Τίτλος Μαθήματος: Ειδικές Συναρτήσεις

Ενότητα: Επίλυση διαφορικών εξισώσεων με τη βοήθεια των συναρτήσεων Bessel

Όνομα Καθηγήτριας: Χρυσή Κοκολογιαννάκη

Τμήμα: Μαθηματικών

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Πατρών**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Ενότητα 6

9 Διαφορικές Εξισώσεις η λύση των οποίων δίνεται με τη βοήθεια των συναρτήσεων Bessel

Θεώρημα 9.1: Η γενική λύση της δ.ε.

$$z^2 y''(z) + (1-2\alpha) z y'(z) + \{\beta^2\gamma^2 z^{2\gamma} + (\alpha^2 - \nu^2\gamma^2)\} y(z) = 0, \tag{9.1}$$

όπου α, β, γ, ν είναι σταθερές, είναι η

$$y(z) = z^\alpha [A J_\nu(\beta z^\gamma) + B J_{-\nu}(\beta z^\gamma)], \quad \text{αν } \nu \notin \mathbb{Z} \tag{9.2}$$

και

$$y(z) = z^\alpha [A J_n(\beta z^\gamma) + B Y_n(\beta z^\gamma)], \quad \text{αν } \nu = n \in \mathbb{Z} \tag{9.3}$$

με A, B αυθαίρετες σταθερές.

Απόδειξη. Θέτουμε $y(z) = z^\alpha u(z)$. Παίρνουμε την πρώτη και δεύτερη παράγωγο αυτής:

$y'(z) = \alpha z^{\alpha-1} u(z) + z^\alpha u'(z)$,

$y''(z) = \alpha(\alpha-1) z^{\alpha-2} u(z) + 2\alpha z^{\alpha-1} u'(z) + z^\alpha u''(z)$,

αντίστοιχα, και αντικαθιστούμε στη δοθείσα δ.ε., οπότε προκύπτει:

$$\begin{aligned}
&z^2[\alpha(\alpha-1) z^{\alpha-2} u(z) + 2\alpha z^{\alpha-1} u'(z) + z^\alpha u''(z)] + (1-2\alpha) z [\alpha z^{\alpha-1} u(z) + z^\alpha u'(z)] + \\
&\quad + \{\beta^2\gamma^2 z^{2\gamma} + (\alpha^2 - \nu^2\gamma^2)\} z^\alpha u(z) = 0 \\
&\quad \Rightarrow z^{\alpha+2} u''(z) + z^{\alpha+1} u'(z) + \{\beta^2\gamma^2 z^{\alpha+2\gamma} - \nu^2\gamma^2 z^\alpha\} u(z) = 0 \\
&\quad \Rightarrow z^2 u''(z) + z u'(z) + \{\beta^2\gamma^2 z^{2\gamma} - \nu^2\gamma^2\} u(z) = 0
\end{aligned} \tag{9.4}$$

Θέτουμε $\beta z^\gamma = t \Rightarrow z^\gamma = \dfrac{t}{\beta} \Rightarrow z = \dfrac{t^{1/\gamma}}{\beta^{1/\gamma}}$ και $dz = \dfrac{1}{\gamma}\Big(\dfrac{t}{\beta}\Big)^{\frac{1}{\gamma}} \dfrac{dt}{t}$,

$u'(z) = \dfrac{du}{dz} = \dfrac{d\tilde{u}}{dt}\dfrac{dt}{dz} = \dfrac{d\tilde{u}}{dt}\gamma t \Big(\dfrac{\beta}{t}\Big)^{\frac{1}{\gamma}}$,

$$u''(z) = \frac{d^2u}{dz^2} = \frac{d}{dt}\left(\gamma t \Big(\frac{\beta}{t}\Big)^{\frac{1}{\gamma}} \frac{d\tilde{u}}{dt}\right) \gamma t \Big(\frac{\beta}{t}\Big)^{\frac{1}{\gamma}} =$$

$$= \left(\gamma \Big(\frac{\beta}{t}\Big)^{\frac{1}{\gamma}} \frac{d\tilde{u}}{dt} + \gamma t \beta^{1/\gamma}\Big(-\frac{1}{\gamma}\Big) t^{-\frac{1}{\gamma}-1} \frac{d\tilde{u}}{dt} + \gamma t \Big(\frac{\beta}{t}\Big)^{\frac{1}{\gamma}} \frac{d^2\tilde{u}}{dt^2}\right) \gamma t \Big(\frac{\beta}{t}\Big)^{\frac{1}{\gamma}} =$$

$$= \gamma^2 t \Big(\frac{\beta}{t}\Big)^{\frac{2}{\gamma}} \frac{d\tilde{u}}{dt} - \gamma t \Big(\frac{\beta}{t}\Big)^{\frac{2}{\gamma}} \frac{d\tilde{u}}{dt} + \gamma^2 t^2 \Big(\frac{\beta}{t}\Big)^{\frac{2}{\gamma}} \frac{d^2\tilde{u}}{dt^2}.$$

