n)\theta]d\theta=I\end{aligned}$$

- Για $m\neq n$: $I=\dfrac{1}{2}\Big[\dfrac{\sin(m+n)\theta}{m+n}+\dfrac{\sin(m-n)\theta}{m-n}\Big]\Big|_{\theta=0}^{\pi}=0$
- Για $m=n\neq 0$: $I=\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^{\pi}[\cos(2n\theta)+1]d\theta=\dfrac{1}{2}\Big[\dfrac{\sin(2n\theta)}{2n}+\theta\Big]\Big|_{\theta=0}^{\pi}=\dfrac{\pi}{2}$
- Για $m=n=0$: $I=\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^{\pi}2d\theta=\theta\Big|_{\theta=0}^{\pi}=\pi.$

ii) Θέτουμε $x=\cos\theta$, οπότε $T_n(x)=\cos(n\theta)$, επομένως η αποδεικτέα γίνεται:
$\cos(n+1)\theta-2\cos\theta\cos(n\theta)+\cos(n-1)\theta=0$, η οποία ισχύει διότι:

$$\begin{aligned}\cos(n+1)\theta+\cos(n-1)\theta&=\cos(n\theta)\cos\theta-\sin(n\theta)\sin\theta+\cos(n\theta)\cos\theta+\sin(n\theta)\sin\theta\\&=2\cos\theta\cos(n\theta).\end{aligned}$$

iii) Θέτουμε $x=\cos\theta$, οπότε $T_n(x)=\cos(n\theta)$, επομένως η δοθείσα ισότητα γίνεται:
$(1-\cos^2\theta)\dfrac{d\cos(n\theta)}{d\cos\theta}=-n\cos\theta\cos(n\theta)+n\cos(n-1)\theta,$
όμως, $\dfrac{dT_n(x)}{dx}=\dfrac{d\cos(n\theta)}{d\cos\theta}=\dfrac{d\cos(n\theta)}{d\theta}\dfrac{d\theta}{dx}=-\dfrac{1}{\sin\theta}\big(-n\sin(n\theta)\big)=n\dfrac{\sin(n\theta)}{\sin\theta},$
οπότε προκύπτει ότι:

$$\begin{aligned}&n\sin^2\theta\frac{\sin(n\theta)}{\sin\theta}=-n\cos\theta\cos(n\theta)+n\cos(n-1)\theta\Rightarrow\\&\sin\theta\sin(n\theta)+\cos\theta\cos(n\theta)=\cos(n-1)\theta,\qquad\text{που ισχύει.}\end{aligned}$$

□

Άσκηση 2. Να δειχθεί ότι τα πολυώνυμα Tchebychev $T_n(x)$ ικανοποιούν τη δ.ε. $(1-x^2)y''(x) - xy'(x) + n^2 y(x) = 0$.

Λύση:

Γνωρίζουμε ότι $T_n(x) = \cos(n\cos^{-1}x)$. Παραγωγίζουμε την ισότητα αυτή ως προς x:

$$T_n'(x) = -n(\cos^{-1}x)'\sin(n\cos^{-1}x) = \frac{-n}{-\sqrt{1-x^2}}\sin(n\cos^{-1}x) = \frac{n\sin(n\cos^{-1}x)}{\sqrt{1-x^2}} \Rightarrow$$
$$[\sqrt{1-x^2}T_n'(x)]^2 = n^2\sin^2(n\cos^{-1}x) \Rightarrow (1-x^2)(T_n'(x))^2 = n^2[1-\cos^2(n\cos^{-1}x)] \Rightarrow$$
$$(1-x^2)(T_n'(x))^2 = n^2(1-T_n^2(x))$$

Παραγωγίζουμε ως προς x την τελευταία ισότητα:

$$-2x(T_n'(x))^2 + 2(1-x^2)T_n''(x)T_n'(x) = n^2(-2T_n(x)T_n'(x)) \overset{T_n'(x)\neq 0}{\Longrightarrow}$$
$$(1-x^2)T_n''(x) - xT_n'(x) + n^2T_n(x) = 0.$$

17.3 Πολυώνυμα Hermite

Άσκηση 1. Υποθέτουμε ότι υπάρχει μια συνάρτηση τέτοια ώστε:

$$\Psi(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} H_n(x)\frac{t^n}{n!}, \tag{17.1}$$

