Τίτλος Μαθήματος: Ειδικές Συναρτήσεις

Ενότητα: Ανάπτυξη συναρτήσεων σε σειρές Fourier-Bessel

Όνομα Καθηγήτριας: Χρυσή Κοκολογιαννάκη

Τμήμα: Μαθηματικών

Άδειες Χρήσης

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό υπόκειται σε άδειες χρήσης Creative Commons.
- Για εκπαιδευτικό υλικό, όπως εικόνες, που υπόκειται σε άλλου τύπου άδειας χρήσης, η άδεια χρήσης αναφέρεται ρητώς.

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Πατρών**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Ενότητα 9

12 Ανάπτυξη συναρτήσεων σε σειρές Fourier-Bessel

Θεώρημα 12.1: Οι συναρτήσεις $J_\nu(\rho_{\nu n} x)$, όπου $\rho_{\nu n}$, $n = 1, 2, \ldots$ είναι οι θετικές ρίζες της συνάρτησης $J_\nu(x)$ ή της $J'_\nu(x)$, είναι ορθογώνιες για $0 < x < 1$, ως προς τη συνάρτηση βάρους x.

Απόδειξη. Θεωρούμε τα ολοκληρώματα Lommel για $\gamma = 1$, $\alpha = j_{\nu n}$ και $\beta = j_{\nu m}$, όπου $j_{\nu n}$, $j_{\nu m}$, $n, m = 1, 2, \ldots$ είναι θετικές ρίζες της συνάρτησης Bessel $J_\nu(x)$, δηλαδή $J_\nu(j_{\nu n}) = J_\nu(j_{\nu m}) = 0$. Έτσι, αν $n \neq m$, τότε: $j_{\nu n} \neq j_{\nu m}$ και το πρώτο ολοκλήρωμα του Lommel μας δίνει:

$$(j_{\nu n}^2 - j_{\nu m}^2) \int_0^1 x J_\nu(j_{\nu n} x) J_\nu(j_{\nu m} x) dx = j_{\nu n} J'_\nu(j_{\nu n}) J_\nu(j_{\nu m}) - j_{\nu m} J'_\nu(j_{\nu m}) J_\nu(j_{\nu n}).$$

Άρα:

$$\int_0^1 x J_\nu(j_{\nu n} x) J_\nu(j_{\nu m} x) dx = 0. \tag{12.1}$$

Αν $n = m$, τότε: $j_{\nu n} = j_{\nu m}$ και το δεύτερο ολοκλήρωμα του Lommel μας δίνει:

$$2 j_{\nu n}^2 \int_0^1 x J_\nu^2(j_{\nu n} x) dx = j_{\nu n}^2 [J'_\nu(j_{\nu n})]^2 + (j_{\nu n}^2 - \nu^2) J_\nu^2(j_{\nu n})$$

ή

$$\int_0^1 x J_\nu^2(j_{\nu n} x) dx = \frac{[J'_\nu(j_{\nu n})]^2}{2}. \tag{12.2}$$

Από τις ισότητες (12.1) και (12.2) μπορούμε να συμπεράνουμε ότι οι συναρτήσεις $J_\nu(j_{\nu n} x)$, $n = 1, 2, \ldots$ είναι ορθογώνιες για $0 < x < 1$, ως προς τη συνάρτηση βάρους x.
Ομοίως, αν στα ολοκληρώματα του Lommel, θέσουμε $\gamma = 1$, $\alpha = j'_{\nu n}$ και $\beta = j'_{\nu m}$, όπου $j'_{\nu n}$, $j'_{\nu m}$, $n, m = 1, 2, \ldots$ είναι θετικές ρίζες της παραγώγου Bessel $J'_\nu(x)$, δηλαδή $J'_\nu(j_{\nu n}) = J'_\nu(j_{\nu m}) = 0$, τότε προκύπτουν ανάλογα:

$$\int_0^1 x J_\nu(j'_{\nu n} x) J_\nu(j'_{\nu m} x) dx = 0, \quad n \neq m \tag{12.3}$$

και

$$\int_0^1 x J_\nu^2(j'_{\nu n} x) dx = \frac{[(j'_{\nu n})^2 - \nu^2]}{2 (j'_{\nu n})^2} J_\nu^2(j'_{\nu n}). \tag{12.4}$$

Από τις (12.3) και (12.4) συμπεραίνουμε ότι οι συναρτήσεις $J_\nu(j'_{\nu n} x)$, $n = 1, 2, \ldots$ είναι ορθογώνιες για $0 < x < 1$, ως προς τη συνάρτηση βάρους x. □

Αποδεικνύεται ότι οι συναρτήσεις $J_\nu(\rho_{\nu n} x)$, όπου $\rho_{\nu n}$, $n = 1, 2, \ldots$ είναι οι θετικές ρίζες της $J_\nu(x)$ ή $J'_\nu(x)$, αποτελούν πλήρες ορθοκανονικό σύστημα, άρα μπορούμε να αναπτύξουμε μια συνάρτηση $f(x)$ συνεχή (ή κατά τμήματα συνεχή) σε σειρά με όρους τις συναρτήσεις $J_\nu(\rho_{\nu n}x)$, $n = 1, 2, \ldots$, δηλαδή

$$f(x) = \sum_{\kappa=1}^{\infty} a_\kappa J_\nu(\rho_{\nu\kappa}x) \tag{12.5}$$

και η σειρά αυτή ονομάζεται σειρά Fourier-Bessel.

