Τίτλος Μαθήματος: Ειδικές Συναρτήσεις

Ενότητα: Τροποποιημένες συναρτήσεις Bessel

Όνομα Καθηγήτριας: Χρυσή Κοκολογιαννάκη

Τμήμα: Μαθηματικών

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Πατρών**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Ενότητα 5

8 Τροποποιημένες Συναρτήσεις Bessel

Η διαφορική εξίσωση

$$z^2y''(z) + zy'(z) - (z^2 + \nu^2)y(z) = 0 \tag{8.1}$$

λέγεται τροποποιημένη δ.ε. Bessel και προκύπτει από την δ.ε. Bessel
$t^2\tilde{y}''(t) + t\tilde{y}'(t) + (t^2 - \nu^2)\tilde{y}(t) = 0$, αν θέσουμε όπου t το $\mathrm{i}z$. Πράγματι, θα έχουμε: $dt = \mathrm{i}dz$, άρα: $\dfrac{d\tilde{y}}{dt} = \dfrac{dy}{dz}\dfrac{dz}{dt} = \dfrac{1}{\mathrm{i}}\dfrac{dy}{dz}$ και $\dfrac{d^2\tilde{y}}{dt^2} = \dfrac{1}{\mathrm{i}^2}\dfrac{d^2y}{dz^2} = -\dfrac{d^2y}{dz^2}$.
Άρα, $-\mathrm{i}^2z^2\dfrac{d^2y}{dz^2} + \mathrm{i}\dfrac{z}{\mathrm{i}}\dfrac{dy}{dz} + (\mathrm{i}^2z^2 - \nu^2)y(z) = 0 \Rightarrow z^2\dfrac{d^2y}{dz^2} + z\dfrac{dy}{dz} - (z^2 + \nu^2)y(z) = 0$.
Οπότε, η γενική λύση της (8.1) είναι η συνάρτηση:

$$y(z) = AJ_\nu(\mathrm{i}z) + BY_\nu(\mathrm{i}z). \tag{8.2}$$

Επειδή,

$$\begin{aligned} J_\nu(\mathrm{i}z) &= \sum_{\kappa=0}^{\infty} \frac{(-1)^\kappa}{\Gamma(\nu+\kappa+1)\kappa!}\left(\frac{\mathrm{i}z}{2}\right)^{2\kappa+\nu} = \mathrm{i}^\nu \sum_{\kappa=0}^{\infty} \frac{(-1)^\kappa \mathrm{i}^{2\kappa}}{\Gamma(\nu+\kappa+1)\kappa!}\left(\frac{z}{2}\right)^{2\kappa+\nu} \\ &= \mathrm{i}^\nu \sum_{\kappa=0}^{\infty} \frac{1}{\Gamma(\nu+\kappa+1)\kappa!}\left(\frac{z}{2}\right)^{2\kappa+\nu}, \end{aligned} \tag{8.3}$$

ορίζουμε τη συνάρτηση $I_\nu(z) = \displaystyle\sum_{\kappa=0}^{\infty} \frac{1}{\Gamma(\nu+\kappa+1)\kappa!}\left(\frac{z}{2}\right)^{2\kappa+\nu}$, την ονομάζουμε τροποποιημένη συνάρτηση Bessel πρώτου είδους και τάξης ν, και λόγω της (8.3) συνδέεται με την $J_\nu(\mathrm{i}z)$ μέσω της σχέσης:

$$I_\nu(z) = \mathrm{i}^{-\nu} J_\nu(\mathrm{i}z). \tag{8.4}$$

Πρόταση 8.1: Για $\nu = n \in \mathbb{Z}$, ισχύει η ισότητα:

$$I_{-n}(z) = I_n(z). \tag{8.5}$$

Απόδειξη. Για $\nu = n \in \mathbb{Z}$, ισχύει:

$$I_{-n}(z) \overset{(8.4)}{=} \mathrm{i}^n J_{-n}(\mathrm{i}z) \underset{5.3}{\overset{\text{Πρ.}}{=}} \mathrm{i}^n(-1)^n J_n(\mathrm{i}z) = \mathrm{i}^n(-1)^n \mathrm{i}^n I_n(z) = I_n(z). \qquad \square$$