Αντικαθιστώντας στην (9.4):

$$
\begin{aligned}
&\Big(\frac{t}{\beta}\Big)^{\frac{2}{\gamma}}\Big\{\gamma^2t^2\Big(\frac{\beta}{t}\Big)^{\frac{2}{\gamma}}\frac{d^2\tilde{u}}{dt^2}-\gamma t\Big(\frac{\beta}{t}\Big)^{\frac{2}{\gamma}}\frac{d\tilde{u}}{dt}+\gamma^2t\Big(\frac{\beta}{t}\Big)^{\frac{2}{\gamma}}\frac{d\tilde{u}}{dt}\Big\}+\Big(\frac{t}{\beta}\Big)^{\frac{1}{\gamma}}\Big\{\gamma t\Big(\frac{\beta}{t}\Big)^{\frac{1}{\gamma}}\frac{d\tilde{u}}{dt}\Big\}\\
&\quad+\gamma^2(t^2-\nu^2)\tilde{u}=0\\
&\Rightarrow \gamma^2t^2\frac{d^2\tilde{u}}{dt^2}+\gamma^2t\frac{d\tilde{u}}{dt}+\gamma^2(t^2-\nu^2)\tilde{u}=0\\
&\Rightarrow t^2\frac{d^2\tilde{u}}{dt^2}+t\frac{d\tilde{u}}{dt}+(t^2-\nu^2)\tilde{u}=0. \qquad (9.5)
\end{aligned}
$$

Η γενική λύση της (9.5) είναι:

$$\tilde{u}(t)=AJ_\nu(t)+BJ_{-\nu}(t),\ \ \text{αν } \nu\notin\mathbb{Z}$$

και

$$\tilde{u}(t)=AJ_n(t)+BY_n(t),\ \ \text{αν } \nu=n\in\mathbb{Z}.$$

Οπότε, η λύση της (9.4) είναι:

$$u(z)=AJ_\nu(\beta z^\gamma)+BJ_{-\nu}(\beta z^\gamma),\ \ \text{αν } \nu\notin\mathbb{Z}$$

ή

$$u(z)=AJ_n(\beta z^\gamma)+BY_n(\beta z^\gamma),\ \ \text{αν } \nu=n\in\mathbb{Z}$$

και τελικά η γενική λύση της αρχικής δ.ε. (9.1) είναι:

$$y(z)=z^\alpha[AJ_\nu(\beta z^\gamma)+BJ_{-\nu}(\beta z^\gamma)],\ \ \text{αν } \nu\notin\mathbb{Z}$$

ή

$$y(z)=z^\alpha[AJ_n(\beta z^\gamma)+BY_n(\beta z^\gamma)],\ \ \text{αν } \nu=n\in\mathbb{Z}.$$

□

Ασκήσεις

Άσκηση 1. Να λυθούν οι παρακάτω Δ.Ε. με τη βοήθεια των συναρτήσεων Bessel:

1) $y''(x)+\dfrac{3}{x}y'(x)+4y(x)=0$, 2) $xy''(x)+y(x)=0$,

3) $x^4y''(x)+2x^3y'(x)-4y(x)=0$, 4) $x^2y''(x)-xy'(x)+\Big(x^2-\dfrac{5}{4}\Big)y(x)=0$,

5) $x^{1/2}y''(x)+y(x)=0$, 6) $xy''(x)+(n+1)y'(x)+y(x)=0$,

7) $y''(x)+\Big(x^2+\dfrac{1}{4x^2}\Big)y(x)=0$, $y(0)=0$, $y'(\alpha)=\sqrt{\alpha}$,

8) $x^2y''(x)+xy'(x)+\Big(x^2-\dfrac{9}{4}\Big)y(x)=0$,

9) $x^2y''(x)-2xy'(x)+(4x^4-4)y(x)=0$, 10) $x^2y''(x)+x^{3/2}y(x)=0$,

11) $x^2y''(x)+(1-2n)xy'(x)+x^2y(x)=0$, 12) $x^2y''(x)+xy'(x)+\Big(\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{1}{4}\Big)y(x)=0$,

13) $x^2y''(x)+\big(n^2x^2+\dfrac{1}{4}\big)y(x)=0,\ y(0)=0,\ y'(\alpha)=\sqrt{\alpha}.$

