Τίτλος Μαθήματος: Ειδικές Συναρτήσεις

Ενότητα: Γεννήτρια συνάρτηση των συναρτήσεων Bessel

Όνομα Καθηγήτριας: Χρυσή Κοκολογιαννάκη

Τμήμα: Μαθηματικών

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Πατρών**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Ενότητα 4

7 Γεννήτρια Συνάρτηση των συναρτήσεων Bessel

Η γεννήτρια συνάρτηση των συναρτήσεων Bessel $J_n(z),\ \ n = 0, \pm1, \pm2, \dots$, είναι μια συνάρτηση δύο μεταβλητών z και t, $f(z,t)$, και είναι τέτοια ώστε οι συναρτήσεις $J_n(z)$ να είναι οι συντελεστές του t^n στο ανάπτυγμα της συνάρτησης $f(z,t)$ σε σειρά Laurent, δηλαδή:

$$f(z,t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(z)t^n$$

η οποία συγκλίνει απολύτως για $0 < |t| < \infty$.

Πρόταση 7.1: Να δειχθεί ότι η γεννήτρια συνάρτηση των συναρτήσεων Bessel είναι:

$$f(z,t) = e^{\frac{z}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(z)t^n. \tag{7.1}$$

Απόδειξη. Θα βρούμε τη γεννήτρια συνάρτηση $f(z,t)$ χρησιμοποιώνταςτην αναδρομική σχέση τριών όρων για την $J_n(z)$, δηλαδή:

$$J_{n-1}(z) + J_{n+1}(z) = \frac{2n}{z} J_n(z). \tag{7.2}$$

Πολλαπλασιάζουμε τη σχέση αυτή με t^n και αθροίζουμε ως προς n από $-\infty$ έως ∞, οπότε:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} J_{n-1}(z)t^n + \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_{n+1}(z)t^n = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{2n}{z} J_n(z)t^n. \tag{7.3}$$

Προκειμένου να χρησιμοποιήσουμε την ισότητα $f(z,t) = \displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(z)t^n$ και την:

$$\frac{\partial f(z,t)}{\partial t} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} n\, J_n(z)t^{n-1}, \tag{7.4}$$

γράφω την (7.3) στη μορφή:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(z)t^{n+1} + \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(z)t^{n-1} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{2n}{z} J_n(z)t^n \underset{(7.4)}{\overset{(7.1)}{\Longrightarrow}} tf(z,t) + \frac{1}{t}f(z,t) = \frac{2}{z}t\frac{\partial f(z,t)}{\partial t}$$

$$\Rightarrow \left(t + \frac{1}{t}\right)f(z,t) = \frac{2t}{z}\frac{\partial f(z,t)}{\partial t} \Rightarrow \frac{\frac{\partial f(z,t)}{\partial t}}{f(z,t)} = \frac{z}{2} + \frac{z}{2t^2} \underset{\text{ως προς } t}{\overset{\text{ολοκλήρωση}}{\Longrightarrow}} \ln|f(z,t)| = \frac{z}{2}t - \frac{z}{2t} + \phi_1(z)$$

$$\Rightarrow f(z,t) = \phi(z)e^{\frac{z}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right)}. \tag{7.5}$$

Άρα:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(z)t^n = \phi(z)e^{\frac{zt}{2}}e^{-\frac{z}{2t}}. \tag{7.6}$$

Για τον υπολογισμό της συνάρτησης $\phi(z)$, γράφουμε τις εκθετικές συναρτήσεις $e^{\frac{zt}{2}}$ και $e^{-\frac{z}{2t}}$ υπό μορφή σειράς στην (7.6), οπότε:

$$\Rightarrow \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(z)t^n = \phi(z) \sum_{\substack{j=0\\k=0}}^{\infty} \frac{\left(\frac{zt}{2}\right)^j}{j!} \frac{(-1)^k\left(\frac{z}{2t}\right)^k}{k!}$$

$$\Rightarrow \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(z)t^n = \phi(z) \sum_{\substack{j=0\\k=0}}^{\infty} \frac{\left(\frac{z}{2}\right)^{j+k}(-1)^k t^{j-k}}{k!\,j!}. \tag{7.7}$$