Οπότε οι συναρτήσεις $I_{-n}(z), I_n(z)$ είναι γραμμικώς εξαρτημένες. Για $\nu = n \in \mathbb{Z}$, η γραμμικώς ανεξάρτητη λύση της δ.ε. (8.1) είναι η συνάρτηση $K_n(z)$, που ονομάζεται τροποποιημένη συνάρτηση Bessel δευτέρου είδους και τάξης n και ορίζεται ως:

$$K_n(z) = \frac{\pi}{2}\frac{I_{-n}(z) - I_n(z)}{\sin(n\pi)}. \tag{8.6}$$

Αποδεικνύεται ότι ικανοποιεί την (8.1), εγαζόμενοι με όμοιο τρόπο όπως στην $Y_n(z)$. Επίσης, είναι γραμμικώς ανεξάρτητη της $I_n(z)$, διότι, αποδεικνύεται ότι:

$$W[I_n(z), K_n(z)] = I_n(z)K_n'(z) - I_n'(z)K_n(z) = -\frac{1}{z} \neq 0.$$

Σημείωση 8.1: Οι τροποποιημένες συναρτήσεις Bessel πρώτου και δευτέρου είδους ικανοποιούν αντίστοιχες αναδρομικές σχέσεις με τις συναρτήσεις Bessel πρώτου και δευτέρου είδους. Η απόδειξη αυτών βασίζεται στη σχέση που συνδέει τις $I_\nu(z)$ και $J_n(z)$, καθώς και τον ορισμό της $K_n(z)$.

Ασκήσεις

Άσκηση 1. Να δειχθούν οι παρακάτω αναδρομικές σχέσεις:

i) $\dfrac{d}{dx}\{x^{-n}I_n(x)\} = x^{-n}I_{n+1}(x)$,

ii) $\dfrac{d}{dx}\{x^{-n}K_n(x)\} = -x^{-n}K_{n+1}(x)$.

Λύση:

i) Στην αναδρομική σχέση (6.2) του θεωρήματος 6.1, αντικαθιστούμε όπου x το $\mathrm{i}x$, απ' την οποία προκύπτει:

$$\frac{d}{d(\mathrm{i}x)}\{\mathrm{i}^{-n}x^{-n}J_n(\mathrm{i}x)\} = -\mathrm{i}^{-n}x^{-n}J_{n+1}(\mathrm{i}x)$$

κι επειδή $I_n(x) = \mathrm{i}^{-n}J_n(\mathrm{i}x)$, τότε παίρνουμε:

$$\frac{1}{\mathrm{i}}\frac{d}{dx}\{\mathrm{i}^{-n}x^{-n}\mathrm{i}^{n}I_n(x)\} = -\mathrm{i}^{-n}x^{-n}\mathrm{i}^{n+1}I_{n+1}(x) \Rightarrow -\mathrm{i}\frac{d}{dx}\{x^{-n}I_n(x)\} = -\mathrm{i}x^{-n}I_{n+1}(x)$$
$$\Rightarrow \frac{d}{dx}\{x^{-n}I_n(x)\} = x^{-n}I_{n+1}(x).$$

ii) Η απόδειξη για την αναδρομική σχέση $\dfrac{d}{dx}\{x^{-n}K_n(x)\} = -x^{-n}K_{n+1}(x)$ βασίζεται στην ισότητα:

$$K_n(x) = \frac{\pi}{2}\mathrm{i}^{n+1}[J_n(\mathrm{i}x) + \mathrm{i}Y_n(\mathrm{i}x)]. \qquad \text{(να δειχθεί!)}$$

Πολλαπλασιάζουμε και τα δύο μέλη της παραπάνω ισότητας με x^{-n} και παραγωγίζουμε ως προς x:

$$\frac{d}{dx}\{x^{-n}K_n(x)\} = \frac{\pi}{2}\mathrm{i}^{n+1}\Big[\frac{d}{dx}\{x^{-n}J_n(\mathrm{i}x)\} + \mathrm{i}\frac{d}{dx}\{x^{-n}Y_n(\mathrm{i}x)\}\Big]. \qquad (*)$$

Όμως, γνωρίζουμε ότι ισχύουν οι παρακάτω αναδρομικές σχέσεις για τις συναρτήσεις $J_n(x)$, $Y_n(x)$ αντίστοιχα:

$$\frac{d}{dx}\{x^{-n}J_n(x)\} = -x^{-n}J_{n+1}(x), \qquad \frac{d}{dx}\{x^{-n}Y_n(x)\} = -x^{-n}Y_{n+1}(x).$$

