Τίτλος Μαθήματος: Ειδικές Συναρτήσεις

Ενότητα: Συναρτήσεις Bessel πρώτου και δευτέρου είδους

Όνομα Καθηγήτριας: Χρυσή Κοκολογιαννάκη

Τμήμα: Μαθηματικών

Άδειες Χρήσης

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό υπόκειται σε άδειες χρήσης Creative Commons.
- Για εκπαιδευτικό υλικό, όπως εικόνες, που υπόκειται σε άλλου τύπου άδειας χρήσης, η άδεια χρήσης αναφέρεται ρητώς.

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Πατρών**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Ενότητα 2

5 Συναρτήσεις Bessel πρώτου και δευτέρου είδους

Οι συναρτήσεις Bessel $J_\nu(z)$ πρώτου είδους και τάξης ν, ορίζονται υπό μορφήν συγκλίνουσας δυναμοσειράς, για $z \in \mathbb{C}$ και $\nu \in \mathbb{R}$:

$$J_\nu(z) = \sum_{\kappa=0}^{\infty} \frac{(-1)^\kappa}{\Gamma(\nu+\kappa+1)\kappa!} \Big(\frac{z}{2}\Big)^{2\kappa+\nu}. \tag{5.1}$$

Πρόταση 5.1: Για $\nu \geq 0$ η συνάρτηση $J_\nu(z)$ είναι λύση της διαφορικής εξίσωσης Bessel

$$z^2 y''(z) + z y'(z) + (z^2 - \nu^2) y(z) = 0. \tag{5.2}$$

Απόδειξη. Για να δείξουμε ότι η $J_\nu(z)$ είναι λύση της δ.ε. (5.2), πρέπει να δείξουμε ότι ισχύει η (5.2) για $y(z) = J_\nu(z)$. Οπότε, παραγωγίζουμε ως προς z την (5.1) δύο φορές και παίρνουμε την $J_\nu'(z)$ και $J_\nu''(z)$:

$$J_\nu'(z) = \sum_{\kappa=0}^{\infty} \frac{(-1)^\kappa (2\kappa+\nu)}{\Gamma(\nu+\kappa+1)\kappa!} \frac{z^{2\kappa+\nu-1}}{2^{2\kappa+\nu}} \tag{5.3}$$

$$J_\nu''(z) = \sum_{\kappa=0}^{\infty} \frac{(-1)^\kappa (2\kappa+\nu)(2\kappa+\nu-1)}{\Gamma(\nu+\kappa+1)\kappa!} \frac{z^{2\kappa+\nu-2}}{2^{2\kappa+\nu}} \tag{5.4}$$

Αντικαθιστούμε τις (5.1), (5.3) και (5.4) στο αριστερό μέλος της (5.2), οπότε πρικύπτει:

$z^2 y''(z) + z y'(z) + (z^2 - \nu^2) y(z) =$

$$\sum_{\kappa=0}^{\infty} \frac{(-1)^\kappa (2\kappa+\nu)(2\kappa+\nu-1)}{\Gamma(\nu+\kappa+1)\kappa!} \Big(\frac{z}{2}\Big)^{2\kappa+\nu} + \sum_{\kappa=0}^{\infty} \frac{(-1)^\kappa (2\kappa+\nu)}{\Gamma(\nu+\kappa+1)\kappa!} \Big(\frac{z}{2}\Big)^{2\kappa+\nu} + \sum_{\kappa=0}^{\infty} \frac{(-1)^\kappa (z^2-\nu^2)}{\Gamma(\nu+\kappa+1)\kappa!} \Big(\frac{z}{2}\Big)^{2\kappa+\nu} =$$

$$= \sum_{\kappa=0}^{\infty} \frac{(-1)^\kappa}{\Gamma(\nu+\kappa+1)\kappa!} \Big(\frac{z}{2}\Big)^{2\kappa+\nu} [(2\kappa+\nu)(2\kappa+\nu-1) + (2\kappa+\nu) - \nu^2] + \sum_{\kappa=0}^{\infty} \frac{(-1)^\kappa}{\Gamma(\nu+\kappa+1)\kappa!} \Big(\frac{z}{2}\Big)^{2\kappa+\nu} z^2 =$$