Ο συντελεστής του t^0 στο $1^{\text{ο}}$ μέλος της ισότητας (7.7) είναι το $J_0(z)$ και στο $2^{\text{ο}}$ μέλος είναι το γινόμενο $\phi(z)$ επί την σειρά που προκύπτει αν $j = k$, δηλαδή:

$$\phi(z) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{z}{2}\right)^{2k}(-1)^k}{k!\,k!} = \phi(z) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{z}{2}\right)^{2k}(-1)^k}{k!\,\Gamma(k+1)} = \phi(z)J_0(z).$$

Οπότε, για να ισχύει η ισότητα: $J_0(z) = \phi(z)J_0(z)$, θα πρέπει $\phi(z) = 1$. Άρα, η (7.5) παίρνει τη μορφή:

$$f(z,t) = e^{\frac{z}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right)}. \qquad \square$$

Ασκήσεις

Άσκηση 1. Με τη βοήθεια της γεννήτριας συνάρτησης των συναρτήσεων Bessel, $f(x,t) = e^{\frac{x}{2}(t-\frac{1}{t})} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x)t^n$, να βρεθούν οι αναδρομικές σχέσεις που ικανοποιούν οι συναρτήσεις Bessel.

Λύση:

Παραγωγίζουμε ως προς x τη γεννήτρια συνάρτηση:

$$\frac{1}{2}\big(t-\frac{1}{t}\big)e^{\frac{x}{2}(t-\frac{1}{t})} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n'(x)t^n \Rightarrow \frac{1}{2}\big(t-\frac{1}{t}\big) \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x)t^n = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n'(x)t^n$$

$$\frac{1}{2}t \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x)t^n - \frac{1}{2t} \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x)t^n = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n'(x)t^n \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x)t^{n+1} - \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x)t^{n-1} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n'(x)t^n \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_{n-1}(x)t^n - \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_{n+1}(x)t^n = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n'(x)t^n$$

και εξισώνουμε τους συντελεστές του όρου t^n:

$$\frac{1}{2}\big[J_{n-1}(x) - J_{n+1}(x)\big] = J_n'(x),$$

που είναι η αναδρομική σχέση (6.5) του θεωρήματος 6.1.

Παραγωγίζουμε ως προς t τη γεννήτρια συνάρτηση:

$$\Big(\frac{x}{2}+\frac{x}{2t^2}\Big)e^{\frac{x}{2}(t-\frac{1}{t})}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}nJ_n(x)t^{n-1}\Rightarrow\Big(\frac{x}{2}+\frac{x}{2t^2}\Big)\sum_{n=-\infty}^{\infty}J_n(x)t^n=\sum_{n=-\infty}^{\infty}nJ_n(x)t^{n-1}\Rightarrow$$
$$\frac{x}{2}\sum_{n=-\infty}^{\infty}J_n(x)t^n+\frac{x}{2t^2}\sum_{n=-\infty}^{\infty}J_n(x)t^n=\sum_{n=-\infty}^{\infty}nJ_n(x)t^{n-1}\Rightarrow$$
$$\frac{x}{2}\sum_{n=-\infty}^{\infty}J_n(x)t^n+\frac{x}{2}\sum_{n=-\infty}^{\infty}J_n(x)t^{n-2}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}nJ_n(x)t^{n-1}\Rightarrow$$
$$\frac{x}{2}\sum_{n=-\infty}^{\infty}J_{n-1}(x)t^{n-1}+\frac{x}{2}\sum_{n=-\infty}^{\infty}J_{n+1}(x)t^{n-1}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}nJ_n(x)t^{n-1},$$

και εξισώνουμε τους συντελεστές του όρου t^{n-1}:

$$J_{n-1}(x)+J_{n+1}(x)=\frac{2n}{x}J_n(x),$$

που είναι η αναδρομική σχέση (6.6) του θεωρήματος 6.1.

Προσθέτουμε τις ισότητες (6.5) και (6.6), οπότε:

$$J_n'(x)+\frac{n}{x}J_n(x)=J_{n-1}(x)\Rightarrow J_n'(x)=J_{n-1}(x)-\frac{n}{x}J_n(x),$$

που είναι η αναδρομική σχέση (6.3) του θεωρήματος 6.1.

Αφαιρούμε κατα μέλη τις ισότητες (6.5) και (6.6), οπότε:

$$J_n'(x)-\frac{n}{x}J_n(x)=-J_{n+1}(x)\Rightarrow J_n'(x)=\frac{n}{x}J_n(x)-J_{n+1}(x),$$

που είναι η αναδρομική σχέση (6.4) του θεωρήματος 6.1.