Θέτουμε στην πρώτη από τις παραπάνω αναδρομικές σχέσεις όπου x το ix, απ' την οποία παίρνουμε:

$$\frac{d}{d(\mathrm{i}x)}\{\mathrm{i}^{-n}x^{-n}J_n(\mathrm{i}x)\} = -\mathrm{i}^{-n}x^{-n}J_{n+1}(\mathrm{i}x) \Rightarrow \frac{1}{\mathrm{i}}\mathrm{i}^{-n}\frac{d}{dx}\{x^{-n}J_n(\mathrm{i}x)\} = -\mathrm{i}^{-n}x^{-n}J_{n+1}(\mathrm{i}x)$$
$$\Rightarrow \frac{d}{dx}\{x^{-n}J_n(\mathrm{i}x)\} = -\mathrm{i}x^{-n}J_{n+1}(\mathrm{i}x),$$

ομοίως: $\dfrac{d}{dx}\{x^{-n}Y_n(\mathrm{i}x)\} = -\mathrm{i}x^{-n}Y_{n+1}(\mathrm{i}x)$.
Αντικαθιστούμε τα παραπάνω στην $(*)$:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\{x^{-n}K_n(x)\} &= \frac{\pi}{2}\mathrm{i}^{n+1}\big[-\mathrm{i}x^{-n}J_{n+1}(\mathrm{i}x) - \mathrm{i}^2x^{-n}Y_{n+1}(\mathrm{i}x)\big]\\ &= -x^{-n}\frac{\pi}{2}\mathrm{i}^{n+2}[J_{n+1}(\mathrm{i}x) + \mathrm{i}Y_{n+1}(\mathrm{i}x)]\\ &= -x^{-n}K_{n+1}(x).\end{aligned}$$

Άσκηση 2. Να δειχθούν οι παρακάτω σχέσεις:

i) $I_0'(x) = I_1(x), \quad I_{1/2}(x) = \sqrt{\dfrac{2}{\pi x}}\sinh x, \quad I_{-1/2}(x) = \sqrt{\dfrac{2}{\pi x}}\cosh x,$

ii) $K_0'(x) = -K_1(x), \quad K_{-n}(x) = K_n(x), \quad K_{1/2}(x) = K_{-1/2}(x) = \sqrt{\dfrac{\pi}{2x}}e^{-x},$

iii) $K_{3/2}(x) = \Big(1 + \dfrac{1}{x}\Big)K_{1/2}(x).$

Λύση:

i) Στην αναδρομική σχέση $\dfrac{d}{dx}[x^{-n}I_n(x)] = x^{-n}I_{n+1}(x)$ θέτουμε $n = 0$, οπότε:

$$\frac{d}{dx}[x^{-0}I_0(x)] = x^{-0}I_1(x) \Rightarrow I_0'(x) = I_1(x).$$

Γνωρίζουμε ότι $J_{1/2}(x) = \sqrt{\dfrac{2}{\pi x}}\sin x$, οπότε θέτουμε όπου x το ix. Έτσι,

$J_{1/2}(\mathrm{i}x) = \sqrt{\dfrac{2}{\pi \mathrm{i}x}}\sin(\mathrm{i}x) = \sqrt{\dfrac{2}{\pi \mathrm{i}x}}\dfrac{e^{\mathrm{i}(\mathrm{i}x)} - e^{-\mathrm{i}(\mathrm{i}x)}}{2\mathrm{i}} = \sqrt{\dfrac{2}{\pi \mathrm{i}x}}\dfrac{e^{-x} - e^{x}}{2\mathrm{i}}.$
Επιπλέον

$$I_{1/2}(x) = \mathrm{i}^{-1/2}J_{1/2}(\mathrm{i}x) = \frac{1}{\mathrm{i}}\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\frac{e^{-x} - e^{x}}{2\mathrm{i}} = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\frac{e^{-x} - e^{x}}{2} = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sinh x.$$

Επίσης, γνωρίζουμε ότι $J_{-1/2}(x) = \sqrt{\dfrac{2}{\pi x}}\cos x$, επομένως

$$I_{-1/2}(x) = \mathrm{i}^{1/2}J_{-1/2}(\mathrm{i}x) = \mathrm{i}^{1/2}\sqrt{\frac{2}{\pi \mathrm{i}x}}\cos(\mathrm{i}x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\frac{e^{\mathrm{i}(\mathrm{i}x)} + e^{-\mathrm{i}(\mathrm{i}x)}}{2} = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cosh x.$$

ii) Στην αναδρομική σχέση $\dfrac{d}{dx}[x^{-n}K_n(x)] = -x^{-n}K_{n+1}(x)$ θέτουμε $n=0$, οπότε:

$$\frac{d}{dx}[x^0 K_0(x)] = -x^0 K_1(x) \Rightarrow K_0'(x) = -K_1(x).$$

Εξ ορισμού $K_n(x) = \dfrac{\pi}{2}\dfrac{I_{-n}(x)-I_n(x)}{\sin(n\pi)}$, θέτουμε όπου n το $-n$, οπότε:

$$K_{-n}(x) = \frac{\pi}{2}\frac{I_n(x)-I_{-n}(x)}{\sin(-n\pi)} = -\frac{\pi}{2}\frac{I_n(x)-I_{-n}(x)}{\sin(n\pi)} = \frac{\pi}{2}\frac{I_{-n}(x)-I_n(x)}{\sin(n\pi)} = K_n(x).$$