$$= \sum_{\kappa=0}^{\infty} \frac{(-1)^\kappa}{\Gamma(\nu+\kappa+1)\kappa!} \Big(\frac{z}{2}\Big)^{2\kappa+\nu} [(2\kappa+\nu)^2 - \nu^2] + z^2 \sum_{\kappa=0}^{\infty} \frac{(-1)^\kappa}{\Gamma(\nu+\kappa+1)\kappa!} \Big(\frac{z}{2}\Big)^{2\kappa+\nu} =$$

$$= \sum_{\kappa=0}^{\infty} \frac{(-1)^\kappa}{\Gamma(\nu+\kappa+1)\kappa!} \Big(\frac{z}{2}\Big)^{2\kappa+\nu} (2\kappa+\nu+\nu)(2\kappa) + z^2 \sum_{\kappa=0}^{\infty} \frac{(-1)^\kappa}{\Gamma(\nu+\kappa+1)\kappa!} \Big(\frac{z}{2}\Big)^{2\kappa+\nu} =$$

$$= \sum_{\kappa=0}^{\infty} \underbrace{\frac{(-1)^\kappa 2^2(\kappa+\nu)\kappa}{\Gamma(\nu+\kappa+1)\kappa!}}_{(\nu+\kappa)\Gamma(\nu+\kappa)\kappa(\kappa-1)!} \Big(\frac{z}{2}\Big)^{2\kappa+\nu} + z^2 \sum_{\kappa=0}^{\infty} \frac{(-1)^\kappa}{\Gamma(\nu+\kappa+1)\kappa!} \Big(\frac{z}{2}\Big)^{2\kappa+\nu} =$$

$$= z^2 \sum_{\kappa=1}^{\infty} \frac{(-1)^\kappa}{\Gamma(\nu+\kappa)(\kappa-1)!} \Big(\frac{z}{2}\Big)^{2(\kappa-1)+\nu} + z^2 \sum_{\kappa=0}^{\infty} \frac{(-1)^\kappa}{\Gamma(\nu+\kappa+1)\kappa!} \Big(\frac{z}{2}\Big)^{2\kappa+\nu} =$$

$$\overset{\kappa\to\kappa+1}{=} z^2 \sum_{\kappa=0}^{\infty} \frac{(-1)^{\kappa+1}}{\Gamma(\nu+\kappa+1)\kappa!} \Big(\frac{z}{2}\Big)^{2\kappa+\nu} + z^2 \sum_{\kappa=0}^{\infty} \frac{(-1)^\kappa}{\Gamma(\nu+\kappa+1)\kappa!} \Big(\frac{z}{2}\Big)^{2\kappa+\nu} =$$

$$= -z^2 \sum_{\kappa=0}^{\infty} \frac{(-1)^{\kappa}+}{\Gamma(\nu+\kappa+1)\kappa!} \Big(\frac{z}{2}\Big)^{2\kappa+\nu} + z^2 \sum_{\kappa=0}^{\infty} \frac{(-1)^\kappa}{\Gamma(\nu+\kappa+1)\kappa!} \Big(\frac{z}{2}\Big)^{2\kappa+\nu} = 0.$$

□

Πρόταση 5.2: Η συνάρτηση

$$J_{-\nu}(z) = \sum_{\kappa=0}^{\infty} \frac{(-1)^\kappa}{\Gamma(-\nu+\kappa+1)\kappa!} \Big(\frac{z}{2}\Big)^{2\kappa-\nu} \tag{5.5}$$

είναι λύση της δ.ε. (5.2) και είναι γραμμικώς ανεξάρτητη της $J_\nu(z)$ για $\nu \notin \mathbb{Z}$, και μάλιστα η ορίζουσα Wronski αυτών είναι

$$W[J_\nu(z), J_{-\nu}(z)] = -\frac{2\sin(\nu\pi)}{\pi z}. \tag{5.6}$$

Απόδειξη. Η συνάρτηση $J_{-\nu}(z)$ όπως δίνεται από την (5.5) είναι λύση της (5.2). Η απόδειξη είναι ακριβώς ίδια με την απόδειξη της Πρότασης 5.1. Για την απόδειξη της γραμμικής ανεξαρτησίας των συναρτήσεων $J_\nu(z)$ και $J_{-\nu}(z)$ θα χρησιμοποιήσουμε το θεώρημα των Abel-Liouville από τη θεωρία των διαφορικών εξισώσεων:

Θεώρημα: Η ορίζουσα Wronski δύο γραμμικών λύσεων της δ.ε.
$y''(z) + p(z)y'(z) + q(z)y(z) = 0$, με $p(z)$, $q(z)$ συνεχείς συναρτήσεις σε κάποιο διάστημα $I \subset \mathbb{R}$, ικανοποιεί τη δ.ε. $W'(z) + p(z)W(z) = 0$.

Στην περίπτωσή μας η δ.ε. Bessel γράφεται:
$y''(z) + \frac{1}{z}y'(z) + \frac{z^2-\nu^2}{z^2}y(z) = 0$, οπότε $p(z) = \frac{1}{z}$.
Άρα:

$$W[J_\nu(z), J_{-\nu}(z)] = ce^{-\int \frac{1}{z}dz} = ce^{-lnz} = \frac{c}{z}. \tag{5.7}$$

Αρκεί να υπολογίσουμε τη σταθερά c. Απ' την (5.7) η c προσδιορίζεται ως το όριο:
$\lim_{z\to 0} zW[J_\nu(z), J_{-\nu}(z)] = c$.
Όμως,
$zW[J_\nu(z), J_{-\nu}(z)] = zJ_\nu(z)J'_{-\nu}(z) - zJ'_\nu(z)J_{-\nu}(z)$, οπότε χρησιμοποιώντας τις $J_\nu(z)$ και $J_{-\nu}(z)$ όπως δίνονται απ' τις (5.1) και (5.5) και τις παραγώγους αυτών, έχουμε:

$$\begin{aligned} zW[J_\nu(z), J_{-\nu}(z)] =& z\sum_{\kappa=0}^{\infty} \frac{(-1)^\kappa}{\Gamma(\nu+\kappa+1)\kappa!}\frac{z^{\nu+2\kappa}}{2^{\nu+2\kappa}} \cdot \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m(-\nu+2m)}{\Gamma(-\nu+m+1)m!}\frac{z^{-\nu+2m-1}}{2^{-\nu+2m}} \\ &- z\sum_{\kappa=0}^{\infty} \frac{(-1)^\kappa(\nu+2\kappa)}{\Gamma(\nu+\kappa+1)\kappa!}\frac{z^{\nu+2\kappa-1}}{2^{\nu+2\kappa}} \cdot \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{\Gamma(-\nu+m+1)m!}\frac{z^{-\nu+2m}}{2^{-\nu+2m}} = \end{aligned}$$

$$= \sum_{\kappa=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^{\kappa+m}(-\nu+2m)}{\Gamma(\nu+\kappa+1)\Gamma(-\nu+m+1)\kappa!m!} \frac{z^{2\kappa+2m}}{2^{2\kappa+2m}}$$
$$- \sum_{\kappa=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^{\kappa+m}(\nu+2\kappa)}{\Gamma(\nu+\kappa+1)\Gamma(-\nu+m+1)\kappa!m!} \frac{z^{2\kappa+2m}}{2^{2\kappa+2m}} =$$

$$= - \sum_{\kappa=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^{\kappa+m}(2\nu+2\kappa-2m)}{\Gamma(\nu+\kappa+1)\Gamma(-\nu+m+1)\kappa!m!} \frac{z^{2\kappa+2m}}{2^{2\kappa+2m}}.$$

Παίρνοντας το όριο του $z \to 0$, καταλήγουμε:

$$\underset{z\to 0}{lim} zW[J_\nu(z), J_{-\nu}(z)] = -\frac{2\nu}{\Gamma(\nu+1)\Gamma(-\nu+1)} = -\frac{2\nu}{\nu\Gamma(\nu)\Gamma(-\nu+1)} = -\frac{2\sin(\nu\pi)}{\pi},$$

αφού από την Πρόταση 2.2, ισχύει $\Gamma(\nu)\Gamma(1-\nu) = -\dfrac{\pi}{2\sin(\nu\pi)}$.

