Τίτλος Μαθήματος: Ειδικές Συναρτήσεις

Ενότητα: Περί Ορθογωνίων Πολυωνύμων

Όνομα Καθηγήτριας: Χρυσή Κοκολογιαννάκη

Τμήμα: Μαθηματικών

Άδειες Χρήσης

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Πατρών**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Ενότητα 10

13 Συνθήκες ορθογωνιότητας πολυωνύμων και τριών όρων αναδρομική σχέση

Θεωρούμε το σύνολο P των πολυωνύμων μιας μεταβλητής x, με πραγματικούς συντελεστές, όπου $x \in (a, \beta) \subset \mathbb{R}$. (Το a μπορεί να είναι το $-\infty$ και το β μπορεί να είναι το ∞). Το σύνολο αυτό εφοδιασμένο με τη συνήθη πρόσθεση και τον πολλαπλασιαμό πολυωνύμων αποτελεί ένα διανυσματικό χώρο στο σώμα $\mathbb{R}$.

Ορισμός 13.1 Συνάρτηση βάρους λέγεται μια συνάρτηση $w(x)$, $w : (a, \beta) \to [0, \infty)$, με την ιδιότητα: τα ολοκληρώματα

$$\int_a^\beta w(x)x^n dx = \mu_n, \quad n = 0, 1, 2, \ldots, \ \mu_0 > 0, \tag{13.1}$$

να υπάρχουν και να είναι πεπερασμένα. Οι αριθμοί μ_n λέγονται ροπές της συνάρτησης $w(x)$.

Ο διανυσματικός χώρος των πολυωνύμων P, που ορίσαμε πιο πάνω, εφοδιασμένος με το εσωτερικό γινόμενο:

$$\big(p(x), q(x)\big) = \int_a^\beta p(x)q(x)w(x)dx, \quad p(x), q(x) \in P, \tag{13.2}$$

αποτελεί χώρο εσωτερικού γινομένου και norm (στάθμη) του $P(x)$ ονομάζεται ο αριθμός:

$$\|p(x)\| = \sqrt{\big(p(x), p(x)\big)}. \tag{13.3}$$

Ορισμός 13.2 Τα πολυώνυμα $p(x), q(x) \in P$ λέγονται ορθογώνια, ως προς τη συνάρτηση βάρους $w(x)$ αν $\big(p(x), q(x)\big) = 0$, και ορθοκανονικά αν $\|p(x)\| = 1$.

Μπορούμε να κατασκευάσουμε μια ακολουθία ορθογωνίων πολυωνύμων (Ο.Π.) χρησιμοποιώντας τη μέθοδο Gram-Schmidt:

Θεωρούμε ένα γραμμικώς ανεξάρτητο σύνολο πολυωνύμων: $1, x, x^2, \ldots, x^n, \ldots$.

Έστω $\{\phi_n(x)\}_{n=0}^\infty$ η ακολουθία των Ο.Π. που θέλουμε να κατασκευάσουμε, στο διάστημα (a, β), ως προς τη συνάρτηση βάρους $w(x)$.

Θέτουμε $\phi_0(x) = \dfrac{1}{\|1\|}$, $\phi_1(x) = \dfrac{x - (x, \phi_0(x))\phi_0(x)}{\|x - (x, \phi_0(x))\phi_0(x)\|}$,

$$\phi_2(x) = \frac{x^2 - [(x^2, \phi_0(x))\phi_0(x) + (x^2, \phi_1(x))\phi_1(x)]}{\|x^2 - [(x^2, \phi_0(x))\phi_0(x) + (x^2, \phi_1(x))\phi_1(x)]\|}, \ldots$$

$$\phi_k(x) = \frac{x^k - \displaystyle\sum_{i=0}^{k-1}(x^k, \phi_i(x))\phi_i(x)}{\left\| x^k - \displaystyle\sum_{i=0}^{k-1}(x^k, \phi_i(x))\phi_i(x) \right\|}, \qquad k = 1, 2, \ldots, n. \tag{13.4}$$

Προφανώς, από την (13.4) προκύπτει ότι το πολυώνυμο $\phi_k(x)$ είναι βαθμού k και ότι $\|\phi_k(x)\| = 1$, $k = 0, 1, 2, \ldots, n$. Επίσης

$$(\phi_1(x), \phi_0(x)) = \frac{(x, \phi_0(x)) - (x, \phi_0(x))(\phi_0(x), \phi_0(x))}{\|x - (x, \phi_0(x))\phi_0(x)\|} = \frac{(x, \phi_0(x)) - (x, \phi_0(x))}{\|x - (x, \phi_0(x))\phi_0(x)\|} = 0.$$

Με επαγωγή δείχνουμε ότι $(\phi_k(x), \phi_m(x)) = 0$, $k \neq m$. Θεωρούμε ότι όλα τα εσωτερικά γινόμενα $(\phi_k(x), \phi_j(x)) = 0$ για $j = 0, 1, \ldots, n-1$ και δείχνουμε ότι $(\phi_k(x), \phi_n(x)) = 0$.