Λύση:

Κάθε Σ.Δ.Ε. προσπαθούμε να τη φέρουμε στην μορφή (9.1). Έτσι:

1) Πολλαπλασιάζουμε με x^2 τη δοθείσα Δ.Ε., η οποία γίνεται:

$x^2y''(x)+3xy'(x)+4x^2y(x)=0.$

Συγκρίνοντας την προκύπτουσα Δ.Ε. με την Σ.Δ.Ε. (9.1) έχουμε: $1-2a=3\Rightarrow a=-1$, $2\gamma=2\Rightarrow\gamma=1$, $\beta^2\gamma^2=4\Rightarrow\beta=2$ και $a^2-n^2\gamma^2=0\Rightarrow n=1$.

Συνεπώς, η γενική λύση της δοθείσας δίνεται από τη σχέση

$$y(x)=x^{-1}[C_1J_1(2x)+C_2Y_1(2x)].$$

2) Πολλαπλασιάζουμε με x τη δοθείσα Δ.Ε., η οποία γίνεται: $x^2y''(x)+xy(x)=0$.

Συγκρίνοντας την προκύπτουσα Δ.Ε. με την Σ.Δ.Ε. (9.1) έχουμε: $1-2a=0\Rightarrow a=\dfrac{1}{2}$, $2\gamma=1\Rightarrow\gamma=\dfrac{1}{2}$, $\beta^2\gamma^2=1\Rightarrow\beta=2$ και $a^2-n^2\gamma^2=0\Rightarrow n=1$.

Συνεπώς, η γενική λύση της δοθείσας δίνεται από τη σχέση

$$y(x)=x^{\frac{1}{2}}[C_1J_1(2x^{\frac{1}{2}})+C_2Y_1(2x^{\frac{1}{2}})].$$

3) Διαιρούμε με x^2 τη δοθείσα Δ.Ε., η οποία γίνεται:

$x^2y''(x)+2xy'(x)-\dfrac{4}{x^2}y(x)=0.$

Συγκρίνοντας την προκύπτουσα Δ.Ε. με την Σ.Δ.Ε. (9.1) έχουμε: $1-2a=2\Rightarrow a=-\dfrac{1}{2}$, $2\gamma=-2\Rightarrow\gamma=-1$, $\beta^2\gamma^2=-4\Rightarrow\beta=2i$ και $a^2-n^2\gamma^2=0\Rightarrow n=\dfrac{1}{2}$.

Συνεπώς, η γενική λύση της δοθείσας δίνεται από τη σχέση

$$y(x)=x^{-\frac{1}{2}}[C_1J_{1/2}(2ix^{-1})+C_2J_{-1/2}(2ix^{-1})].$$

Όμως, $I_n(x)=i^{-n}J_n(ix)$, έτσι: $J_{1/2}(2ix^{-1})=i^{1/2}I_{1/2}(2x^{-1})$ και $J_{-1/2}(2ix^{-1})=i^{-1/2}I_{-1/2}(2x^{-1})$. Άρα, η γενική λύση της Δ.Ε. δίνεται από τη σχέση

$$y(x)=x^{-\frac{1}{2}}[C_1i^{1/2}I_{1/2}(2x^{-1})+C_2i^{-1/2}I_{-1/2}(2x^{-1})$$

$$\Rightarrow y(x)=x^{-\frac{1}{2}}[AI_{1/2}(2x^{-1})+BI_{-1/2}(2x^{-1}).$$

4) Συγκρίνουμε τη δοθείσα Δ.Ε. με την Σ.Δ.Ε. (9.1) κι έχουμε: $1-2a=-1\Rightarrow a=1$, $2\gamma=2\Rightarrow\gamma=1$, $\beta^2\gamma^2=1\Rightarrow\beta=1$ και $a^2-n^2\gamma^2=-\dfrac{5}{4}\Rightarrow n=\dfrac{3}{2}$. Συνεπώς, η γενική της λύση δίνεται από τη σχέση

$$y(x)=x[C_1J_{3/2}(x)+C_2J_{-3/2}(x)].$$

Όμως, γνωρίζουμε ότι

$J_{3/2}(x)=\sqrt{\dfrac{2}{\pi x}}\Big(\dfrac{1}{x}\sin x-\cos x\Big)$ και $J_{-3/2}(x)=-\sqrt{\dfrac{2}{\pi x}}\Big(\dfrac{1}{x}\cos x+\sin x\Big)$.