όπου $H_n(x)$ είναι τα πολυώνυμα Hermite. Να δειχθεί ότι: $\Psi(x,t) = e^{2xt-t^2}$,
αν ισχύει η αναδρομική σχέση:

$$H_{n+1}(x) = 2xH_n(x) - 2nH_{n-1}(x). \tag{17.2}$$

Λύση: Πολλαπλασιάζουμε και τα δύο μέλη της (17.2) με $\frac{t^n}{n!}$ και αθροίζουμε ως προς n από 0 έως ∞:

$$\sum_{n=0}^{\infty} H_{n+1}(x)\frac{t^n}{n!} = 2x\sum_{n=0}^{\infty} H_n(x)\frac{t^n}{n!} - 2\sum_{n=0}^{\infty} nH_{n-1}(x)\frac{t^n}{n!}. \tag{17.3}$$

Παραγωγίζουμε την (17.1) ως προς t:

$$\frac{\partial\Psi(x,t)}{\partial t} = \sum_{n=1}^{\infty} H_n(x)\frac{t^{n-1}}{(n-1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} H_{n+1}(x)\frac{t^n}{n!}. \tag{17.4}$$

Οπότε, η ισότητα (17.3), λόγω των (17.1) και (17.4), γίνεται:

$$\frac{\partial \Psi(x,t)}{\partial t} = 2x\Psi(x,t) - 2\sum_{n=1}^{\infty} H_{n-1}(x)\frac{t^n}{(n-1)!} \Rightarrow$$
$$\frac{\partial \Psi(x,t)}{\partial t} = 2x\Psi(x,t) - 2t\sum_{n=0}^{\infty} H_n(x)\frac{t^n}{n!} \Rightarrow \frac{\partial \Psi(x,t)}{\partial t} = 2x\Psi(x,t) - 2t\Psi(x,t) \Rightarrow$$
$$\frac{\partial \Psi(x,t)}{\partial t} = 2(x-t)\Psi(x,t) \Rightarrow \frac{\frac{\partial \Psi(x,t)}{\partial t}}{\Psi(x,t)} = 2(x-t) \overset{\text{ολ/ντας}}{\Longrightarrow}$$
$$\ln\Psi(x,t) = 2xt - t^2 + \phi(x) \Rightarrow \left.\begin{array}{c} \Psi(x,t) = e^{\phi(x)}e^{2xt-t^2} \\ \Psi(x,0) = H_0(x) = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \phi(x) = 0.$$

Άρα, $\Psi(x,t) = e^{2xt-t^2}$.

□

Άσκηση 2. Με τη βοήθεια της αναδρομικής σχέσης

$$H_{n+1}(x) - 2xH_n(x) + 2nH_{n-1}(x) = 0,$$

να δειχθεί ότι: $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}H_n^2(x)dx = 2^n n!\sqrt{\pi}$.

Λύση:

Στη δοθείσα αναδρομική σχέση θέτουμε όπου n το $n-1$:

$H_n(x) - 2xH_{n-1}(x) + 2(n-1)H_{n-2}(x) = 0. \qquad (*)$

Πολλαπλασιάζουμε τη $(*)$ με $e^{-x^2}H_n(x)$ και ολοκληρώνουμε ως προς x από $-\infty$ έως ∞:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}H_n^2(x)dx - 2\int_{-\infty}^{\infty} xe^{-x^2}H_n(x)H_{n-1}(x)dx + 2(n-1)\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}H_n(x)H_{n-2}(x)dx = 0$$
$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}H_n^2(x)dx = 2\int_{-\infty}^{\infty} xe^{-x^2}H_n(x)H_{n-1}(x)dx. \qquad (**)$$

Πολλαπλασιάζουμε τη δοθείσα αναδρομική σχέση με $e^{-x^2}H_{n-1}(x)$ και ολοκληρώνουμε ως προς x από $-\infty$ έως ∞:

$$\int_{-\infty}^{\infty} xe^{-x^2}H_{n+1}(x)H_{n-1}(x)dx - 2\int_{-\infty}^{\infty} xe^{-x^2}H_n(x)H_{n-1}(x)dx + 2n\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}H_{n-1}^2(x)dx = 0$$
$$2\int_{-\infty}^{\infty} xe^{-x^2}H_n(x)H_{n-1}(x)dx = 2n\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}H_{n-1}^2(x)dx. \qquad (***)$$