Επιπλέον,

$$K_{1/2}(x) = K_{-1/2}(x) = \frac{\pi}{2}\frac{I_{-1/2}(x)-I_{1/2}(x)}{\sin(\pi/2)} = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{2}{\pi x}}[\cosh x - \sinh x] = \sqrt{\frac{\pi}{2x}}e^{-x}.$$

iii) Στην αναδρομική σχέση $K_{n-1}(x) - K_{n+1}(x) = -\dfrac{2n}{x}K_n(x)$ θέτουμε $n = \dfrac{1}{2}$, οπότε:

$$K_{-1/2}(x) - K_{3/2}(x) = -\frac{1}{x}K_{1/2}(x) \Rightarrow K_{3/2}(x) = K_{1/2}(x) + \frac{1}{x}K_{1/2}(x) = \Big(1+\frac{1}{x}\Big)K_{1/2}(x).$$

Άσκηση 3. Να δειχθεί ότι:

i) $I_n(x)K_n'(x) - I_n'(x)K_n(x) = -\dfrac{1}{x}$,

ii) $K_{n+1}(x)I_n(x) + K_n(x)I_{n+1}(x) = \dfrac{1}{x}$.

Λύση:

$$\begin{aligned}
\textbf{i)}\ W[I_n(x), K_n(x)] &= I_n(x)K_n'(x) - I_n'(x)K_n(x) \\
&= I_n(x)\Big[\frac{\pi}{2}\frac{I_{-n}'(x)-I_n'(x)}{\sin(n\pi)}\Big] - I_n'(x)\Big[\frac{\pi}{2}\frac{I_{-n}(x)-I_n(x)}{\sin(n\pi)}\Big] \\
&= \frac{\pi}{2\sin(n\pi)}\big[I_n(x)I_{-n}'(x) - I_n'(x)I_{-n}(x)\big] \\
&= \frac{\pi}{2\sin(n\pi)}\big[\mathrm{i}^{-n}J_n(\mathrm{i}x)[\mathrm{i}^n J_{-n}(\mathrm{i}x)]' - [\mathrm{i}^{-n}J_n(\mathrm{i}x)]'\mathrm{i}^n J_{-n}(\mathrm{i}x)\big] \\
&= \frac{\pi}{2\sin(n\pi)}\big[\mathrm{i}J_n(\mathrm{i}x)J_{-n}'(\mathrm{i}x) - \mathrm{i}J_n'(\mathrm{i}x)J_{-n}(\mathrm{i}x)\big] \\
&= \frac{\pi\mathrm{i}}{2\sin(n\pi)}\Big(-\frac{2\sin(n\pi)}{\pi\mathrm{i}x}\Big) \\
&= -\frac{1}{x}
\end{aligned}$$

αφού $W[J_n(x), J_{-n}(x)] = -\dfrac{2\sin(n\pi)}{\pi x}, \quad n \notin \mathbb{Z}$.

ii) Για να δείξουμε τη ζητούμενη ισότητα, αντικαθιστούμε στην ισότητα του προηγούμενου ερωτήματος που δείξαμε τα $K_n'(x)$, $I_n'(x)$ από τις αναδρομικές σχέσεις

$K_n'(x) = \dfrac{n}{x}K_n(x) - K_{n+1}(x)$ και $I_n'(x) = \dfrac{n}{x}I_n(x) + I_{n+1}(x)$, αντίστοιχα. Οπότε:

$I_n(x)\big[\dfrac{n}{x}K_n(x) - K_{n+1}(x)\big] - K_n(x)\big[\dfrac{n}{x}I_n(x) + I_{n+1}(x)\big] = -\dfrac{1}{x} \Rightarrow$

$$I_n(x)K_{n+1}(x) + K_n(x)I_{n+1}(x) = \frac{1}{x}.$$

Άσκηση 4. Να δειχθεί ότι ισχύει: $e^{\frac{x}{2}\left(t+\frac{1}{t}\right)} = \displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} I_n(x)t^n$ και να επαληθευτούν οι παρακάτω ταυτότητες:

i) $\cos(x\sinh\phi) = I_0(x) + 2\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n I_{2n}(x)\cosh(2n\phi)$,

ii) $\sin(x\sinh\phi) = 2\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n I_{2n+1}(x)\sinh((2n+1)\phi)$.