Άρα, η γενική λύση της Δ.Ε. δίνεται από τη σχέση

$$y(x) = \sqrt{\frac{2x}{\pi}}\Big[C_1\Big(\frac{1}{x}\sin x - \cos x\Big) - C_2\Big(\frac{1}{x}\cos x + \sin x\Big)\Big].$$

5) Πολλαπλασιάζουμε με $x^{3/2}$ τη δοθείσα Δ.Ε., η οποία γίνεται: $x^2y''(x)+x^{3/2}y(x) = 0$.

Συγκρίνοντας την προκύπτουσα Δ.Ε. με την Σ.Δ.Ε. (9.1) έχουμε: $1-2a = 0 \Rightarrow a = \dfrac{1}{2}$, $2\gamma = \dfrac{3}{2} \Rightarrow \gamma = \dfrac{3}{4}$, $\beta^2\gamma^2 = 1 \Rightarrow \beta = \frac{4}{3}$ και $a^2 - n^2\gamma^2 = 0 \Rightarrow n = \frac{2}{3} \notin \mathbb{Z}$.
Συνεπώς, η γενική λύση της δοθείσας δίνεται από τη σχέση

$$y(x) = x^{\frac{1}{2}}[C_1J_{2/3}(\frac{4}{3}x^{\frac{3}{4}}) + C_2J_{-2/3}(\frac{4}{3}x^{\frac{3}{4}})].$$

6) Πολλαπλασιάζουμε με x τη δοθείσα Δ.Ε., η οποία γίνεται:
$x^2y''(x) + (n+1)xy'(x) + xy(x) = 0$.
Συγκρίνοντας την προκύπτουσα Δ.Ε. με την Σ.Δ.Ε. (9.1) έχουμε: $1 - 2a = n + 1 \Rightarrow a = -\dfrac{n}{2}$, $2\gamma = 1 \Rightarrow \gamma = \dfrac{1}{2}$, $\beta^2\gamma^2 = 1 \Rightarrow \beta = 2$ και $a^2 - n^2\gamma^2 = 0 \Rightarrow \frac{n^2}{4} - \frac{n^2}{4} = 0\ \forall n$.
Συνεπώς, η γενική λύση της δοθείσας δίνεται από τη σχέση

$$y(x) = x^{-\frac{n}{2}}[C_1J_n(2x^{\frac{1}{2}}) + C_2J_{-n}(2x^{\frac{1}{2}})] \qquad \text{αν } n \notin \mathbb{Z},$$

και

$$y(x) = x^{-\frac{n}{2}}[C_1J_n(2x^{\frac{1}{2}}) + C_2Y_n(2x^{\frac{1}{2}})] \qquad \text{αν } n \in \mathbb{Z}.$$

7) Πολλαπλασιάζουμε με x^2 τη δοθείσα Δ.Ε., η οποία γίνεται:
$x^2y''(x) + \Big(x^4 + \dfrac{1}{4}\Big)y(x) = 0,\ y(0) = 0.$
Συγκρίνοντας την προκύπτουσα Δ.Ε. με την Σ.Δ.Ε. (9.1) έχουμε: $1-2a = 0 \Rightarrow a = \frac{1}{2}$, $2\gamma = 4 \Rightarrow \gamma = 2$, $\beta^2\gamma^2 = 1 \Rightarrow \beta = \frac{1}{2}$ και $a^2 - n^2\gamma^2 = \frac{1}{4} \Rightarrow n = 0$. Συνεπώς,

$$y(x) = \sqrt{x}[C_1J_0(\frac{1}{2}x^2) + C_2Y_0(\frac{1}{2}x^2)].$$

Επειδή $y(0) = 0$ και $Y_n(0)$ απειρίζεται, άρα και η $Y_0(0)$, θα πρέπει $C_2 = 0$. Επομένως, $y(x) = C_1\sqrt{x}J_0(\dfrac{1}{2}x^2)$. Επίσης, $y'(x) = \dfrac{C_1}{2}x^{-1/2}J_0(\dfrac{1}{2}x^2) + C_1x\sqrt{x}J_0'(\dfrac{1}{2}x^2) \Longrightarrow$
$y'(x) = \dfrac{C_1}{2}x^{-1/2}J_0(\dfrac{1}{2}x^2) + C_1x^{3/2}J_0'(\dfrac{1}{2}x^2)$, όμως $y'(\alpha) = \sqrt{\alpha}$, οπότε
$\sqrt{\alpha} = \dfrac{C_1}{2}\alpha^{-1/2}J_0(\dfrac{\alpha^2}{2}) + C_1\alpha^{3/2}J_0'(\dfrac{\alpha^2}{2}) \Rightarrow \alpha = \dfrac{C_1}{2}J_0(\dfrac{\alpha^2}{2}) + C_1\alpha^2J_0'(\dfrac{\alpha^2}{2}) \Rightarrow$
$C_1 = \dfrac{2\alpha}{J_0\big(\frac{\alpha^2}{2}\big) - 2\alpha^2J_0'\big(\frac{\alpha^2}{2}\big)}$. Τελικά:

$$y(x) = \frac{2\alpha\sqrt{x}}{J_0\big(\frac{\alpha^2}{2}\big) - 2\alpha^2J_0'\big(\frac{\alpha^2}{2}\big)}J_0\big(\frac{x^2}{2}\big).$$