Τελικά, από την (5.7) προκύπτει ότι:

$W[J_\nu(z), J_{-\nu}(z)] = -\dfrac{2sin\nu\pi}{\pi z}$, $z \neq 0$ και επομένως οι συναρτήσεις $J_\nu(z)$ και $J_{-\nu}(z)$, για $\nu \notin \mathbb{Z}$, είναι γραμμικώς ανεξάρτητες. □

Πρόταση 5.3: Αν $\nu = n \in \mathbb{Z}$, τότε $J_{-n}(z) = (-1)^n J_n(z)$.

Απόδειξη. Θέτουμε στην (5.1) όπου ν το $-n$, με $n \in \mathbb{Z}$, οπότε:

$$J_{-n}(z) = \sum_{\kappa=0}^{\infty} \frac{(-1)^\kappa}{\Gamma(-n+\kappa+1)\kappa!} \left(\frac{z}{2}\right)^{2\kappa-n}$$

Επειδή $\dfrac{1}{\Gamma(-n+\kappa+1)} = 0$ για $\kappa = 0, 1, \ldots, n-1$, η ανωτέρω σειρά γράφεται:

$$\begin{aligned}
J_{-n}(z) &= \sum_{\kappa=n}^{\infty} \frac{(-1)^\kappa}{\Gamma(-n+\kappa+1)\kappa!} \left(\frac{z}{2}\right)^{2\kappa-n} = \sum_{\kappa=0}^{\infty} \frac{(-1)^{\kappa+n}}{\Gamma(-n+\kappa+n+1)(\kappa+n)!} \left(\frac{z}{2}\right)^{2(\kappa+n)-n} \\
&= (-1)^n \sum_{\kappa=0}^{\infty} \frac{(-1)^\kappa}{\Gamma(\kappa+1)\Gamma(n+\kappa+1)} \left(\frac{z}{2}\right)^{2\kappa+n} \\
&= (-1)^n \sum_{\kappa=0}^{\infty} \frac{(-1)^\kappa}{\kappa!\Gamma(n+\kappa+1)} \left(\frac{z}{2}\right)^{2\kappa+n} \\
&= (-1)^n J_n(z).
\end{aligned}$$
□

Πρόταση 5.4: Αν $\nu = n \in \mathbb{Z}$, τότε η συνάρτηση $Y_n(z) = \underset{\nu\to n}{lim} Y_\nu(z)$ με

$$Y_\nu(z) = \frac{\cos(\nu\pi)J_\nu(z) - J_{-\nu}(z)}{\sin(\nu\pi)} \tag{5.8}$$

είναι λύση της (5.2), γραμμικώς ανεξάρτητη της (5.1) και μάλιστα

$$W[J_\nu(z), Y_\nu(z)] = \frac{2}{\pi z}. \tag{5.9}$$

Απόδειξη. Ορίζουμε την $Y_\nu(z) = \dfrac{\cos(\nu\pi)J_\nu(z) - J_{-\nu}(z)}{\sin(\nu\pi)}$, η οποία λέγεται συνάρτηση Bessel δευτέρου είδους, τάξης ν. Τότε,

$$\begin{aligned}
Y_n(z) &= \lim_{\nu\to n} Y_\nu(z) = \lim_{\nu\to n} \frac{\cos(\nu\pi)J_\nu(z) - J_{-\nu}(z)}{\sin(\nu\pi)} \overset{\text{L' Hopital}}{=} \\
&= \lim_{\nu\to n} \frac{-\pi\sin(\nu\pi)J_\nu(z) + \frac{\partial}{\partial\nu}J_\nu(z)\cos(\nu\pi) - \frac{\partial}{\partial\nu}J_{-\nu}(z)}{\pi\cos(\nu\pi)} = \\
&= \frac{1}{\pi}\lim_{\nu\to n}\Big[\frac{\partial}{\partial\nu}J_\nu(z) - (-1)^\nu\frac{\partial}{\partial\nu}J_{-\nu}(z)\Big]. \qquad (5.10)
\end{aligned}$$