Λύση:

Η γεννήτρια συνάρτηση των $J_n(x)$ δίνεται από την ισότητα $e^{\frac{x}{2}(t-\frac{1}{t})} = \displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x)t^n$ και αντικαθιστώντας στο $\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} I_n(x)t^n$ τη σχέση $I_n(x) = \mathrm{i}^{-n}J_n(\mathrm{i}x)$, τότε:

$\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} I_n(x)t^n = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathrm{i}^{-n}J_n(\mathrm{i}x)t^n = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(\mathrm{i}x)\left(\frac{t}{\mathrm{i}}\right)^n = e^{\frac{\mathrm{i}x}{2}\left(\frac{t}{\mathrm{i}}-\frac{\mathrm{i}}{t}\right)} = e^{\frac{x}{2}\left(t+\frac{1}{t}\right)}.$

Στη συνέχεια, θέτουμε $t = \mathrm{i}e^{\phi}$:

$$\begin{aligned}
e^{\frac{x}{2}\left(\mathrm{i}e^{\phi}+\frac{1}{\mathrm{i}e^{\phi}}\right)} &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} I_n(x)(\mathrm{i}e^{\phi})^n \Rightarrow \\
e^{\frac{\mathrm{i}x}{2}\left(e^{\phi}-e^{-\phi}\right)} &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} I_n(x)\mathrm{i}^n e^{n\phi} \Rightarrow \\
e^{\mathrm{i}x\sinh\phi} &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathrm{i}^n I_n(x)e^{n\phi} \Rightarrow \\
\cos(x\sinh\phi) + \mathrm{i}\sin(x\sinh\phi) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathrm{i}^n I_n(x)[\cosh(n\phi) + \sinh(n\phi)]
\end{aligned}$$

Αν n είναι άρτιος, τότε $\cos(x\sinh\phi) = \displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathrm{i}^{2n} I_{2n}(x)[\cosh(2n\phi)+\sinh(2n\phi)]$, ενώ αν n είναι περιττός, τότε $\sin(x\sinh\phi) = \displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathrm{i}^{2n} I_{2n+1}(x)[\cosh((2n+1)\phi)+\sinh((2n+1)\phi)]$.

Έτσι,

$$\begin{aligned}\cos(x\sinh\phi) &= I_0(x)[\cosh 0+\sinh 0]+\sum_{n=-\infty}^{-1}(-1)^n I_{2n}(x)[\cosh(2n\phi)+\sinh(2n\phi)]\\ &\quad+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n I_{2n}(x)[\cosh(2n\phi)+\sinh(2n\phi)]\end{aligned}$$

Θέτοντας στο πρώτο άθροισμα της παραπάνω ισότητας όπου n το $-n$ και λαμβάνοντας υπ' όψιν ότι $I_n(x)=I_{-n}(x)$, τότε

$$\begin{aligned}\cos(x\sinh\phi) &= I_0(x)+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{-n} I_{-2n}(x)[\cosh(-2n\phi)+\sinh(-2n\phi)]\\ &\quad+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n I_{2n}(x)[\cosh(2n\phi)+\sinh(2n\phi)] \Rightarrow\\ \cos(x\sinh\phi) &= I_0(x)+2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n I_{2n}(x)\cosh(2n\phi).\end{aligned}$$

Ανάλογα, έχουμε $\sin(x\sinh\phi)=2\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n I_{2n+1}(x)\sinh((2n+1)\phi)$.

Βιβλιογραφία

Μασσαλάς Χ. (2010) *Ειδικές Συναρτήσεις*, Cutenberg.

Σιαφαρίκας Π. (2009) *Ειδικές Συναρτήσεις*, Εκδόσεις Πανεπιστημίου Πατρών.

Hochstadt H. (1986) *The function of Mathematical Physics*, Dover Publications, Inc. N.Y..

Lebedev N.N. (1972) *Special functions and their Applications*, Dover Publications.

Luke Y. L. (1969) *The special functions and their Approximations-Volume I*, Academic Press.

Watson G. N. (1966) *A treatise on the theory of Bessel functions*, Cambridge University Press.