Για να υπολογίσουμε τους συντελεστές a_κ της σειράς εργαζόμαστε ως εξής: πολλαπλασιάζουμε και τα δύο μέλη της (12.5) με $J_\nu(\rho_{\nu n}x)$ και ολοκληρώνουμε όρο προς όρο από $x = 0$ έως 1. Δηλαδή

$$\int_0^1 xf(x)J_\nu(\rho_{\nu n}x)dx = \sum_{\kappa=1}^{\infty} a_\kappa \int_0^1 xJ_\nu(\rho_{\nu\kappa}x)J_\nu(\rho_{\nu n}x)dx. \tag{12.6}$$

Λόγω της ορθογωνιότητας των συναρτήσεων $J_\nu(\rho_{\nu n}x)$, από την (12.6) όλοι οι όροι του δεξιού μέλους αυτής μηδενίζονται εκτός απ' την περίπτωση $\kappa = n$, οπότε έχουμε:

$$\int_0^1 xf(x)J_\nu(\rho_{\nu n}x)dx = a_n \int_0^1 xJ_\nu^2(\rho_{\nu n}x)dx \overset{(12.2)}{\Longrightarrow}$$

$$a_n = \frac{\int_0^1 xf(x)J_\nu(\rho_{\nu n}x)dx}{\int_0^1 xJ_\nu^2(\rho_{\nu n}x)dx}, \quad n \geq 1.$$

Θεώρημα 12.2: Έστω ότι οι συναρτήσεις $f(x)$ και$f'(x)$ είναι συνεχείς ή κατά τμήματα συνεχείς για $x \in (0, 1)$. Τότε η σειρά $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n J_\nu(\rho_{\nu n}x)$, όπου $\rho_{\nu n}$, $n = 1, 2, \ldots$ είναι οι θετικές ρίζες της $J_\nu(x)$ ή $J'_\nu(x)$, συγκλίνει στην $f(x_0)$ αν το x_0 είναι σημείο συνέχειας ή στο $\displaystyle\frac{1}{2}\Big[\lim_{x\to x_0^-} f(x) + \lim_{x\to x_0^+} f(x)\Big]$ αν το x_0 είναι σημείο ασυνέχειας. Τη σύγκλιση της σειράς για τα σημεία $x_0 = 0$ ή $x_0 = 1$, την εξετάζουμε ξεχωριστά.

Επίσης, ισχύει για τη σειρά Fourier-Bessel η ταυτότητα του Parseval:

$$\int_0^1 x[f(x)]^2 dx = \sum_{n=1}^{\infty} d_n a_n^2,$$

όπου $a_n = \dfrac{\int_0^1 xf(x)J_n(\rho_{\nu n}x)dx}{\int_0^1 xJ_\nu^2(\rho_{\nu n}x)dx}$ και $d_n = \displaystyle\int_0^1 xJ_\nu^2(\rho_{\nu n}x)dx.$

Ασκήσεις

Άσκηση 1. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} 1, & 0 < x < 1, \\ \frac{1}{2}, & x = 1, \\ 0, & 1 < x < 2. \end{cases}$ Να δειχθεί ότι:

$$f(x) = \frac{1}{2}\sum_{\kappa=1}^{\infty} \frac{J_1(r_\kappa)}{r_\kappa J_1^2(2r_\kappa)} J_0(r_\kappa x), \quad 0 < x < 2$$

όπου r_κ οι ρίζες της $J_0(2x)$.

Λύση:

$$f(x) = \sum_{\kappa=1}^{\infty} a_\kappa J_0(r_\kappa x).$$

Πολλαπλασιάζουμε την τελευταία σχέση με $xJ_0(r_m x)$ και ολοκληρώνουμε ως προς x από 0 εως 2:

$$\int_0^2 xf(x)J_0(r_m x)dx = \sum_{\kappa=1}^{\infty} a_\kappa \int_0^2 xJ_0(r_\kappa x)J_0(r_m x)dx \overset{\text{ορθ.}}{\Longrightarrow} a_\kappa = \frac{\int_0^2 xf(x)J_0(r_\kappa x)dx}{\int_0^2 xJ_0^2(r_\kappa x)dx}.$$

Από το β′ ολοκλήρωμα Lommel για $\gamma = 2$, $\alpha = r_\kappa$ και $n = 0$, έχουμε:

$$\int_0^2 xJ_0^2(r_\kappa x)dx = \frac{r_\kappa^2 4[J_0'(2r_\kappa)]^2 + (4r_\kappa^2 - 0)J_0^2(2r_\kappa)}{2r_\kappa^2} = 2[J_0'(2r_\kappa)]^2 = 2J_1^2(2r_\kappa).$$

Επιπλέον,

$$\int_0^2 xf(x)J_0(r_\kappa x)dx = \int_0^1 x \cdot 1 \cdot J_0(r_\kappa x)dx + \int_1^2 x \cdot 0 \cdot J_0(r_\kappa x)dx = \int_0^1 xJ_0(r_\kappa x)dx.$$