8) Συγκρίνουμε τη δοθείσα Δ.Ε. με την Σ.Δ.Ε. (9.1) κι έχουμε: $1-2a=1 \Rightarrow a=0$, $2\gamma=2 \Rightarrow \gamma=1$, $\beta^2\gamma^2=1 \Rightarrow \beta=1$ και $a^2-n^2\gamma^2=-\dfrac{9}{4} \Rightarrow n=\dfrac{3}{2}$. Συνεπώς, η γενική της λύση δίνεται από τη σχέση

$$y(x)=C_1J_{3/2}(x)+C_2J_{-3/2}(x).$$

Όμως, γνωρίζουμε ότι

$J_{3/2}(x)=\sqrt{\dfrac{2}{\pi x}}\Big(\dfrac{1}{x}\sin x-\cos x\Big)$ και $J_{-3/2}(x)=-\sqrt{\dfrac{2}{\pi x}}\Big(\dfrac{1}{x}\cos x+\sin x\Big)$.

Άρα, η γενική λύση της Δ.Ε. δίνεται από τη σχέση

$$y(x)=x^{-1/2}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\Big[\Big(\frac{C_1}{x}-C_2\Big)\sin x-\Big(C_1+\frac{C_2}{x}\Big)\cos x\Big].$$

9) Συγκρίνουμε τη δοθείσα Δ.Ε. με την Σ.Δ.Ε. (9.1) κι έχουμε: $1-2a=-2 \Rightarrow a=\dfrac{3}{2}$, $2\gamma=4 \Rightarrow \gamma=2$, $\beta^2\gamma^2=4 \Rightarrow \beta=1$ και $a^2-n^2\gamma^2=-4 \Rightarrow n=\dfrac{5}{4} \notin \mathbb{Z}$. Συνεπώς, η γενική της λύση δίνεται από τη σχέση

$$y(x)=x^{3/2}[C_1J_{5/4}(x^2)+C_2J_{-5/4}(x^2)].$$

10) Συγκρίνουμε τη δοθείσα Δ.Ε. με την Σ.Δ.Ε. (9.1) κι έχουμε: $1-2a=0 \Rightarrow a=\dfrac{1}{2}$, $2\gamma=\dfrac{3}{2} \Rightarrow \gamma=\dfrac{3}{4}$, $\beta^2\gamma^2=1 \Rightarrow \beta=\frac{4}{3}$ και $a^2-n^2\gamma^2=0 \Rightarrow n=\frac{2}{3} \notin \mathbb{Z}$. Συνεπώς, η γενική της λύση δίνεται από τη σχέση

$$y(x)=x^{\frac{1}{2}}[C_1J_{2/3}\big(\frac{4}{3}x^{\frac{3}{4}}\big)+C_2J_{-2/3}\big(\frac{4}{3}x^{\frac{3}{4}}\big)].$$

11) Συγκρίνουμε τη δοθείσα Δ.Ε. με την Σ.Δ.Ε. (9.1) κι έχουμε: $1-2a=1-2n \Rightarrow a=n$, $2\gamma=2 \Rightarrow \gamma=1$, $\beta^2\gamma^2=1 \Rightarrow \beta=1$ και $a^2-n^2\gamma^2=0$ ισχύει $\forall n$. Συνεπώς, η γενική της λύση δίνεται από τη σχέση

$$y(x)=x^n[C_1J_n(x)+C_2J_{-n}(x)] \qquad \text{αν } n\notin\mathbb{Z},$$

και

$$y(x)=x^n[C_1J_n(x)+C_2Y_n(x)] \qquad \text{αν } n\in\mathbb{Z}.$$

12)Συγκρίνουμε τη δοθείσα Δ.Ε. με την Σ.Δ.Ε. (9.1) κι έχουμε: $1-2a=1 \Rightarrow a=0$, $2\gamma=2 \Rightarrow \gamma=1$, $\beta^2\gamma^2=\frac{1}{2} \Rightarrow \beta=\frac{\sqrt{2}}{2}$ και $a^2-n^2\gamma^2=-\dfrac{1}{4} \Rightarrow n=\dfrac{1}{2}$. Συνεπώς, η γενική της λύση δίνεται από τη σχέση

$$y(x)=x[C_1J_{1/2}\big(\frac{\sqrt{2}}{2}x\big)+C_2J_{-1/2}\big(\frac{\sqrt{2}}{2}x\big)].$$

Όμως, γνωρίζουμε ότι $J_{1/2}(x)=\sqrt{\dfrac{2}{\pi x}}\sin x$ και $J_{-1/2}(x)=-\sqrt{\dfrac{2}{\pi x}}\cos x$.