Πρόταση 13.1: Έστω $\{\phi_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ μια ακολουθία Ο.Π. στο (a, β) ως προς τη συνάρτηση βάρους $w(x)$. Κάθε πολυώνυμο $\pi_n(x)$, βαθμού n, μπορεί να γραφεί, με μοναδικό τρόπο, ως γραμμικός συνδυασμόςτων πολυωνύμων $\{\phi_k(x)\}_{k=0}^{n}$. Δηλαδή:

$$\pi_n(x) = \sum_{k=0}^{n} c_k \phi_k(x), \quad \text{όπου} \quad c_k = \frac{\big(\pi_n(x), \phi_k(x)\big)}{\|\phi_k(x)\|^2}, \; k = 0, \ldots, n. \tag{13.5}$$

Απόδειξη. Είναι γνωστό, ότι κάθε πολυώνυμο $\pi_n(x) = a_n x^n + \cdots + a_0$, μπορεί να γραφεί ως γραμμικός συνδυασμός πολυωνύμων $\{\sigma_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ μελών μιας ακολουθίας πολυωνύμων $\sigma_n(x) = \beta_n x^n + \cdots + \beta_0$, $\beta_n \neq 0$. Πράγματι, το πολυώνυμο $\pi_n(x)$ γράφεται:

$$\begin{aligned}
\pi_n(x) &= a_n x^n + \cdots + a_0 = a_n \Big[\frac{\sigma_n(x)}{\beta_n} - \frac{\beta_{n-1}}{\beta_n} x^{n-1} - \cdots - \frac{\beta_0}{\beta_n}\Big] + \cdots + a_0 = \\
&= a_n \frac{\sigma_n(x)}{\beta_n} + \Big(a_{n-1} - \frac{a_n \beta_{n-1}}{\beta_n}\Big) x^{n-1} + \cdots + \Big(a_0 - \frac{a_n \beta_0}{\beta_n}\Big) = \\
&= c_n \sigma_n(x) + \pi_{n-1}(x).
\end{aligned}$$

Συνεχίζοντας την ίδια διαδικασία, καταλήγουμε:

$$\pi_n(x) = c_n \sigma_n(x) + c_{n-1}\sigma_{n-1}(x) + \cdots + c_0 \sigma_0(x) \Rightarrow$$

$$\pi_n(x) = \sum_{k=0}^{n} c_k \sigma_k(x).$$

Αν η ακολουθία των πολυωνύμων είναι η ακολουθία των Ο.Π. $\{\phi_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$, το πολυώνυμο $\pi_n(x)$ θα γράφεται:

$$\pi_n(x) = \sum_{k=0}^{n} c_k \phi_k(x). \tag{13.6}$$

Οι συντελεστές c_k στην ισότητα (13.6) υπολογίζονται ως εξής: Παίρνουμε το εσωτερικό γινόμενο στην (13.6) με το $\phi_m(x)$,

$$\big(\pi_n(x), \phi_m(x)\big) = \sum_{k=0}^{n} c_k \big(\phi_k(x), \phi_m(x)\big), \quad 0 \leq m \leq n.$$

Λόγω ορθογωνιότητας: $\big(\phi_k(x), \phi_m(x)\big) = 0$ για $k \neq m$. Άρα:

$$\big(\pi_n(x), \phi_k(x)\big) = c_k \big(\phi_k(x), \phi_k(x)\big) \Rightarrow c_k = \frac{\big(\pi_n(x), \phi_k(x)\big)}{\|\phi_k(x)\|^2}, \quad k = 0, 1, \ldots, n.$$

$\square$

Πρόταση 13.2: Η οικογένεια των πολυωνύμων $\{\phi_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ είναι ορθογώνια στο (a, β) ως προς τη συνάρτηση βάρους $w(x)$, αν και μόνο αν

$$\big(\phi_n(x), x^k\big) = 0, \quad k = 0, 1, \dots, n-1. \tag{13.7}$$

Απόδειξη. Έστω ότι η οικογένεια των πολυωνύμων $\{\phi_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ είναι ορθογώνια στο (a, β) ως προς τη συνάρτηση βάρους $w(x)$. Τότε ισχύει:

$$\big(\phi_n(x), \phi_m(x)\big) = 0, \quad n \neq m. \tag{13.8}$$

Χρησιμοποιώντας την ισότητα (13.6) για το πολυώνυμο x^k, θα έχουμε:

$$x^k = \sum_{m=0}^{k} c_m \phi_m(x). \tag{13.9}$$

Για $k < n$, παίρνουμε στην (13.9) το εσωτερικό γινόμενο με $\phi_n(x)$:

$$\big(x^k, \phi_n(x)\big) = \sum_{m=0}^{k} c_m \big(\phi_m(x), \phi_n(x)\big). \tag{13.10}$$

Αφού $m < k$ και $k < n$ τότε $m < n$, δηλαδή $m \neq n$, οπότε λόγω της (13.8), η (13.10) δίνει την ισότητα (13.7).

Έστω ότι ισχύει η ισότητα (13.7). Χρησιμοποιώντας την ισότητα (13.5) για το πολυώνυμο $\phi_m(x)$ και $\sigma_k(x) = x^k$:

$$\phi_m(x) = \sum_{k=0}^{m} c_k x^k. \tag{13.11}$$

Παίρνουμε το εσωτερικό γινόμενο στην (13.11) με $\phi_n(x)$ και έστω $m < n$, οπότε:

$$\big(\phi_m(x), \phi_n(x)\big) = \sum_{k=0}^{m} c_k \big(x^k, \phi_n(x)\big). \tag{13.12}$$

Αφού $k < m$ και $m < n$ τότε $k < n$, οπότε απ' την (13.12), λόγω της (13.7), έχουμε $\big(\phi_m(x), \phi_n(x)\big) = 0$, για $m < n$. Εργαζόμενοι ομοίως, θέτοντας όπου m το n, τότε παίρνουμε πάλι $\big(\phi_n(x), \phi_m(x)\big) = 0$ για $n < m$, και απο αυτές τις δύο ισότητες πάιρνουμε την (13.8). $\square$

Σημείωση 13.1: Είναι προφανές ότι η ισότητα (13.7) ισχύει και για οποιοδήποτε πολυώνυμο $\pi_k(x)$ βαθμού $k < n$, δηλαδή $\big(\phi_n(x), \pi_k(x)\big) = 0$, $k < n$, διότι το πολυώνυμο $\pi_k(x)$ γράφεται: $\pi_k(x) = \sum_{i=0}^{k} a_i x^i$ και η ισότητα (13.7) ισχύει για κάθε $0 \leq i \leq k < n$.