Στο τελευταίο ολοκλήρωμα θέτουμε $r_\kappa x = u$, $dx = \dfrac{du}{r_\kappa}$, για $x = 0$ το $u = 0$ και για $x = 1$ το $u = r_\kappa$. Οπότε το ολοκλήρωμα γίνεται:

$$\frac{1}{r_\kappa^2}\int_0^{r_\kappa} uJ_0(u)du = \frac{1}{r_\kappa^2}\int_0^{r_\kappa} \frac{d}{du}\{uJ_1(u)\}du = \frac{1}{r_\kappa^2} uJ_1(u)\Big|_{u=0}^{r_\kappa} = \frac{1}{r_\kappa}J_1(r_\kappa).$$

Άρα:

$$a_\kappa = \frac{\frac{1}{r_\kappa}J_1(r_\kappa)}{2J_1^2(2r_\kappa)} = \frac{J_1(r_\kappa)}{2r_\kappa J_1^2(2r_\kappa)}.$$

Τελικά:

$$f(x) = \frac{1}{2}\sum_{\kappa=1}^{\infty} \frac{J_1(r_\kappa)}{r_\kappa J_1^2(2r_\kappa)} J_0(r_\kappa x).$$

Άσκηση 2. Έστω r_κ, $\kappa = 1, 2, \ldots$ οι θετικές ρίζες της $J_0(x)$. Δείξτε ότι για $0 \le x \le 1$ έχουμε:

i) $\dfrac{x}{4} = \displaystyle\sum_{\kappa=1}^{\infty} \frac{1}{r_\kappa^2 J_1(r_\kappa)} J_1(r_\kappa x).$

ii) Δείξτε ότι η ταυτότητα του Parseval της σειράς του ερωτήματος i) είναι:

$$\frac{1}{64} = \sum_{\kappa=1}^{\infty} \frac{r_\kappa^2[J_1'(r_\kappa)]^2 + (r_\kappa^2 - 1)J_1^2(r_\kappa)}{2r_\kappa^6 J_1^2(r_\kappa)}.$$

Λύση: i)

$$x = \sum_{\kappa=1}^{\infty} a_\kappa J_1(r_\kappa x).$$

Πολλαπλασιάζουμε την τελευταία σχέση με $xJ_1(r_m x)$ και ολοκληρώνουμε ως προς x από 0 εως 1:

$$\int_0^1 x^2 J_1(r_m x)dx = \sum_{\kappa=1}^{\infty} a_\kappa \int_0^1 xJ_1(r_\kappa x)J_1(r_m x)dx \overset{\text{ορθ.}}{\Longrightarrow} a_\kappa = \frac{\int_0^1 x^2 J_1(r_\kappa x)dx}{\int_0^1 xJ_1^2(r_\kappa x)dx}.$$

Από το β′ ολοκλήρωμα Lommel για $\gamma = 1$, $\alpha = r_\kappa$ και $n = 1$, έχουμε:

$$\int_0^1 xJ_1^2(r_\kappa x)dx = \frac{r_\kappa^2[J_1'(r_\kappa)]^2 + (r_\kappa^2 - 1)J_1^2(r_\kappa)}{2r_\kappa^2}.$$

Επιπλέον, για να υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα $\displaystyle\int_0^1 x^2 J_1(r_\kappa x)dx$, θέτουμε $r_\kappa x = u$, $dx = \dfrac{du}{r_\kappa}$, για $x = 0$ το $u = 0$ και για $x = 1$ το $u = r_\kappa$, οπότε αυτό γίνεται:

$$\frac{1}{r_\kappa^3}\int_0^{r_\kappa} uJ_1(u)du = \frac{1}{r_\kappa^3}\int_0^{r_\kappa} \frac{d}{du}\{u^2 J_2(u)\}du = \frac{1}{r_\kappa^3}u^2 J_2(u)\Big|_{u=0}^{r_\kappa} = \frac{1}{r_\kappa}J_2(r_\kappa).$$

Εκ της σχέσεως: $2J_1'(r_\kappa) = J_0(r_\kappa) - J_2(r_\kappa) \Rightarrow 2J_1'(r_\kappa) = -J_2(r_\kappa)$
$\Rightarrow 4[J_1'(r_\kappa)]^2 = J_2^2(r_\kappa)$.

Επομένως, $\displaystyle\int_0^1 xJ_1^2(r_\kappa x)dx = \frac{\frac{r_\kappa^2}{4}J_2^2(r_\kappa) + (r_\kappa^2 - 1)J_1^2(r_\kappa)}{2r_\kappa^2}$.