Από τις $(**)$ και $(***)$ έχουμε:

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}H_n^2(x)dx &= 2n\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}H_{n-1}^2(x)dx \overset{n\to n-1}{=} 2n2(n-1)\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}H_{n-2}^2(x)dx \\ &= \cdots = 2^n n!\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}H_0^2(x)dx = 2^n n!\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx \\ &= 2^n n!\sqrt{\pi}.\end{aligned}$$

17.4 Πολυώνυμα Laguerre

Άσκηση 1. Δεδομένου ότι η γεννήτρια συνάρτηση των πολυωνύμων Laguerre είναι:

$$\psi(x,t) = \frac{e^{-\frac{xt}{1-t}}}{(1-t)^{a+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} L_n^a(x) t^n$$

να δειχθούν οι αναδρομικές σχέσεις:

i) $(n+1)L_{n+1}^a(x) - (2n+a+1-x)L_n^a(x) + (n+a)L_{n-1}^a(x) = 0, \quad n \geq 1$

ii) $L_{n-1}^a(x) = \dfrac{d}{dx}[L_{n-1}^a(x) - L_n^a(x)], \quad n \geq 1,$

iii) $x\dfrac{d}{dx}L_n^a(x) = nL_n^a(x) - (n+a)L_{n-1}^a(x).$

Λύση:

i) Παραγωγίζουμε τη γεννήτρια συνάρτηση ως προς t και ισχύει $\left(\dfrac{t}{1-t}\right)' = \dfrac{1}{(1-t)^2}$, οπότε:

$$-\frac{x}{(1-t)^2}\frac{e^{-\frac{xt}{1-t}}}{(1-t)^{a+1}} + (a+1)\frac{e^{-\frac{xt}{1-t}}}{(1-t)^{a+2}} = \sum_{n=1}^{\infty} nL_n^a(x)t^{n-1} \Rightarrow$$

$$-\frac{x}{(1-t)^2}\sum_{n=0}^{\infty} L_n^a(x)t^n + \frac{a+1}{1-t}\sum_{n=0}^{\infty} L_n^a(x)t^n = \sum_{n=1}^{\infty} nL_n^a(x)t^{n-1} \Rightarrow$$

$$-x\sum_{n=0}^{\infty} L_n^a(x)t^n + (a+1)(1-t)\sum_{n=0}^{\infty} L_n^a(x)t^n = (1-t)^2\sum_{n=1}^{\infty} nL_n^a(x)t^{n-1} \Rightarrow$$

$$\begin{aligned}
&-x\sum_{n=0}^{\infty} L_n^a(x)t^n + (a+1)\sum_{n=0}^{\infty} L_n^a(x)t^n - (a+1)\sum_{n=0}^{\infty} L_n^a(x)t^{n+1} = \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} nL_n^a(x)t^{n-1} - 2\sum_{n=1}^{\infty} nL_n^a(x)t^n + \sum_{n=1}^{\infty} nL_n^a(x)t^{n+1} \Rightarrow \\
&-x\sum_{n=0}^{\infty} L_n^a(x)t^n + (a+1)\sum_{n=0}^{\infty} L_n^a(x)t^n - (a+1)\sum_{n=1}^{\infty} L_{n-1}^a(x)t^n = \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)L_{n+1}^a(x)t^n - 2\sum_{n=1}^{\infty} nL_n^a(x)t^n + \sum_{n=2}^{\infty}(n-1)L_{n-1}^a(x)t^n.
\end{aligned}$$

Άρα:

$n = 0: \quad -xL_0^a(x) + (a+1)L_0^a(x) = L_1^a(x) \Rightarrow (a+1-x)L_0^a(x) = L_1^a(x)$

$n = 1: \quad -xL_1^a(x) + (a+1)L_1^a(x) - (a+1)L_0^a(x) = 2L_2^a(x) - 2L_1^a(x) \Rightarrow$