Θεώρημα 13.1: Κάθε οικογένεια Ο.Π. $\{\phi_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ στο (a, β) ως προς τη συνάρτηση βάρους $w(x)$, ικανοποιεί μια τριών όρων αναδρομική σχέση της μορφής:

$$x\phi_n(x) = a_n \phi_{n+1}(x) + \beta_n \phi_n(x) + \gamma_n \phi_{n-1}(x), \quad n = 0, 1, 2, \dots \tag{13.13}$$

με $a_n \neq 0$, $\gamma \neq 0$ και $\phi_{-1}(x) = 0$.

Απόδειξη. Το πολυώνυμο $x\phi_n(x)$ είναι βαθμού $n+1$, επομένως μπορούμε να το εκφράσουμε σαν γραμμικό συνδυασμό των Ο.Π. $\{\phi_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$, χρησιμοποιώντας την Πρόταση 13.1. Δηλαδή

$$x\phi_n(x) = \sum_{k=0}^{n+1} c_k\phi_k(x), \quad c_{n+1} \neq 0, \tag{13.14}$$

με

$$c_k = \frac{\big(x\phi_n(x), \phi_k(x)\big)}{\|\phi_k(x)\|^2}. \tag{13.15}$$

Από τον ορισμό (13.2) του εσωτερικού γινομένου:

$$\big(x\phi_n(x), \phi_k(x)\big) = \big(\phi_n(x), x\phi_k(x)\big). \tag{13.16}$$

Αν $k+1 < n$ από την Πρόταση 13.2, $\big(\phi_n(x), x\phi_k(x)\big) = 0$ και λόγω της (13.16) θα είναι $\big(x\phi_n(x), \phi_k(x)\big) = 0$, οπότε από την (13.15) προκύπτει ότι: $c_k = 0$ για $k+1 < n$ ή $k < n-1$. Η ισότητα (13.14) τότε γίνεται:

$$x\phi_n(x) = c_{n-1}\phi_{n-1}(x) + c_n\phi_n(x) + c_{n+1}\phi_{n+1}(x), \text{ με } c_{n+1} \neq 0.$$

Θέτοντας $c_{n+1} = a_n \neq 0$, $c_n = \beta_n$ και $c_{n-1} = \gamma_n$, προκύπτει η ισότητα (13.13). Παρατηρούμε, δε, ότι επειδή από την (13.15): $a_n = \dfrac{\big(x\phi_n(x), \phi_{n+1}(x)\big)}{\|\phi_{n+1}(x)\|^2}$ και $\gamma_n = \dfrac{\big(x\phi_n(x), \phi_{n-1}(x)\big)}{\|\phi_{n-1}(x)\|^2}$, οι συντελεστές της αναδρομικής σχέσης γ_n και a_n συνδέονται μέσω της ισότητας:

$$\gamma_n = \frac{a_{n-1}\|\phi_n(x)\|^2}{\|\phi_{n-1}(x)\|^2}, \tag{13.17}$$

οπότε αφού $a_n \neq 0$ τότε και $\gamma_n \neq 0$. □

Σημείωση 13.2: Αν η οικογένεια των Ο.Π. $\{\phi_n(x)\}$ είναι ορθοκανονική, δηλαδή $\|\phi_n(x)\| = 1$ τότε η αναδρομική σχέση τριών όρων (13.13) παίρνει, λόγω της (13.17), τη μορφή:

$$x\phi_n(x) = a_n\phi_{n+1}(x) + \beta_n\phi_n(x) + a_{n-1}\phi_{n-1}(x), \quad n = 0, 1, \ldots, \ a_n \neq 0, \ \phi_{-1}(x) = 0 \tag{13.18}$$

Άρα, δοθείσης της αναδρομικής σχέσης (13.13) μπορούμε να βρούμε σταθερά κανονικοποίησης λ_n, τέτοια ώστε η οικογένεια $\{\lambda_n\phi_n(x)\}_{n=0}^{\infty} = \{y_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$, να είναι ορθοκανονική, δηλαδή να ικανοποιεί την (13.18). Πράγματι, η (13.13) γίνεται:

$$\begin{aligned} x\frac{y_n(x)}{\lambda_n} &= a_n\frac{y_{n+1}(x)}{\lambda_{n+1}} + \beta_n\frac{y_n(x)}{\lambda_n} + \gamma_n\frac{y_{n-1}(x)}{\lambda_{n-1}} \Rightarrow \\ xy_n(x) &= a_n\frac{\lambda_n}{\lambda_{n+1}}y_{n+1}(x) + \beta_n y_n(x) + \gamma_n\frac{\lambda_n}{\lambda_{n-1}}y_{n-1}(x). \end{aligned}$$

Αφού η $\{y_n(x)\}$ είναι ορθοκανονική θα πρέπει:

$$a_{n-1}\frac{\lambda_{n-1}}{\lambda_n} = \gamma_n\frac{\lambda_n}{\lambda_{n-1}} \Rightarrow a_{n-1}\lambda_{n-1}^2 = \gamma_n\lambda_n^2 \Rightarrow \lambda_n^2 = \frac{a_{n-1}}{\gamma_n}\lambda_{n-1}^2. \tag{13.19}$$