Άρα, η γενική λύση της Δ.Ε. δίνεται από τη σχέση

$$y(x)=\frac{2}{\sqrt{\pi x\sqrt{2}}}\Big[C_1\sin\big(\frac{\sqrt{2}}{2}x\big)+C_2\cos\big(\frac{\sqrt{2}}{2}x\big)\Big].$$

Θέτοντας $A=\dfrac{2C_1}{\sqrt{\pi\sqrt{2}}}$ και $B=\dfrac{2C_2}{\sqrt{\pi\sqrt{2}}}$, έχουμε:

$$y(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}\Big[A\sin\big(\frac{\sqrt{2}}{2}x\big)+B\cos\big(\frac{\sqrt{2}}{2}x\big)\Big].$$

13) Συγκρίνουμε τη δοθείσα Δ.Ε. με την Σ.Δ.Ε. (9.1) κι έχουμε: $1-2a=0\Rightarrow a=\frac{1}{2}$, $2\gamma=2\Rightarrow\gamma=1$, $\beta^2\gamma^2=n^2\Rightarrow\beta=n$ και $a^2-n^2\gamma^2=\frac{1}{4}\Rightarrow n=0$. Συνεπώς,

$$y(x)=\sqrt{x}[C_1J_0(nx)+C_2Y_0(nx)].$$

Επειδή $y(0)=0$ και η $Y_0(x)$ απειρίζεται στο μηδέν, έπεται ότι $C_2=0$. Επομένως, $y(x)=C_1\sqrt{x}J_0(nx)$. Επίσης, $y'(x)=\dfrac{C_1}{2}x^{-1/2}J_0(nx)+C_1n\sqrt{x}J_0'(nx)$, όμως $y'(\alpha)=\sqrt{\alpha}$, οπότε $\sqrt{\alpha}=C_1\Big[\dfrac{1}{2}\alpha^{-1/2}J_0(n\alpha)+n\sqrt{\alpha}J_0'(n\alpha)\Rightarrow C_1=\dfrac{2\alpha}{J_0(n\alpha)+2n\alpha J_0'(n\alpha)}$.

Επειδή $J_0'(x)=-J_1(x)$, έχουμε: $C_1=\dfrac{2\alpha}{J_0(n\alpha)-2n\alpha J_1(n\alpha)}$.

Τελικά:

$$y(x)=\frac{2\alpha\sqrt{x}}{J_0(n\alpha)-2n\alpha J_1(n\alpha)}J_0(nx).$$

Άσκηση 2. Να λυθούν οι παρακάτω Δ.Ε. με τη βοήθεια των συναρτήσεων Bessel:

1) $y''(x)+(e^{2x}-n^2)y(x)=0$, 2) $y''(x)+\dfrac{\lambda^2}{x^4}e^{\frac{2\lambda}{x}}y(x)=0$,

3) $y''(x)+\dfrac{\alpha}{x}y'(x)+\big(be^{2x}+\dfrac{\alpha(\alpha-2)}{4x^2}-n^2\big)y(x)=0$.

Λύση:

1) Θέτουμε $e^{2x}=t\Rightarrow 2e^{2x}dx=dt\Rightarrow\dfrac{dt}{dx}=2e^{2x}\Rightarrow\dfrac{dt}{dx}=2t$, οπότε

$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{dy}{dt}\dfrac{dt}{dx}=2e^{2x}\dfrac{dy}{dt}=2t\dfrac{dy}{dt}$ και

$\dfrac{d^2y}{dx^2}=4e^{2x}\dfrac{dy}{dt}+2e^{2x}\dfrac{d^2y}{dt^2}2e^{2x}=4e^{4x}\dfrac{d^2y}{dt^2}+4e^{2x}\dfrac{dy}{dt}=4t^2\dfrac{d^2y}{dt^2}+4t\dfrac{dy}{dt}$.