$\Rightarrow \qquad (a+3-x)L_1^a(x) - (a+1)L_0^a(x) = 2L_2^a(x)$

$n \geq 2:$

$-xL_n^a(x) + (a+1)L_n^a(x) - (a+1)L_{n-1}^a(x) = (n+1)L_{n+1}^a(x) - 2nL_n^a(x) + (n-1)L_{n-1}^a(x)$

$$\Rightarrow (a+1+2n-x)L_n^a(x) = (n+1)L_{n+1}^a(x) + (n+a)L_{n-1}^a(x),$$

η αναδρομική σχέση ισχύει για $n \geq 1$.

ii) Παραγωγίζουμε τη γεννήτρια συνάρτηση ως προς x:

$$\frac{\partial\psi}{\partial x} = -\frac{t}{1-t}\frac{e^{-\frac{xt}{1-t}}}{(1-t)^{a+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} L_n^{a'}(x)t^n \Rightarrow -\frac{t}{1-t}\sum_{n=0}^{\infty} L_n^a(x)t^n = \sum_{n=0}^{\infty} L_n^{a'}(x)t^n \Rightarrow$$

$$-\sum_{n=0}^{\infty} L_n^a(x)t^{n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} L_n^{a'}(x)t^n - \sum_{n=0}^{\infty} L_n^{a'}(x)t^{n+1} \Rightarrow$$

$$-\sum_{n=1}^{\infty} L_{n-1}^a(x)t^n = \sum_{n=0}^{\infty} L_n^{a'}(x)t^n - \sum_{n=1}^{\infty} L_{n-1}^{a'}(x)t^n$$

Για $n = 0$: $\quad L_0^{a'}(x) = 0$, ισχύει και

για $n \geq 1$: $\quad -L_{n-1}^a(x) = L_n^{a'}(x) - L_{n-1}^{a'}(x)$.

iii) Παραγωγίζουμε την ισότητα που δείξαμε στο i) ως προς x:

$$(n+1)\frac{d}{dx}L_{n+1}^a(x) + L_n^a(x) - (a+1+2n-x)\frac{d}{dx}L_n^a(x) + (n+a)\frac{d}{dx}L_{n-1}^a(x) = 0 \quad (*)$$

Από την ισότητα που δείξαμε στο ii) αν θέσουμε όπου n το $n-1$, προκύπτει:

$$L_n^a(x) = \frac{d}{dx}L_n^a(x) - \frac{d}{dx}L_{n+1}^a(x) \Rightarrow \frac{d}{dx}L_{n+1}^a(x) = \frac{d}{dx}L_n^a(x) - L_n^a(x)$$

Αντικαθιστούμε στην $(*)$ και παίρνουμε (χρησιμοποιώντας ξανά την ισότητα ii)):

$$(n+1)\frac{d}{dx}L_n^a(x) - (n+1)L_n^a(x) + L_n^a(x) - (a+1+2n-x)\frac{d}{dx}L_n^a(x)$$
$$+ (n+a)[L_{n-1}^a(x) + \frac{d}{dx}L_n^a(x)] = 0 \Rightarrow$$

$$(n+1-2n-a-1+x+n+a)\frac{d}{dx}L_n^a(x) + (1-n-1)L_n^a(x) + (n+a)L_{n-1}^a(x) = 0$$
$$\Rightarrow x\frac{d}{dx}L_n^a(x) - nL_n^a(x) + (n+a)L_{n-1}^a(x) = 0.$$

Άσκηση 2. Να βρεθεί η γεννήτρια συνάρτηση $\psi(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} L_n^a(x)t^n$, όπου $L_n^a(x)$ είναι τα Ο.Π. Laguerre, που ικανοποιούν την αναδρομική σχέση:

$$(n+1)L_{n+1}^a(x) - (2n+a+1-x)L_n^a(x) + (n+a)L_{n-1}^a(x) = 0, \qquad (*)$$

με $L_0^a(x) = 1$, $L_{-1}^a(x) = 0$.