Εφαρμόζοντας αναδρομικά την (13.19) για $n-1, n-2, \ldots$, καταλήγουμε σε μια σχέση της μορφής: $\lambda_n^2 = \dfrac{a_{n-1}}{\gamma_n}\dfrac{a_{n-2}}{\gamma_{n-1}}\ldots\dfrac{a_0}{\gamma_0}\lambda_0^2$, απ' όπου υπολογίζουμε το λ_n, λαμβάνοντας υπ' όψιν μας ότι: $\|y_n(x)\|^2 = 1 \Rightarrow \|\lambda_n\phi_n(x)\|^2 = 1 \Rightarrow \lambda_n^2\|\phi_n(x)\|^2 = 1$, $n = 0, 1, 2, \ldots$. Άρα: $\lambda_0^2 = \dfrac{1}{\|\phi_0(x)\|^2}$.

Σημείωση 13.3: Το αντίστροφο του Θεωρήματος 13.1 είναι το λεγόμενο θεώρημα του Favard:
Κάθε ακολουθία πολυωνύμων $\{\phi_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ που ικανοποιεί μια αναδρομική σχέση της μορφής (13.13) είναι ορθογώνια ως προς μια συνάρτηση κατανομής $\mu(x)$, (αν θεωρήσουμε αντί για το ολοκλήρωμα Riemann το ολοκλήρωμα ως προς ένα μέτρο Lebesgue-Stieltjes), με διάστημα ολοκλήρωσης το ελάχιστο $[a, \beta]$ που περιέχει το στήριγμα του μ. Όμως δεν υπάρχει γενική μέθοδος για την εύρεση της $\mu(x)$ και του αντίστοιχου διαστήματος $[a, \beta]$.

14 Ρίζες ορθογωνίων πολυωνύμων

Θεώρημα 14.1: (τύπος Darboux-Christoffel) Έστω $\{\phi_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ μια ακολουθία Ο.Π. στο (a, β) ως προς τη συνάρτηση βάρους $w(x)$, και $K_n(x, y) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{\phi_k(x)\phi_k(y)}{\|\phi_k(x)\|^2}$.
Να δειχθεί ότι

$$(i)\ K_n(x, y) = \frac{a_n}{\|\phi_n(x)\|^2}\frac{[\phi_n(y)\phi_{n+1}(x) - \phi_n(x)\phi_{n+1}(y)]}{x - y} \tag{14.1}$$

και

$$(ii)\ K_n(x, x) = \frac{a_n}{\|\phi_n(x)\|^2}[\phi_n(x)\phi'_{n+1}(x) - \phi'_n(x)\phi_{n+1}(x)]. \tag{14.2}$$

Απόδειξη. (i) Εφ' όσον η ακολουθία $\{\phi_n(x)\}$ είναι ορθογώνια, θα ισχύει η τριών όρων αναδρομική σχέση (13.13), την οποία γράφουμε για x και y, δηλαδή:

$$x\phi_k(x) = a_k\phi_{k+1}(x) + \beta_k\phi_k(x) + \gamma_k\phi_{k-1}(x) \tag{14.3}$$

και

$$y\phi_k(y) = a_k\phi_{k+1}(y) + \beta_k\phi_k(y) + \gamma_k\phi_{k-1}(y). \tag{14.4}$$

Πολλαπλασιάζουμε την (14.3) με $\phi_k(y)$, την (14.4) με $\phi_k(x)$ και αφαιρούμε κατά μέλη, οπότε:

$$\begin{aligned} x\phi_k(x)\phi_k(y) &= a_k\phi_{k+1}(x)\phi_k(y) + \beta_k\phi_k(x)\phi_k(y) + \gamma_k\phi_{k-1}(x)\phi_k(y) \\ y\phi_k(y)\phi_k(x) &= a_k\phi_{k+1}(y)\phi_k(x) + \beta_k\phi_k(y)\phi_k(x) + \gamma_k\phi_{k-1}(y)\phi_k(x) \\ (x-y)\phi_k(x)\phi_k(y) &= a_k[\phi_{k+1}(x)\phi_k(y) - \phi_{k+1}(y)\phi_k(x)] + \gamma_k[\phi_{k-1}(x)\phi_k(y) - \phi_{k-1}(y)\phi_k(x)]. \end{aligned}$$

και χρησιμοποιώντας την (13.17) καταλήγουμε:

$$(x-y)\phi_k(x)\phi_k(y) = a_k[\phi_{k+1}(x)\phi_k(y) - \phi_{k+1}(y)\phi_k(x)] + \frac{a_{k-1}\|\phi_k(x)\|^2}{\|\phi_{k-1}(x)\|^2}\big[\phi_{k-1}(x)\phi_k(y) - \phi_{k-1}(y)\phi_k(x)\big] \Rightarrow$$

$$\frac{\phi_k(x)\phi_k(y)}{\|\phi_k(x)\|^2} = \frac{1}{x-y}\Bigg[\frac{a_k}{\|\phi_k(x)\|^2}\big[\phi_{k+1}(x)\phi_k(y) - \phi_{k+1}(y)\phi_k(x)\big] + \frac{a_{k-1}}{\|\phi_{k-1}(x)\|^2}\big[\phi_{k-1}(x)\phi_k(y) - \phi_{k-1}(y)\phi_k(x)\big]\Bigg]. \tag{14.5}$$

Θέτουμε

$$\frac{a_k}{\|\phi_k(x)\|^2}\big[\phi_{k+1}(x)\phi_k(y) - \phi_{k+1}(y)\phi_k(x)\big] = A_{k+1}(x,y), \tag{14.6}$$

οπότε αθροίζοντας ως προς k από 0 έως n, η (14.5), λόγω της (14.6), δίνει την ισότητα:

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{\phi_k(x)\phi_k(y)}{\|\phi_k(x)\|^2} = \frac{1}{x-y}\sum_{k=0}^{n}[A_{k+1}(x,y) - A_k(x,y)] = \frac{1}{x-y}\big[A_{n+1}(x,y) - A_0(x,y)\big] = \frac{A_{n+1}(x,y)}{x-y},$$

διότι $A_0(x,y)=0$, αφού $\phi_{-1}(x) = 0 = \phi_{-1}(y)$.