Προσθέτουμε τις ισότητες (6.5) και (6.6) και πολλαπλασιάζουμε με x^n, οπότε:

$$x^nJ_n'(x)+nx^{n-1}J_n(x)=x^nJ_{n-1}(x)\Rightarrow\frac{d}{dx}[x^nJ_n(x)]=x^nJ_{n-1}(x),$$

που είναι η αναδρομική σχέση (6.1) του θεωρήματος 6.1.

Αφαιρούμε κατα μέλη τις ισότητες (6.5) και (6.6) και πολλαπλασιάζουμε με x^{-n}, οπότε:

$$x^{-n}J_n'(x)-nx^{-n+1}J_n(x)=-x^{-n}J_{n+1}(x)\Rightarrow\frac{d}{dx}[x^{-n}J_n(x)]=-x^{-n}J_{n+1}(x),$$

που είναι η αναδρομική σχέση (6.2) του θεωρήματος 6.1.

Άσκηση 2. Με τη βοήθεια της γεννήτριας συνάρτησης $e^{\frac{x}{2}(t-\frac{1}{t})}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}J_n(x)t^n$ των συναρτήσεων Bessel, να δειχθεί ότι: $J_n(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\cos(n\theta-x\sin\theta)d\theta$.

Λύση:

Θέτουμε $t = e^{\mathrm{i}\theta}$ στη γεννήτρια συνάρτηση:

$$e^{\mathrm{i}x\sin\theta} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x) e^{\mathrm{i}n\theta}$$

και λαμβάνοντας υπ' όψιν τον τύπο του Euler $e^{\mathrm{i}a} = \cos a + \mathrm{i}\sin a$ έχουμε ότι:

$$\cos(x\sin\theta) + \mathrm{i}\sin(x\sin\theta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x)\cos(n\theta) + \mathrm{i}\sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x)\sin(n\theta).$$

Στην τελευταία ισότητα, εξισώνοντας τα πραγματικά και φανταστικά μέρη, παίρνουμε:

$\cos(x\sin\theta) = \displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x)\cos(n\theta) \quad (*)$

και $\sin(x\sin\theta) = \displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x)\sin(n\theta). \quad (**)$

Πολλαπλασιάζουμε με $\cos(m\theta)$ την $(*)$, με $\sin(m\theta)$ την $(**)$ και προσθέτουμε κατά μέλη:

$$\begin{aligned}
&\cos(x\sin\theta)\cos(m\theta) + \sin(x\sin\theta)\sin(m\theta) \\
&\qquad\qquad = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x)\cos(n\theta)\cos(m\theta) + \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x)\sin(n\theta)\sin(m\theta) \Rightarrow \\
&\cos(m\theta - x\sin\theta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x)\cos((m-n)\theta)
\end{aligned}$$

Ολοκληρώνουμε την τελευταία ισότητα ως προς θ από 0 έως π:

$$\begin{aligned}
\int_0^\pi \cos(m\theta - x\sin\theta)d\theta &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x)\int_0^\pi \cos((m-n)\theta)d\theta \Rightarrow \\
\int_0^\pi \cos(m\theta - x\sin\theta)d\theta &= \sum_{\substack{n=-\infty \\ m\neq n}}^{\infty} J_n(x)\int_0^\pi \cos((m-n)\theta)d\theta + J_m(x)\int_0^\pi d\theta \Rightarrow \\
\int_0^\pi \cos(m\theta - x\sin\theta)d\theta &= \sum_{\substack{n=-\infty \\ m\neq n}}^{\infty} J_n(x)\frac{\sin((m-n)\theta)}{m-n}\Big|_{\theta=0}^{\pi} + \pi J_m(x) \Rightarrow \\
J_m(x) &= \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \cos(m\theta - x\sin\theta)d\theta.
\end{aligned}$$

Βιβλιογραφία

Μασσαλάς Χ. (2010) *Ειδικές Συναρτήσεις*, Cutenberg.

Σιαφαρίκας Π. (2009) *Ειδικές Συναρτήσεις*, Εκδόσεις Πανεπιστημίου Πατρών.

Hochstadt H. (1986) *The function of Mathematical Physics*, Dover Publications, Inc. N.Y..

Lebedev N.N. (1972) *Special functions and their Applications*, Dover Publications.

Luke Y. L. (1969) *The special functions and their Approximations-Volume I*, Academic Press.

Watson G. N. (1966) *A treatise on the theory of Bessel functions*, Cambridge University Press.