Επομένως, η αρχική δ.ε. γίνεται:

$4t^2\dfrac{d^2y}{dt^2}+4t\dfrac{dy}{dt}+(t-n^2)y(t)=0\Rightarrow t^2\dfrac{d^2y}{dt^2}+t\dfrac{dy}{dt}+\big(\dfrac{t}{4}-\dfrac{n^2}{4}\big)y(t)=0.$

Συγκρίνοντας την προκύπτουσα Δ.Ε. με την Σ.Δ.Ε. (9.1) έχουμε: $1-2a=1\Rightarrow a=0$, $2\gamma=1\Rightarrow\gamma=\dfrac{1}{2}$, $\beta^2\gamma^2=\dfrac{1}{4}\Rightarrow\beta=1$ και $a^2-n^2\gamma^2=-\dfrac{n^2}{4}$ ισχύει $\forall n$. Συνεπώς, η γενική λύση της δοθείσας δίνεται από τη σχέση

$$y(t)=[C_1J_n(t^{\frac{1}{2}})+C_2J_{-n}(t^{\frac{1}{2}})]\qquad\text{αν } n\notin\mathbb{Z},$$

και
$$y(t) = [C_1 J_n(t^{\frac{1}{2}}) + C_2 Y_n(t^{\frac{1}{2}})] \qquad \text{αν } n \in \mathbb{Z}.$$
Άρα:
$$y(x) = [C_1 J_n(e^x) + C_2 J_{-n}(e^x)] \qquad \text{αν } n \notin \mathbb{Z},$$
και
$$y(x) = [C_1 J_n(e^x) + C_2 Y_n(e^x)] \qquad \text{αν } n \in \mathbb{Z}.$$
2) Θέτουμε $\dfrac{\lambda}{x} = t \Rightarrow \dfrac{\lambda}{t} = x \Rightarrow -\dfrac{\lambda}{t^2}dt = dx \Rightarrow \dfrac{dx}{dt} = -\dfrac{\lambda}{t^2}$, οπότε

$\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy}{dt}\dfrac{dt}{dx} = -\dfrac{t^2}{\lambda}\dfrac{dy}{dt}$ και

$\dfrac{d^2y}{dx^2} = \dfrac{d}{dx}\big(-\dfrac{t^2}{\lambda}\dfrac{dy}{dt}\big) = \dfrac{d}{dt}\big(-\dfrac{t^2}{\lambda}\dfrac{dy}{dt}\big)\dfrac{dt}{dx} = -\dfrac{t^2}{\lambda}\big(-\dfrac{2t}{\lambda}\dfrac{dy}{dt} - \dfrac{t^2}{\lambda}\dfrac{d^2y}{dt^2}\big) = \dfrac{2t^3}{\lambda^2}\dfrac{dy}{dt} + \dfrac{t^4}{\lambda^2}\dfrac{d^2y}{dt^2}$.

Επομένως, η αρχική δ.ε. γίνεται:

$\dfrac{t^4}{\lambda^2}\dfrac{d^2y}{dt^2} + \dfrac{2t^3}{\lambda^2}\dfrac{dy}{dt} + \dfrac{t^4}{\lambda^2}e^{2t}y(t) = 0 \Rightarrow \dfrac{d^2y}{dt^2} + \dfrac{2}{t}\dfrac{dy}{dt} + e^{2t}y(t) = 0.$

Αν θέσουμε $y(t) = u(t)e^{-\frac{1}{2}\int \frac{2}{t}dt} = \dfrac{u(t)}{t}$, τότε αντικαθιστώστας προκύπτει η δ.ε. $u''(t) + e^{2t}u(t) = 0$. Εδώ θέτουμε $e^{2t} = z \Rightarrow 2e^{2t} = dz$, οπότε

$\dfrac{du}{dt} = \dfrac{du}{dz}\dfrac{dz}{dt} = 2e^{2t}\dfrac{du}{dz} = 2z\dfrac{du}{dz}$ και

$\dfrac{d^2u}{dt^2} = \dfrac{d}{dt}\big(2e^{2t}\dfrac{du}{dz}\big) = 4e^{2t}\dfrac{du}{dz} + 4e^{4t}\dfrac{d^2u}{dz^2} = 4z\dfrac{du}{dz} + 4z^2\dfrac{d^2u}{dz^2}$.