Άρα: $K_n(x,y) = \dfrac{a_n}{\|\phi_n(x)\|^2}\dfrac{[\phi_n(y)\phi_{n+1}(x) - \phi_n(x)\phi_{n+1}(y)]}{x-y}$, που είναι η αποδεικτέα.

(ii) Η ισότητα (14.2) αποδεικνύεται από την (14.1) παίρνοντας το όριο του $y \to x$ και εφαρμόζοντας τον κανόνα του L' Hopitâl. Πράγματι:

$$\begin{aligned} K_n(x,x) &= \frac{a_n}{\|\phi_n(x)\|^2}\lim_{y\to x}\frac{[\phi_n'(y)\phi_{n+1}(x) - \phi_n(x)\phi_{n+1}'(y)]}{(-1)} \\ &= \frac{a_n}{\|\phi_n(x)\|^2}[\phi_n(x)\phi_{n+1}'(x) - \phi_n'(x)\phi_{n+1}(x)]. \end{aligned}$$

□

Θεώρημα 14.2: Όλες οι ρίζες x_j των Ο.Π. $\{\phi_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$, στο διάστημα (a,β) ως προς τη συνάρτηση βάρους $w(x)$, είναι πραγματικές, απλές και βρίσκονται μέσα στο διάστημα (a,β).

Απόδειξη. Έστω ότι το πολυώνυμο $\phi_n(x)$ έχει μια ρίζα μιγαδική $x = x_1 + \mathrm{i}x_2$, τότε θα γράφεται: $\phi_n(x) = (x - x_1 - \mathrm{i}x_2)q_{n-1}(x)$, όπου $q_{n-1}(x)$ μη μηδενικό πολυώνυμο του x βαθμού $n-1$. Παίρνουμε το εσωτερικό γινόμενο της ισότητας με $q_{n-1}(x)$, τότε: $\big(\phi_n(x), q_{n-1}(x)\big) = \big((x-x_1-\mathrm{i}x_2)q_{n-1}(x), q_{n-1}(x)\big)$, όμως λόγω της ορθογωνιότητας των πολυωνύμων $\phi_n(x)$, $\big(\phi_n(x), q_{n-1}(x)\big) = 0$, οπότε:

$$\begin{aligned} &\big((x-x_1-\mathrm{i}x_2)q_{n-1}(x), q_{n-1}(x)\big) = 0 \Rightarrow \\ &\big((x-x_1)q_{n-1}(x), q_{n-1}(x)\big) - \mathrm{i}x_2\big(q_{n-1}(x), q_{n-1}(x)\big) = 0. \end{aligned} \tag{14.7}$$

Απ' την (14.7) προκύπτει ότι: $x_2 = 0$, αφού $q_{n-1}(x) \neq 0$, δηλαδή η ρίζα είναι πραγματική και $\big((x-x_1)q_{n-1}(x), q_{n-1}(x)\big) = 0 \Rightarrow \displaystyle\int_a^\beta (x-x_1)q_{n-1}^2(x)w(x)dx = 0$. Δηλαδή

$a < x < \beta \Rightarrow x \in (a, \beta)$.
Αν η ρίζα x_1 είναι διπλή, τότε το πολυώνυμο $\phi_n(x)$ θα γράφεται:

$\phi_n(x) = (x - x_1)^2 q_{n-2}(x)$, όπου $q_{n-2}(x)$ μη μηδενικό πολυώνυμο βαθμού $n-2$. Οπότε παίρνοντας το εσωτερικό γινόμενο της ισότητας με $q_{n-2}(x)$, έχουμε:

$\big(\phi_n(x), q_{n-2}(x)\big) = \big((x - x_1)^2 q_{n-2}(x), q_{n-2}(x)\big)$ και λόγω της ορθογωνιότητας των πολυωνύμων $\phi_n(x)$: $\big((x - x_1)^2 q_{n-2}(x), q_{n-2}(x)\big) = 0$, άτοπο, διότι το εσωτερικό γινόμενο είναι: $\displaystyle\int_a^\beta (x - x_1)^2 q_{n-2}^2(x) w(x) dx$, που είναι διάφορο από το μηδέν. □

Πρόταση 14.1: Οι ρίζες των Ο.Π. $\phi_n(x)$ και $\phi_{n+1}(x)$ εναλλάσονται στο διάστημα (a, β).