Θα δείξουμε ότι η $Y_n(z)$ όπως δίνεται απ' την (5.10) ικανοποιεί την δ.ε. Bessel. Προφανώς, οι συναρτήσεις $J_\nu(z)$ και $J_{-\nu}(z)$ ικανοποιούν τη δ.ε. (5.2). Άρα, ισχύουν: $z^2J''_\nu(z) + zJ'_\nu(z) + (z^2-\nu^2)J_\nu(z) = 0$ και $z^2J''_{-\nu}(z) + zJ'_{-\nu}(z) + (z^2-\nu^2)J_{-\nu}(z) = 0$, αντίστοιχα. Παραγωγίζουμε ως προς ν τις δύο αυτές δ.ε. και προκύπτει:

$z^2\dfrac{d^2}{dz^2}\dfrac{\partial}{\partial\nu}J_\nu(z) + z\dfrac{d}{dz}\dfrac{\partial}{\partial\nu}J_\nu(z) + (z^2-\nu^2)\dfrac{\partial}{\partial\nu}J_\nu(z) - 2\nu J_\nu(z) = 0$ και

$z^2\dfrac{d^2}{dz^2}\dfrac{\partial}{\partial\nu}J_{-\nu}(z) + z\dfrac{d}{dz}\dfrac{\partial}{\partial\nu}J_{-\nu}(z) + (z^2-\nu^2)\dfrac{\partial}{\partial\nu}J_{-\nu}(z) - 2\nu J_{-\nu}(z) = 0$, αντίστοιχα.

Πολλαπλασιάζουμε τη δεύτερη με $(-1)^\nu$ και αφαιρούμε από την πρώτη, οπότε:

$$\begin{aligned}
&z^2\frac{d^2}{dz^2}\Big[\frac{\partial}{\partial\nu}J_\nu(z) - (-1)^\nu\frac{\partial}{\partial\nu}J_{-\nu}(z)\Big] + z\frac{d}{dz}\Big[\frac{\partial}{\partial\nu}J_\nu(z) - (-1)^\nu\frac{\partial}{\partial\nu}J_{-\nu}(z)\Big] \\
&+ (z^2-\nu^2)\Big[\frac{\partial}{\partial\nu}J_\nu(z) - (-1)^\nu\frac{\partial}{\partial\nu}J_{-\nu}(z)\Big] - 2\nu\Big[\frac{\partial}{\partial\nu}J_\nu(z) - (-1)^\nu\frac{\partial}{\partial\nu}J_{-\nu}(z)\Big] = 0. \qquad (5.11)
\end{aligned}$$

Παίρνουμε το όριο του $\nu \to n$ στην (5.11) και λόγω της (5.10) και της Πρότασης 1.3, έχουμε: $\pi z^2\dfrac{d^2}{dz^2}Y_n(z) + \pi z\dfrac{d}{dz}Y_n(z) + \pi(z^2-n^2)Y_n(z) = 0$, που σημαίνει ότι η $Y_n(z)$ είναι λύση της (5.2).

Επειδή η ορίζουσα Wronski των συναρτήσεων $J_\nu(z)$ και $Y_\nu(z)$ είναι:

$$\begin{aligned}
W[J_\nu(z), Y_\nu(z)] &= \frac{J_\nu(z)[J'_\nu(z)\cos(\nu\pi) - J'_{-\nu}(z)] - J_nu'(z)[J_\nu(z)\cos(\nu\pi) - J_{-\nu}(z)]}{\sin(\nu\pi)} \\
&= \frac{J_\nu(z)J_{-\nu}(z) + J'_\nu(z)J_{-\nu}(z)}{\sin(\nu\pi)},
\end{aligned}$$

η ορίζουσα Wronski των συναρτήσεων $J_n(z)$ και $Y_n(z)$ θα είναι:

$$W[J_n(z), Y_n(z)] = -\lim_{\nu\to n}\frac{W[J_\nu(z), J_{-\nu}(z)]}{\sin(\nu\pi)} = -\lim_{\nu\to n}\Bigg(-\frac{2\sin(\nu\pi)}{\pi z\sin(\nu\pi)}\Bigg) = \frac{2}{\pi z}. \qquad \square$$

Σημείωση 5.1: Η $Y_n(z), n \in \mathbb{Z}$ δίνεται υπό μορφή σειράς:

$$\begin{aligned}
Y_n(z) = \frac{2}{\pi}J_n(z)\ln\frac{z}{2} &- \frac{1}{\pi}\sum_{\kappa=0}^{n-1}\frac{(n-\kappa-1)!}{\kappa!}\Big(\frac{z}{2}\Big)^{2\kappa-n} \\
&- \frac{1}{\pi}\sum_{\kappa=0}^{\infty}\frac{(-1)^\kappa}{\kappa!(n+\kappa)!}\Big(\frac{z}{2}\Big)^{2\kappa+n}[\psi(\kappa) + \psi(\kappa+n)].
\end{aligned}$$

Παρατηρούμε δε, ότι απειρίζεται για $z=0$.