Επιπλέον, $J_0(r_\kappa) + J_2(r_\kappa) = \dfrac{2}{r_\kappa}J_1(r_\kappa) \Rightarrow J_1(r_\kappa) = \dfrac{r_\kappa}{2}J_2(r_\kappa)$, οπότε:

$$\int_0^1 xJ_1^2(r_\kappa x)dx = \frac{\frac{r_\kappa^2}{4}J_2^2(r_\kappa) + (r_\kappa^2 - 1)\frac{r_\kappa^2}{4}J_2^2(r_\kappa)}{2r_\kappa^2} = \frac{r_\kappa^2}{8}J_2^2(r_\kappa).$$

Άρα:

$$a_\kappa = \frac{\frac{1}{r_\kappa}J_2(r_\kappa)}{\frac{r_\kappa^2}{8}J_2^2(r_\kappa)} = \frac{8}{r_\kappa^3 J_2(r_\kappa)} = \frac{4}{r_\kappa^2 J_1(r_\kappa)}.$$

Τελικά:

$$x = 4\sum_{\kappa=1}^{\infty} \frac{1}{r_\kappa^2 J_1(r_\kappa)} J_1(r_\kappa x).$$

ii) Για την ταυτότητα του Parseval της σειράς του ερωτήματος i) έχουμε:

$$\int_0^1 \frac{x^3}{16}dx = \sum_{\kappa=1}^{\infty} \frac{1}{r_\kappa^4 J_1^2(r_\kappa)} \int_0^1 xJ_1^2(r_\kappa x)dx \Rightarrow \frac{1}{64} = \sum_{\kappa=1}^{\infty} \frac{1}{r_\kappa^4 J_1^2(r_\kappa)} \int_0^1 xJ_1^2(r_\kappa x)dx$$

$$\Rightarrow \frac{1}{64} = \sum_{\kappa=1}^{\infty} \frac{1}{r_\kappa^4 J_1^2(r_\kappa)} \frac{r_\kappa^2[J_1'(r_\kappa)]^2 + (r_\kappa^2 - 1)J_1^2(r_\kappa)}{2r_\kappa^2}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{64} = \sum_{\kappa=1}^{\infty} \frac{r_\kappa^2[J_1'(r_\kappa)]^2 + (r_\kappa^2 - 1)J_1^2(r_\kappa)}{2r_\kappa^6 J_1^2(r_\kappa)}.$$

Άσκηση 3. Αναπτύξτε τη σειρά $f(x) = 1$, $0 < x < 1$ σε σειρά συναρτήσεων Bessel $J_0(r_\kappa x)$ όπου r_κ, $\kappa = 1, 2, \ldots$ οι θετικές ρίζες της $xJ_0'(x) + J_0(x) = 0$.

Λύση:

$$1 = \sum_{\kappa=1}^{\infty} a_\kappa J_0(r_\kappa x).$$

Πολλαπλασιάζουμε την τελευταία σχέση με $xJ_0(r_m x)$ και ολοκληρώνουμε ως προς x από 0 εως 1:

$$\int_0^1 xJ_0(r_m x)dx = \sum_{\kappa=1}^{\infty} a_\kappa \int_0^1 xJ_0(r_\kappa x)J_0(r_m x)dx \overset{\text{ορθ.}}{\Longrightarrow} a_\kappa = \frac{\int_0^1 xJ_0(r_\kappa x)dx}{\int_0^1 xJ_0^2(r_\kappa x)dx}.$$

Από το β′ ολοκλήρωμα Lommel για $\gamma = 1$, $\alpha = r_\kappa$ και $n = 0$, έχουμε:

$$\int_0^1 xJ_0^2(r_\kappa x)dx = \frac{r_\kappa^2[J_0'(r_\kappa)]^2 + (r_\kappa^2 - 0)J_0^2(r_\kappa)}{2r_\kappa^2} = \frac{r_\kappa^2[J_0'(r_\kappa)]^2 + r_\kappa^2 J_0^2(r_\kappa)}{2r_\kappa^2}.$$

Επειδή r_κ είναι ρίζα της $xJ_0'(x) + J_0(x) = 0$, έχουμε: $r_\kappa J_0'(r_\kappa) = -J_0(r_\kappa)$. Αντικαθιστώντας στο τελευταίο ολοκλήρωμα, παίρνουμε:

$$\int_0^1 xJ_0^2(r_\kappa x)dx = \frac{[-J_0(r_\kappa)]^2 + r_\kappa^2 J_0^2(r_\kappa)}{2r_\kappa^2} = \frac{(r_\kappa^2 + 1)J_0^2(r_\kappa)}{2r_\kappa^2}.$$

Επιπλέον, για να υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα $\displaystyle\int_0^1 xJ_0(r_\kappa x)dx$, θέτουμε $r_\kappa x = u$, $dx = \dfrac{du}{r_\kappa}$, για $x = 0$ το $u = 0$ και για $x = 1$ το $u = r_\kappa$, οπότε αυτό γίνεται:

$$\frac{1}{r_\kappa^2}\int_0^{r_\kappa} uJ_0(u)du = \frac{1}{r_\kappa^2}\int_0^{r_\kappa} \frac{d}{du}\{uJ_1(u)\}du = \frac{1}{r_\kappa^2}uJ_1(u)\Big|_{u=0}^{r_\kappa} = \frac{1}{r_\kappa}J_1(r_\kappa).$$

Άρα:

$$a_\kappa = \frac{\frac{1}{r_\kappa}J_1(r_\kappa)}{\frac{(r_\kappa^2+1)J_0^2(r_\kappa)}{2r_\kappa^2}} = \frac{2r_\kappa J_1(r_\kappa)}{(r_\kappa^2 + 1)J_0^2(r_\kappa)}.$$

Τελικά:

$$1 = 2\sum_{\kappa=1}^{\infty} \frac{r_\kappa J_1(r_\kappa)}{(r_\kappa^2 + 1)J_0^2(r_\kappa)} J_0(r_\kappa x).$$

Άσκηση 4. Δείξτε ότι για $0 \le x \le 1$ ισχύει:

$$\frac{x}{2} = \sum_{\kappa=1}^{\infty} \frac{r_\kappa J_2(r_\kappa)}{(r_\kappa^2 - 1) J_1^2(r_\kappa)} J_1(r_\kappa x),$$

όπου r_κ, $\kappa = 1, 2, \ldots$ οι θετικές ρίζες της $J_1'(x) = 0$.