Απόδειξη. Κατ' αρχήν τα πολυώνυμα $\phi_n(x)$ και $\phi_{n+1}(x)$ δεν μπορεί να έχουν κοινή ρίζα, διότι αν είχαν, έστω την x_j, τότε από την αναδρομική σχέση τριών όρων (13.13) η x_j θα ήταν ρίζα και του $\phi_{n-1}(x)$ και επαναλαμβάνοντας διαδοχικά την αναδρομική σχέση για $n-1, n-2, \ldots$, θα καταλήγαμε ότι η x_j είναι ρίζα των $\phi_i(x)$, $i = 1, \ldots, n-1$ και του $\phi_0(x)$, πράγμα άτοπο, διότι το $\phi_0(x)$ είναι μια σταθερά μη μηδενική. Έστω τώρα ότι x_j, x_{j+1} είναι δύο διαδοχικές ρίζες του πολυωνύμου $\phi_{n+1}(x)$. Τότε από τον τύπο (14.2) έχουμε για $x = x_j$ και $x = x_{j+1}$: $K_n(x_j, x_j) = \dfrac{a_n}{\|\phi_n(x_j)\|^2}[\phi_n(x_j)\phi'_{n+1}(x_j)] \geq 0$ και $K_n(x_{j+1}, x_{j+1}) = \dfrac{a_n}{\|\phi_n(x_{j+1})\|^2}[\phi_n(x_{j+1})\phi'_{n+1}(x_{j+1})] \geq 0$. Εφ' όσον οι x_j, x_{j+1} είναι διαδοχικές ρίζες του $\phi_{n+1}(x)$, οι συναρτήσεις $\phi'_{n+1}(x_j)$ και $\phi'_{n+1}(x_{j+1})$ έχουν αντίθετα πρόσημα, άρα και οι συνεχείς συναρτήσεις $\phi_n(x_j)$ και $\phi_n(x_{j+1})$ έχουν αντίθετα πρόσημα, άρα η $\phi_n(x)$ μηδενίζεται τουλάχιστον μια φορά στο διάστημα $[x_j, x_{j+1}]$. Όμοια αποδεικνύεται ότι και η $\phi_{n+1}(x)$ μηδενίζεται τουλάχιστον μια φορά μεταξύ δύο διαδοχικών ριζών της $\phi_n(x)$, οπότε έπεται ότι μεταξύ δύο ριζών του $\phi_{n+1}(x)$ υπάρχει ακριβώς μία ρίζα του $\phi_n(x)$. □

Σημείωση 14.1: Αν εφαρμόσουμε την αναδρομική σχέση (13.13) για $n = 0, 1, \ldots, N-1$, τότε παίρνουμε:

$$\begin{aligned}
x\phi_0(x) &= a_0\phi_1(x) + \beta_0\phi_0(x) \\
x\phi_1(x) &= a_1\phi_2(x) + \beta_1\phi_1(x) + \gamma_1\phi_0(x) \\
x\phi_2(x) &= a_2\phi_3(x) + \beta_2\phi_2(x) + \gamma_2\phi_1(x) \\
&\vdots \\
x\phi_{N-1}(x) &= a_{N-1}\phi_N(x) + \beta_{N-1}\phi_{N-1}(x) + \gamma_{N-1}\phi_{N-2}(x).
\end{aligned}$$

Αν θέσουμε $\Phi(x) = \begin{bmatrix} \phi_0(x) \\ \phi_1(x) \\ \vdots \\ \phi_{N-1}(x) \end{bmatrix}$, $J = \begin{bmatrix} \beta_0 & a_0 & & & \\ \gamma_1 & \beta_1 & a_1 & & \\ & \gamma_2 & \beta_2 & a_2 & \\ & & & \ddots & \\ & & & \gamma_{N-2} & \beta_{N-1} \end{bmatrix}$,

$F(x) = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ a_{N-1}\phi_N(x) \end{bmatrix}$, τότε οι ανωτέρω σχέσεις μπορούν να γραφούν ως εξής:

$$x\Phi(x) = J\Phi(x) + F(x). \tag{14.8}$$

Αν x_i είναι ρίζες του $\phi_N(x)$, δηλαδή $\phi_N(x_i) = 0$, τότε $F(x_i) = 0$ και η (14.8) μας δίνει: $x_i\Phi(x_i) = J\Phi(x_i)$, δηλαδή οι x_i είναι ιδιοτιμές του τριδιαγώνιου πίνακα J (άρα πραγματικές) με αντίστοιχο ιδιοστοιχείο το $\Phi(x_i) = \begin{bmatrix} \phi_0(x_i) \\ \vdots \\ \phi_{N-1}(x_i) \end{bmatrix}$.

Αντίστροφα, αν $x_i\Phi(x_i) = J\Phi(x_i)$, τότε η (14.8) μας οδηγεί στο συμπέρασμα ότι $F(x_i) = 0 \Rightarrow \phi_N(x_i) = 0$, δηλαδή οι ιδιοτιμές του πίνακα J είναι ρίζες του πολυωνύμου $\phi_N(x)$.

15 Τύπος Rodrigues για τα Ο.Π.

Θεώρημα 15.1: Έστω $G(x)$ μια συνεχής συνάρτηση για $x \in (a, \beta)$, η οποία είναι $2n+1$ φορές παραγωγίσιμη και ικανοποιεί τις συνοριακές συνθήκες

$$\begin{aligned} G(a) &= G'(a) = \cdots = G^{(n-1)}(a) = 0 \\ G(\beta) &= G'(\beta) = \cdots = G^{(n-1)}(\beta) = 0. \end{aligned} \tag{15.1}$$

Επίσης, η $\rho(x)$ είναι μια απείρως διαφορίσιμη συνάρτηση βάρους στο διάστημα (a, β). Τότε τα πολυώνυμα

$$\phi_n(x) = \frac{c_n}{\rho(x)} \frac{d^n G(x)}{dx^n}, \quad c_n = \text{σταθερά} \tag{15.2}$$

σχηματίζουν μια ακολουθία Ο.Π. ως προς τη συνάρτηση βάρους $\rho(x)$ στο διάστημα (a, β). Ο δε τύπος (15.2) λέγεται τύπος του Rodrigues για τα Ο.Π..