Λύση:

Παραγωγίζουμε τη δοθείσα συνάρτηση ως προς t:

$$\frac{\partial\psi}{\partial t} = \sum_{n=1}^{\infty} nL_n^a(x)t^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)L_{n+1}^a(x)t^n \qquad (**)$$

Πολλαπλασιάζουμε την $(*)$ με t^n και αθροίζουμε από $n = 0$ έως ∞:

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)L_{n+1}^a(x)t^n - 2\sum_{n=0}^{\infty} nL_n^a(x)t^n - (a+1-x)\sum_{n=0}^{\infty} L_n^a(x)t^n + \sum_{n=0}^{\infty} nL_{n-1}^a(x)t^n$$
$$+ a\sum_{n=0}^{\infty} L_{n-1}^a(x)t^n = 0 \overset{L_{-1}^a(x)=0}{\Longrightarrow}$$
$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)L_{n+1}^a(x)t^n - 2\sum_{n=1}^{\infty} nL_n^a(x)t^n - (a+1-x)\sum_{n=0}^{\infty} L_n^a(x)t^n + \sum_{n=1}^{\infty} nL_{n-1}^a(x)t^n$$
$$+ a\sum_{n=1}^{\infty} L_{n-1}^a(x)t^n = 0 \Rightarrow$$
$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)L_{n+1}^a(x)t^n - 2\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)L_{n+1}^a(x)t^{n+1} - (a+1-x)\sum_{n=0}^{\infty} L_n^a(x)t^n$$
$$+ \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)L_n^a(x)t^{n+1} + a\sum_{n=0}^{\infty} L_n^a(x)t^{n+1} = 0 \overset{(**)}{\Rightarrow}$$
$$\frac{\partial\psi}{\partial t} - 2t\frac{\partial\psi}{\partial t} - (a+1-x)\psi + at\psi + \sum_{n=1}^{\infty} nL_n^a(x)t^{n+1} + \sum_{n=0}^{\infty} L_n^a(x)t^{n+1} = 0 \Rightarrow$$
$$\frac{\partial\psi}{\partial t} - 2t\frac{\partial\psi}{\partial t} - (a+1-x)\psi + at\psi + \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)L_{n+1}^a(x)t^{n+2} + t\psi = 0 \Rightarrow$$
$$\frac{\partial\psi}{\partial t} - 2t\frac{\partial\psi}{\partial t} - (a+1-x)\psi + at\psi + t^2\frac{\partial\psi}{\partial t} + t\psi = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial t}[1-2t+t^2] = [a+1-x-at-t]\psi \Rightarrow \frac{\partial\psi}{\partial t}(1-t)^2 = [(a+1)-x-(a+1)t]\psi \Rightarrow$$
$$\frac{\partial\psi}{\partial t} = \Big[\frac{(a+1)(1-t)}{(1-t)^2} - \frac{x}{(1-t)^2}\Big]\psi \Rightarrow \frac{\frac{\partial\psi}{\partial t}}{\psi} = \frac{a+1}{1-t} - \frac{x}{(1-t)^2} \Rightarrow$$
$$\ln\psi = -(a+1)\ln(1-t) - \frac{x}{1-t} + \phi(x) \Rightarrow \ln[\psi(1-t)^{a+1}] = -\frac{x}{1-t} + \phi(x) \Rightarrow$$
$$\psi(1-t)^{a+1} = A(x)e^{-\frac{x}{1-t}} \Rightarrow \psi(x,t) = \frac{A(x)e^{-\frac{x}{1-t}}}{(1-t)^{a+1}}.$$

Όμως, για $t = 0$ έχουμε: $\psi(x,0) = L_0^a(x) = 1 \Rightarrow 1 = A(x)e^{-x} \Rightarrow A(x) = e^x$, επομένως:

$$\psi(x,t) = \frac{e^x e^{-\frac{x}{1-t}}}{(1-t)^{a+1}} \Rightarrow \psi(x,t) = \frac{e^{-\frac{xt}{1-t}}}{(1-t)^{a+1}}.$$

Βιβλιογραφία

Μασσαλάς Χ. (2010) *Ειδικές Συναρτήσεις*, Cutenberg.

Σιαφαρίκας Π. (2009) *Ειδικές Συναρτήσεις*, Εκδόσεις Πανεπιστημίου Πατρών.

Hochstadt H. (1986) *The function of Mathematical Physics*, Dover Publications, Inc. N.Y..

Lebedev N.N. (1972) *Special functions and their Applications*, Dover Publications.

Luke Y. L. (1969) *The special functions and their Approximations-Volume I*, Academic Press.

Chihara T. S. (1978) *An introduction to ortogonal polynomials*, Gordon and Breach Science Publications, N.Y..

Szegö G. (1939) *Orthogonal polynomials*, Amer. Math. Soc., vol. XXIII.