Λύση:

$$x = \sum_{\kappa=1}^{\infty} a_\kappa J_1(r_\kappa x).$$

Πολλαπλασιάζουμε την τελευταία σχέση με $xJ_1(r_m x)$ και ολοκληρώνουμε ως προς x από 0 εως 1:

$$\int_0^1 x^2 J_1(r_m x) dx = \sum_{\kappa=1}^{\infty} a_\kappa \int_0^1 x J_1(r_\kappa x) J_1(r_m x) dx \overset{\text{ορθ.}}{\Longrightarrow} a_\kappa = \frac{\int_0^1 x^2 J_1(r_\kappa x) dx}{\int_0^1 x J_1^2(r_\kappa x) dx}.$$

Από το β′ ολοκλήρωμα Lommel για $\gamma = 1$, $\alpha = r_\kappa$ και $n = 1$, έχουμε:

$$\int_0^1 x J_1^2(r_\kappa x) dx = \frac{r_\kappa^2 [J_1'(r_\kappa)]^2 + (r_\kappa^2 - 1) J_1^2(r_\kappa)}{2r_\kappa^2} = \frac{(r_\kappa^2 - 1) J_1^2(r_\kappa)}{2r_\kappa^2}.$$

Επιπλέον, για να υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα $\displaystyle\int_0^1 x^2 J_1(r_\kappa x) dx$, θέτουμε $r_\kappa x = u$, $dx = \dfrac{du}{r_\kappa}$, για $x = 0$ το $u = 0$ και για $x = 1$ το $u = r_\kappa$, οπότε αυτό γίνεται:

$$\frac{1}{r_\kappa^3} \int_0^{r_\kappa} u J_1(u) du = \frac{1}{r_\kappa^3} \int_0^{r_\kappa} \frac{d}{du}\{u^2 J_2(u)\} du = \frac{1}{r_\kappa^3} u^2 J_2(u) \Big|_{u=0}^{r_\kappa} = \frac{1}{r_\kappa} J_2(r_\kappa).$$

Άρα:

$$a_\kappa = \frac{\frac{1}{r_\kappa} J_2(r_\kappa)}{\frac{(r_\kappa^2 - 1) J_1^2(r_\kappa)}{2r_\kappa^2}} = \frac{2 r_\kappa J_2(r_\kappa)}{(r_\kappa^2 - 1) J_1^2(r_\kappa)}.$$

Τελικά:

$$x = 2 \sum_{\kappa=1}^{\infty} \frac{r_\kappa J_2(r_\kappa)}{(r_\kappa^2 - 1) J_1^2(r_\kappa)} J_1(r_\kappa x).$$

Άσκηση 5. **i**) Δείξτε ότι για $0 < x \le 1$:

$$\ln x = -2 \sum_{\kappa=1}^{\infty} \frac{1}{r_\kappa^2 J_1^2(r_\kappa)} J_0(r_\kappa x),$$

όπου r_κ, $\kappa = 1, 2, \ldots$ οι θετικές ρίζες της $J_0(x) = 0$.

ii) Χρησιμοποιείστε την ταυτότητα του Parseval για να δείξετε ότι

$$\sum_{\kappa=1}^{\infty} \frac{1}{r_\kappa^4 J_1^2(r_\kappa)} = \frac{1}{8}.$$

Λύση: **i**)

$$\ln x = \sum_{\kappa=1}^{\infty} a_\kappa J_0(r_\kappa x).$$

Πολλαπλασιάζουμε την τελευταία σχέση με $xJ_0(r_m x)$ και ολοκληρώνουμε ως προς x από 0 εως 1:

$$\int_0^1 x\ln x J_0(r_m x)dx = \sum_{\kappa=1}^{\infty} a_\kappa \int_0^1 xJ_0(r_\kappa x)J_0(r_m x)dx \overset{\text{ορθ.}}{\Longrightarrow} a_\kappa = \frac{\int_0^1 x\ln x J_0(r_\kappa x)dx}{\int_0^1 xJ_0^2(r_\kappa x)dx}.$$

Από το β′ ολοκλήρωμα Lommel για $\gamma = 1$, $\alpha = r_\kappa$ και $n = 0$, έχουμε:

$$\int_0^1 xJ_0^2(r_\kappa x)dx = \frac{r_\kappa^2[J_0'(r_\kappa)]^2 + (r_\kappa^2 - 0)J_0^2(r_\kappa)}{2r_\kappa^2} = \frac{r_\kappa^2[J_0'(r_\kappa)]^2}{2r_\kappa^2} = \frac{J_1^2(r_\kappa)}{2}.$$