Απόδειξη. Για να δείξουμε ότι τα $\phi_n(x)$, όπως ορίζονται από την (15.2), σχηματίζουν μια οικογένεια Ο.Π., θα χρησιμοποιήσουμε τον ισοδύναμο ορισμό της ορθογωνιότητας. Οπότε, αρκεί να δείξουμε ότι $\int_a^\beta \rho(x)\phi_n(x)x^m dx = 0$, $m \le n-1$.

Αντικαθιστούμε στο ολοκλήρωμα το $\phi_n(x)$ από την (15.1) και εφαρμόζουμε την κατά παράγοντες ολοκλήρωση:

$$\begin{aligned}\int_a^\beta \rho(x)\phi_n(x)x^m dx &= c_n\int_a^\beta x^m\frac{d^n}{dx^n}[G(x)]dx = c_n\frac{d^{n-1}G(x)}{dx^{n-1}}x^m\Big|_{x=a}^\beta - c_n\int_a^\beta mx^{m-1}\frac{d^{n-1}G(x)}{dx^{n-1}}dx\\ &\overset{(15.1)}{=} -c_n m\int_a^\beta x^{m-1}\frac{d^{n-1}G(x)}{dx^{n-1}}dx\\ &= -c_n m\frac{d^{n-2}G(x)}{dx^{n-2}}x^{m-1}\Big|_{x=a}^\beta + c_n m(m-1)\int_a^\beta x^{m-2}\frac{d^{n-2}G(x)}{dx^{n-2}}dx\\ &\overset{(15.1)}{=} c_n m(m-1)\int_a^\beta x^{m-2}\frac{d^{n-2}G(x)}{dx^{n-2}}dx = \dots\\ &= c_n(-1)^n m! G(x)\Big|_{x=a}^\beta \overset{(15.1)}{=} 0,\end{aligned}$$

πράγμα που θέλαμε να δείξουμε. □

Σημείωση 15.1: 1) Έστω $f(x)$ μια συνεχής συνάρτηση για $x \in (a,\beta)$ με συνεχείς μερικές παραγώγους έως τουλάχιστον τάξης n και $\phi_n(x)$ μια οικογένεια Ο.Π. στο διάστημα (a,β) ως προς τη συνάρτηση βάρους $\rho(x)$. Αν $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\phi_n(x)$, τότε για να υπολογίσουμε τους συντελεστές a_n, χρησιμοποιώντας ανάλογη ισότητα με την (13.5), θα πρέπει να υπολογίσουμε το εσωτερικό γινόμενο $\big(f(x),\phi_n(x)\big)$. Έτσι:

$$\begin{aligned}\big(f(x),\phi_n(x)\big) &= \int_a^\beta \rho(x)f(x)\phi_n(x)dx \overset{(15.2)}{=} c_n\int_a^\beta f(x)\frac{d^n}{dx^n}[G(x)]dx\\ &= c_n f(x)\frac{d^{n-1}G(x)}{dx^{n-1}}\Big|_{x=a}^\beta - c_n\int_a^\beta f'(x)\frac{d^{n-1}G(x)}{dx^{n-1}}dx\\ &\overset{(15.1)}{=} -c_n f'(x)\frac{d^{n-2}G(x)}{dx^{n-2}}\Big|_{x=a}^\beta + c_n\int_a^\beta f''(x)\frac{d^{n-2}G(x)}{dx^{n-2}}dx = \dots\\ &= (-1)^n c_n\int_a^\beta f^{(n)}(x)G(x)dx. \qquad (15.3)\end{aligned}$$

Άρα δοθείσης της συνάρτησης $G(x)$, γνωρίζουμε το $\big(f(x),\phi_n(x)\big)$, επομένως απ' τον τύπο (13.5) και τους συντελεστές a_n.

2) Αν $f(x) = \phi_m(x)$, $m < n$, τότε απ' την (15.3) προκύπτει:
$\big(\phi_m(x),\phi_n(x)\big) = (-1)^n\int_a^\beta \phi_m^{(n)}(x)G(x)dx = 0$. Ομοίως, εναλλάσσοντας τη θέση των m και n, για $n < m$: $\big(\phi_n(x),\phi_m(x)\big) = (-1)^m\int_a^\beta \phi_n^{(m)}(x)G(x)dx = 0$. Άρα αποδεικνύεται η ορθογωνιότητα των $\phi_n(x)$.

Αν $f(x) = \phi_n(x)$ τότε: $d_n^2 = \|\phi_n(x)\|^2 = \big(\phi_n(x),\phi_n(x)\big) = (-1)^n c_n\int_a^\beta \phi_n^{(n)}(x)G(x)dx$.

16 Γεννήτριες συναρτήσεις Ο.Π.