Επομένως, η δ.ε. γίνεται:

$4z^2\dfrac{d^2u}{dz^2} + 4z\dfrac{du}{dz} + zu(z) = 0 \Rightarrow z^2\dfrac{d^2u}{dz^2} + z\dfrac{du}{dz} + \dfrac{1}{4}zu(z) = 0.$

Συγκρίνοντας την προκύπτουσα Δ.Ε. με την Σ.Δ.Ε. (9.1) έχουμε: $1-2a = 1 \Rightarrow a = 0$, $2\gamma = 1 \Rightarrow \gamma = \dfrac{1}{2}$, $\beta^2\gamma^2 = \dfrac{1}{4} \Rightarrow \beta = 1$ και $a^2 - n^2\gamma^2 = 0 \Rightarrow n = 0$. Συνεπώς, η γενική λύση της δοθείσας δίνεται από τη σχέση
$$u(z) = C_1 J_0(z^{1/2}) + C_2 Y_0(z^{1/2})$$
ή
$$u(t) = C_1 J_0(e^t) + C_2 Y_0(e^t)$$
ή
$$y(t) = \frac{1}{t}\big[C_1 J_0(e^t) + C_2 Y_0(e^t)\big].$$
Άρα:
$$y(x) = \frac{x}{\lambda}\big[C_1 J_0(e^{\lambda/x}) + C_2 Y_0(e^{\lambda/x})\big].$$
3) Αν θέσουμε $y(x) = u(x)e^{-\frac{1}{2}\int \frac{\alpha}{x}dx} = u(x)x^{-\alpha/2}$ και παραγωγίζοντας καταλήγουμε στη δ.ε.

$u''(x) + (be^{2x} - n^2)u(x) = 0$. Εδώ θέτουμε $e^{2x} = z \Rightarrow 2e^{2x} = dz$, οπότε

$\frac{du}{dx} = \frac{du}{dz}\frac{dz}{dx} = 2z\frac{du}{dz}$ και $\frac{d^2u}{dx^2} = 4z\frac{du}{dz} + 4z^2\frac{d^2u}{dz^2}$. Επομένως, η δ.ε. γίνεται:
$4z^2\frac{d^2u}{dz^2} + 4z\frac{du}{dz} + (bz - n^2)u(z) = 0 \Rightarrow z^2\frac{d^2u}{dz^2} + z\frac{du}{dz} + (\frac{b}{4}z - \frac{n^2}{4})u(z) = 0$.
Συγκρίνοντας την προκύπτουσα Δ.Ε. με την Σ.Δ.Ε. (9.1) έχουμε: $1-2a = 1 \Rightarrow a = 0$, $2\gamma = 1 \Rightarrow \gamma = \frac{1}{2}$, $\beta^2\gamma^2 = \frac{b}{4} \Rightarrow \beta = \sqrt{b}$ και $a^2 - n^2\gamma^2 = -\frac{n^2}{4}$ ισχύει $\forall n$. Συνεπώς, η γενική λύση της δοθείσας δίνεται από τη σχέση

$$u(z) = C_1 J_n(\sqrt{b}\sqrt{z}) + C_2 J_{-n}(\sqrt{b}\sqrt{z}) \qquad \text{αν } n \notin \mathbb{Z}$$

και

$$u(z) = C_1 J_n(\sqrt{b}\sqrt{z}) + C_2 Y_n(\sqrt{b}\sqrt{z}) \qquad \text{αν } n \in \mathbb{Z}$$

ή

$$u(x) = C_1 J_n(\sqrt{b}e^x) + C_2 J_{-n}(\sqrt{b}e^x) \qquad \text{αν } n \notin \mathbb{Z}$$

και

$$u(x) = C_1 J_n(\sqrt{b}e^x) + C_2 Y_n(\sqrt{b}e^x) \qquad \text{αν } n \in \mathbb{Z}.$$

Άρα:

$$y(x) = x^{-\alpha/2}[C_1 J_n(\sqrt{b}e^x) + C_2 J_{-n}(\sqrt{b}e^x)] \qquad \text{αν } n \notin \mathbb{Z}$$

και

$$y(x) = x^{-\alpha/2}[C_1 J_n(\sqrt{b}e^x) + C_2 Y_n(\sqrt{b}e^x)] \qquad \text{αν } n \in \mathbb{Z}.$$

Βιβλιογραφία

Μασσαλάς Χ. (2010) *Ειδικές Συναρτήσεις*, Cutenberg.

Σιαφαρίκας Π. (2009) *Ειδικές Συναρτήσεις*, Εκδόσεις Πανεπιστημίου Πατρών.

Hochstadt H. (1986) *The function of Mathematical Physics*, Dover Publications, Inc. N.Y..

Lebedev N.N. (1972) *Special functions and their Applications*, Dover Publications.

Luke Y. L. (1969) *The special functions and their Approximations-Volume I*, Academic Press.

Watson G. N. (1966) *A treatise on the theory of Bessel functions*, Cambridge University Press.