Επιπλέον, για να υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα $\displaystyle\int_0^1 x\ln x J_0(r_\kappa x)dx$, θέτουμε $r_\kappa x = u$, $dx = \dfrac{du}{r_\kappa}$, για $x = 0$ το $u = 0$ και για $x = 1$ το $u = r_\kappa$, οπότε αυτό γίνεται:

$$\frac{1}{r_\kappa^2}\int_0^{r_\kappa} u\ln\frac{u}{r_\kappa}J_0(u)du = \frac{1}{r_\kappa^2}\int_0^{r_\kappa}\ln\frac{u}{r_\kappa}[uJ_1(u)]'du = \frac{1}{r_\kappa^2}\left\{\ln\frac{u}{r_\kappa}[uJ_1(u)]\Big|_{u=0}^{r_\kappa} - \int_0^{r_\kappa}\frac{1}{u}uJ_1(u)du\right\}$$

$$= -\frac{1}{r_\kappa^2}\int_0^{r_\kappa}J_1(u)du = \frac{1}{r_\kappa^2}J_0(u)\Big|_{u=0}^{r_\kappa} = \frac{J_0(r_\kappa) - J_0(0)}{r_\kappa^2} = -\frac{1}{r_\kappa^2}.$$

Άρα:

$$a_\kappa = \frac{-\frac{1}{r_\kappa^2}}{\frac{J_1^2(r_\kappa)}{2}} = -\frac{2}{r_\kappa^2 J_1^2(r_\kappa)}.$$

Τελικά:

$$\ln x = -2\sum_{\kappa=1}^{\infty}\frac{1}{r_\kappa^2 J_1^2(r_\kappa)}J_0(r_\kappa x).$$

ii) Για την ταυτότητα του Parseval της σειράς του ερωτήματος *i*) έχουμε:

$$\int_0^1 x\ln^2 x dx = 4\sum_{\kappa=1}^{\infty}\frac{1}{r_\kappa^4 J_1^4(r_\kappa)}\int_0^1 xJ_0^2(r_\kappa x)dx \Rightarrow \int_0^1 x\ln^2 x dx = 4\sum_{\kappa=1}^{\infty}\frac{1}{r_\kappa^4 J_1^4(r_\kappa)}\frac{J_1^2(r_\kappa)}{2}$$

$$\Rightarrow \int_0^1 x\ln^2 x dx = 2\sum_{\kappa=1}^{\infty}\frac{1}{r_\kappa^4 J_1^2(r_\kappa)} \Rightarrow \frac{1}{4} = 2\sum_{\kappa=1}^{\infty}\frac{1}{r_\kappa^4 J_1^2(r_\kappa)},$$

αφού $\displaystyle\int_0^1 x\ln^2 x dx = \int_0^1\left(\frac{x^2}{2}\right)'\ln^2 x dx = \frac{x^2}{2}\ln^2 x\Big|_0^1 - \int_0^1\left(\frac{x^2}{2}\right)2\ln x\frac{1}{x}dx = -\int_0^1 x\ln x dx$

$$= -\int_0^1\left(\frac{x^2}{2}\right)'\ln x dx = \frac{x^2}{2}\ln x\Big|_0^1 + \int_0^1\left(\frac{x^2}{2}\right)\frac{1}{x}dx = \int_0^1\frac{x}{2}dx = \frac{x^2}{4}\Big|_0^1 = \frac{1}{4}.$$

Άσκηση 6. **i**) Δείξτε ότι

$$\frac{J_0(ax)}{2J_0(a)} = \sum_{\kappa=1}^{\infty}\frac{r_\kappa}{(r_\kappa^2 - a^2)J_1(r_\kappa)}J_0(r_\kappa x),$$

όπου r_κ, $\kappa = 1, 2, \ldots$ οι θετικές ρίζες της $J_0(x) = 0$.

ii) Βρείτε την ταυτότητα του Parseval που αντιστοιχεί στην ανωτέρω σειρά και δείξτε ότι:

$$\sum_{\kappa=1}^{\infty} \frac{r_\kappa^2}{(r_\kappa^2 - a^2)^2} = \frac{J_0^2(a) + J_1^2(a)}{4J_0^2(a)}.$$

Λύση: **i**)

$$J_0(ax) = \sum_{\kappa=1}^{\infty} a_\kappa J_0(r_\kappa x).$$

Πολλαπλασιάζουμε την τελευταία σχέση με $xJ_0(r_m x)$ και ολοκληρώνουμε ως προς x από 0 εως 1:

$$\int_0^1 xJ_0(ax)J_0(r_m x)dx = \sum_{\kappa=1}^{\infty} a_\kappa \int_0^1 xJ_0(r_\kappa x)J_0(r_m x)dx \overset{\text{ορθ.}}{\Longrightarrow} a_\kappa = \frac{\int_0^1 xJ_0(ax)J_0(r_\kappa x)dx}{\int_0^1 xJ_0^2(r_\kappa x)dx}.$$

Από το β′ ολοκλήρωμα Lommel για $\gamma = 1$, $\alpha = r_\kappa$ και $n = 0$, έχουμε:

$$\int_0^1 xJ_0^2(r_\kappa x)dx = \frac{r_\kappa^2[J_0'(r_\kappa)]^2 + (r_\kappa^2 - 0)J_0^2(r_\kappa)}{2r_\kappa^2} = \frac{r_\kappa^2[J_0'(r_\kappa)]^2}{2r_\kappa^2} = \frac{J_1^2(r_\kappa)}{2}.$$