Η γεννήτρια συνάρτηση των Ο.Π. είναι μια συνάρτηση δύο μεταβλητών $\Phi(x,t)$, η οποία μπορεί να αναπτυχθεί σε δυναμοσειρά ως προς t, για $|t|$ αρκετά μικρό και οι συντελεστές της σειράς είναι η ακολουθία των Ο.Π.. Δηλαδή:

$$\Phi(x,t)=\sum_{n=0}^{\infty}\phi_n(x)t^n. \tag{16.1}$$

Η γεννήτρια συνάρτηση μιας ακολουθίας Ο.Π. μπορεί να βρεθεί με διάφορους τρόπους. Ένας, εξ αυτών, είναι η χρησιμοποίηση της αναδρομικής σχέσης τριών όρων, που ικανοποιούν τα Ο.Π., με την παρακάτω διαδικασία:
Πολλαπλασιάζουμε και τα δύο μέλη της αναδρομικής σχέσης με t^n και αθροίζουμε ως προς n, κάθε όρο, για n από το μηδέν έως το άπειρο. Αλλάζοντας την αρίθμηση στα αθροίσματα, δημιουργούμε την $\Phi(x,t)$ χρησιμοποιώντας την (16.1), και την μερική παράγωγο αυτής

$$\frac{\partial\Phi(x,t)}{\partial t}=\sum_{n=0}^{\infty}n\phi_n(x)t^{n-1} \tag{16.2}$$

και καταλήγουμε σε μία Μ.Δ.Ε. $1^{ης}$ τάξης ως προς $\Phi(x,t)$, την οποία λύνουμε χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι: $\phi_0(x)=1$, υπολογίζουμε τη γεννήτρια συνάρτηση $\Phi(x,t)$. Επίσης, από τη γεννήτρια συνάρτηση των Ο.Π. μπορούμε να βρούμε την τριών όρων αναδρομική σχέση, την οποία ικανοποιούν τα Ο.Π., καθώς, επίσης, και αναδρομικές σχέσεις που συνδέουν την παράγωγο ως προς x Ο.Π. με τα ίδια ή και με μεγαλύτερου ή μικρότερου βαθμού Ο.Π. ίδιας οικογένειας. Για την πρώτη περίπτωση, την εύρεση της αναδρομικής σχέσης τριών όρων, παραγωγίζουμε τη γεννήτρια συνάρτηση ως προς t και δημιουργούμε ισότητα αθροισμάτων. Αλλάζουμε την αρίθμηση για να δημιουργήσουμε σε όλα τα αθροίσματα t^n και εξισώνουμε τους συντελεστές. Για τη δεύτερη περίπτωση, παραγωγίζουμε τη γεννήτρια συνάρτηση ως προς x, και ακολουθούμε ίδια διαδικασία, όπως προηγούμενα.

Βιβλιογραφία

Μασσαλάς Χ. (2010) *Ειδικές Συναρτήσεις*, Cutenberg.

Σιαφαρίκας Π. (2009) *Ειδικές Συναρτήσεις*, Εκδόσεις Πανεπιστημίου Πατρών.

Hochstadt H. (1986) *The function of Mathematical Physics*, Dover Publications, Inc. N.Y..

Lebedev N.N. (1972) *Special functions and their Applications*, Dover Publications.

Luke Y. L. (1969) *The special functions and their Approximations-Volume I*, Academic Press.

Chihara T. S. (1978) *An introduction to ortogonal polynomials*, Gordon and Breach Science Publications, N.Y..

Szegö G. (1939) *Orthogonal polynomials*, Amer. Math. Soc., vol. XXIII.

Ενότητα 11

17 Εφαρμογές

17.1 Πολυώνυμα Legendre

Άσκηση 1. Δοθέντος ότι ο τύπος του Rodrigues για τα πολυώνυμα Legendre είναι

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n \tag{17.1}$$

να δειχθεί ότι:

$$\textbf{i)}\ \int_{-1}^{1} f(x)P_n(x)dx = \frac{(-1)^n}{2^n n!}\int_{-1}^{1}(x^2-1)^n f^{(n)}(x)dx, \tag{17.2}$$

όπου $f(x)$ είναι μια συνεχής συνάρτηση τέτοια ώστε και οι παράγωγοί της μέχρι n τάξη να είναι συνεχείς στο $[-1,1]$ και

$$\textbf{ii)}\ d_n^2 = \int_{-1}^{1} P_n^2(x)dx = \frac{2}{2n+1}. \tag{17.3}$$

Λύση: **i**) Έχουμε:

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{1} f(x)P_n(x)dx &= \int_{-1}^{1} f(x)\frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n dx \\
&= \frac{1}{2^n n!}\left\{\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}(x^2-1)^n f(x)\Big|_{x=-1}^{1} - \int_{-1}^{1} f'(x)\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}(x^2-1)^n dx\right\} \\
&= -\int_{-1}^{1} f'(x)\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}(x^2-1)^n dx \\
&= -\frac{1}{2^n n!}\left\{\frac{d^{n-2}}{dx^{n-2}}(x^2-1)^n f'(x)\Big|_{x=-1}^{1} - \int_{-1}^{1} f''(x)\frac{d^{n-2}}{dx^{n-2}}(x^2-1)^n dx\right\} \\
&= \frac{(-1)^2}{2^n n!}\int_{-1}^{1} f''(x)\frac{d^{n-2}}{dx^{n-2}}(x^2-1)^n dx = \dots \\
&= \frac{(-1)^n}{2^n n!}\int_{-1}^{1} f^{(n)}(x)(x^2-1)^n dx.
\end{aligned}$$

ii) Θέτουμε στην ισότητα (17.2) $f(x) = P_n(x)$, οπότε:

$$d_n^2 = \int_{-1}^{1} P_n^2(x)dx = \frac{(-1)^n}{2^n n!}\int_{-1}^{1}\frac{d^n}{dx^n}P_n(x)(x^2-1)^n dx. \tag{17.4}$$

Όμως, απ' τον τύπο (17.1) παραγωγίζοντας ως προς x, προκύπτει:

$$\frac{d^n P_n(x)}{dx^n} = \frac{1}{2^n n!}\frac{d^{2n}}{dx^{2n}}(x^2-1)^n = \frac{(2n)!}{2^n n!}. \tag{17.5}$$