Από το α′ ολοκλήρωμα Lommel για $\gamma = 1$, $\beta = r_\kappa$, $\alpha = \alpha$ και $n = 0$, έχουμε:

$$\int_0^1 xJ_0(ax)J_0(r_\kappa x)dx = \frac{aJ_0'(a)J_0(r_\kappa) - r_\kappa J_0'(r_\kappa)J_0(a)}{r_\kappa^2 - a^2} = -\frac{r_\kappa J_0'(r_\kappa)J_0(a)}{r_\kappa^2 - a^2} = \frac{r_\kappa J_1(r_\kappa)J_0(a)}{r_\kappa^2 - a^2}.$$

Άρα:

$$a_\kappa = \frac{\frac{r_\kappa J_1(r_\kappa)J_0(a)}{r_\kappa^2 - a^2}}{\frac{J_1^2(r_\kappa)}{2}} = \frac{2r_\kappa J_0(a)}{(r_\kappa^2 - a^2)J_1(r_\kappa)}.$$

Τελικά:

$$J_0(ax) = \sum_{\kappa=1}^{\infty} \frac{2r_\kappa J_0(a)}{(r_\kappa^2 - a^2)J_1(r_\kappa)} J_0(r_\kappa x).$$

ii) Για την ταυτότητα του Parseval της σειράς του ερωτήματος i) έχουμε:

$$\frac{1}{4J_0^2(a)} \int_0^1 xJ_0^2(ax)dx = \sum_{\kappa=1}^{\infty} \frac{r_\kappa^2}{(r_\kappa^2 - a^2)^2 J_1^2(r_\kappa)} \int_0^1 xJ_0^2(r_\kappa x)dx.$$

Από το β′ ολοκλήρωμα Lommel για $\gamma = 1$, $\alpha = r_\kappa$ ή $\alpha = \alpha$ και $n = 0$, έχουμε:

$$\int_0^1 xJ_0^2(r_\kappa x)dx = \frac{J_1^2(r_\kappa)}{2} \text{ και } \int_0^1 xJ_0^2(ax)dx = \frac{a^2[J_0'(a)]^2 + (a^2 - 0)J_0^2(a)}{2a^2} = \frac{[J_0'(a)]^2 + J_0^2(a)}{2}.$$

Άρα, η ταυτότητα του Parseval:

$$\frac{1}{4J_0^2(a)} \frac{[J_0'(a)]^2 + J_0^2(a)}{2} = \sum_{\kappa=1}^{\infty} \frac{r_\kappa^2}{(r_\kappa^2 - a^2)^2 J_1^2(r_\kappa)} \frac{J_1^2(r_\kappa)}{2}$$

και

$$\sum_{\kappa=1}^{\infty} \frac{r_\kappa^2}{(r_\kappa^2 - a^2)^2} = \frac{J_1^2(a) + J_0^2(a)}{4J_0^2(a)}.$$

Άσκηση 7. Δείξτε ότι για $0 \le x \le 1$:

$$x^3 = 2\sum_{\kappa=1}^{\infty} \frac{J_3(r_\kappa x)}{r_\kappa J_4(r_\kappa)},$$

όπου r_κ, $\kappa = 1, 2, \ldots$ οι θετικές ρίζες της $J_3(x) = 0$.

Λύση:

$$f(x) = x^3 = \sum_{\kappa=1}^{\infty} a_\kappa J_3(r_\kappa x)$$

και θα είναι $a_\kappa = \dfrac{\int_0^1 x f(x) J_3(r_\kappa x) dx}{\int_0^1 x J_3^2(r_\kappa x) dx}$.

Εκ του τύπου

$$\int_0^a r J_\nu(x_{\nu m}\frac{r}{a}) J_\nu(x_{\nu n}\frac{r}{a}) = \begin{cases} 0 & m \ne n, \\ \dfrac{a^2}{2}[(J'_\nu(x_{\nu n}))^2 + (1 - \dfrac{\nu^2}{x_{\nu n}^2}) J_\nu^2(x_{\nu n})] & m = n \end{cases},$$

έχουμε $\displaystyle\int_0^1 x J_3^2(r_\kappa x) dx = \frac{1}{2}(J'_3(r_\kappa))^2$, διότι $J_3(r_\kappa) = 0$ και $\displaystyle\int_0^1 x J_3^2(r_\kappa x) dx = \frac{1}{2} J_4^2(r_\kappa)$, λόγω της αναδρομικής σχέσης $J'_n(x) = \dfrac{n}{x} J_n(x) - J_{n+1}(x)$ για $n = 3$. Επιπλέον, $\displaystyle\int_0^1 x^4 J_3(r_\kappa x) dx = \frac{1}{r_\kappa^5}\int_0^1 [r_\kappa^4 x^4 J_4(r_\kappa x)]' d(r_\kappa x) = \frac{1}{r_\kappa^5} r_\kappa^4 J_4(r_\kappa) = \frac{J_4(r_\kappa)}{r_\kappa}$.

Επομένως, $\dfrac{J_4(r_\kappa)}{\frac{1}{2} r_\kappa J_4^2(r_\kappa)} = \dfrac{2}{r_\kappa J_4(r_\kappa)}$ και τελικά

$$x^3 = \sum_{\kappa=1}^{\infty} a_\kappa J_3(r_\kappa x).$$

Άσκηση 8. Δείξτε ότι για $0 \le x \le 1$:

i) $\displaystyle\frac{x^{n+1}}{4(n+1)} = \sum_{\kappa=1}^{\infty} \frac{J_{n+1}(r_\kappa x)}{r_\kappa^2 J_{n+1}(r_\kappa)}$, όπου r_κ, $\kappa = 1, 2, \ldots$ οι ρίζες της $J_n(x) = 0$, $n \ge 0$,

ii) $\displaystyle\sum_{\kappa=1}^{\infty} \frac{1}{r_\kappa^2} = \frac{1}{4(n+1)}$, όπου r_κ, $\kappa = 1, 2, \ldots$ οι ρίζες της $J_n(x) = 0$, $n \ge 0$,

iii) $\displaystyle\sum_{\kappa=1}^{\infty} \frac{1}{\kappa^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

Λύση:

i) Θα αναπτύξουμε το x^{n+1} σε σειρά συναρτήσεων Bessel $J_{n+1}(r_\kappa x)$. Οπότε:

$x^{n+1} = \displaystyle\sum_{\kappa=1}^{\infty} a_\kappa J_{n+1}(r_\kappa x)$, όπου $a_\kappa = \dfrac{\int_0^1 x^{n+2} J_{n+1}(r_\kappa x) dx}{\int_0^1 x J_{n+1}^2(r_\kappa x) dx}$. Έχουμε:

$$\int_0^1 x^{n+2} J_{n+1}(r_\kappa x)dx \overset{r_\kappa x=u}{=} \frac{1}{r_\kappa^{n+3}} \int_0^{r_\kappa} d[u^{n+2} J_{n+2}(u)]du = \frac{1}{r_\kappa} J_{n+2}(r_\kappa)$$

και $\displaystyle\int_0^1 x J_{n+1}^2(r_\kappa x)dx = \frac{1}{2}\big[(J'_{n+1}(r_\kappa))^2 + \big(1 - \frac{(n+1)^2}{r_\kappa^2}\big) J_{n+1}^2(r_\kappa)\big].$

Απ' τις σχέσεις $J'_n(x) = J_{n-1}(x) - \dfrac{n}{x} J_n(x)$ και $J_{n-1}(x) + J_{n+1}(x) = \dfrac{2n}{x} J_n(x)$ θέτοντας όπου n το $n+1$ και $x = r_\kappa$ κι επειδή $J_n(r_\kappa) = 0$, έχουμε:

$J'_{n+1}(r_\kappa) = -\dfrac{n+1}{r_\kappa} J_{n+1}(r_\kappa)$ και $J_{n+2}(r_\kappa) = \dfrac{2(n+1)}{r_\kappa} J_{n+1}(r_\kappa)$.

Επομένως, $a_\kappa = \dfrac{\frac{1}{r_\kappa}\frac{2(n+1)}{r_\kappa} J_{n+1}(r_\kappa)}{\frac{1}{2}\big[\frac{(n+1)^2}{r_\kappa^2} J_{n+1}^2(r_\kappa) + \big(1 - \frac{(n+1)^2}{r_\kappa^2}\big) J_{n+1}^2(r_\kappa)\big]} \Rightarrow a_\kappa = \dfrac{4(n+1)}{r_\kappa^2 J_{n+1}(r_\kappa)}.$

Άρα,

$$\frac{x^{n+1}}{4(n+1)} = \sum_{\kappa=1}^{\infty} \frac{J_{n+1}(r_\kappa x)}{r_\kappa^2 J_{n+1}(r_\kappa)}.$$

ii) Εάν στη σειρά του ερωτήματος **i**) θέσουμε όπου $x = 1$ έχουμε:

$$\frac{1}{4(n+1)} = \sum_{\kappa=1}^{\infty} \frac{1}{r_\kappa^2}.$$

iii) Εάν r_κ είναι οι ρίζες της $J_{1/2}(x)$, τότε: $r_\kappa = \kappa\pi$, $\kappa = 1, 2, \ldots$ διότι $J_{1/2}(x) = 0 \Rightarrow \sin x = 0 \Rightarrow x = \kappa\pi$. Άρα στη σειρά του ερωτήματος **ii**) για $r_\kappa = \kappa\pi$ και $n = \dfrac{1}{2}$ έχουμε:

$$\frac{1}{4\frac{3}{2}} = \sum_{\kappa=1}^{\infty} \frac{1}{(\kappa\pi)^2} \Rightarrow \frac{\pi^2}{6} = \sum_{\kappa=1}^{\infty} \frac{1}{\kappa^2}.$$

Βιβλιογραφία

Μασσαλάς Χ. (2010) *Ειδικές Συναρτήσεις*, Cutenberg.

Σιαφαρίκας Π. (2009) *Ειδικές Συναρτήσεις*, Εκδόσεις Πανεπιστημίου Πατρών.

Hochstadt H. (1986) *The function of Mathematical Physics*, Dover Publications, Inc. N.Y..

Lebedev N.N. (1972) *Special functions and their Applications*, Dover Publications.

Luke Y. L. (1969) *The special functions and their Approximations-Volume I*, Academic Press.

Watson G. N. (1966) *A treatise on the theory of Bessel functions*, Cambridge University Press.