Σημείωση 5.2: Η γενική λύση της δ.ε. Bessel (5.2) δίνεται από τη συνάρτηση:

$$y(z) = AJ_\nu(z) + BJ_{-\nu}(z), \text{ αν } \nu \notin \mathbb{Z}$$

και

$$y(z) = AJ_n(z) + BY_n(z), \text{ αν } \nu = n \in \mathbb{Z},$$

με A, B σταθερές.

Πρόταση 5.5: Αν $n \in \mathbb{Z}$, να δείξετε ότι η συνάρτηση Bessel $J_n(z)$, όπως δίνεται υπό μορφήν ολοκληρώματος:

$$J_n(z) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \cos(z\sin\phi - n\phi)\,d\phi, \tag{5.12}$$

ικανοποιεί τη δ.ε. Bessel (5.2).

Απόδειξη. Παραγωγίζουμε την (5.12) ως προς z, οπότε:

$$\begin{aligned}
J_n'(z) &= -\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \sin\phi\sin(z\sin\phi - n\phi)\,d\phi \overset{\text{κατά παράγοντες}}{\underset{\text{ολοκλήρωση}}{=}} \\
&= \frac{1}{\pi}\Big\{\cos\phi\sin(z\sin\phi - n\phi)\Big|_{\phi=0}^{\pi} - \int_0^\pi \cos\phi\cos(z\sin\phi-n\phi)(z\cos\phi - n)\,d\phi\Big\} \\
&= -\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \cos\phi\cos(z\sin\phi-n\phi)(z\cos\phi-n)\,d\phi. \qquad (5.13)
\end{aligned}$$

Παραγωγίζουμε ως προς z την (5.13), οπότε:

$$\begin{aligned}
J_n''(z) &= -\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \cos^2\phi\cos(z\sin\phi-n\phi)\,d\phi + \\
&+ \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \cos\phi\,\underbrace{(z\cos\phi-n)\sin(z\sin\phi-n\phi)}_{\frac{\partial}{\partial\phi}\left(-cos(z\sin\phi-n\phi)\right)}\sin\phi\,d\phi \overset{\text{κατά παράγοντες}}{\underset{\text{ολοκλήρωση}}{=}} \\
&= -\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \cos^2\phi\cos(z\sin\phi-n\phi)\,d\phi + \\
&+ \frac{1}{\pi}\Big\{\cos\phi\sin\phi\big(-\cos(z\sin\phi-n\phi)\big)\Big|_{\phi=0}^{\pi} + \int_0^\pi \cos(z\sin\phi-n\phi)(\cos^2\phi - \sin^2\phi)\,d\phi\Big\} \\
&= -\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \sin^2\phi\cos(z\sin\phi-n\phi)\,d\phi. \qquad (5.14)
\end{aligned}$$

Αντικαθιστούμε τις (5.12), (5.13), (5.14) στο αριστερό μέλος της δ.ε. (5.2), οπότε έχουμε:

$$\begin{aligned}
&z^2J_n''(z) + zJ_n'(z) + (z^2-n^2)J_n(z) = \\
&= -\frac{z^2}{\pi}\int_0^\pi \sin^2\phi\cos(z\sin\phi-n\phi)\,d\phi - \frac{z^2}{\pi}\int_0^\pi \cos^2\phi\cos(z\sin\phi-n\phi)\,d\phi \\
&\quad + \frac{zn}{\pi}\int_0^\pi \cos\phi\cos(z\sin\phi-n\phi)\,d\phi + \frac{z^2}{\pi}\int_0^\pi \cos(z\sin\phi-n\phi)\,d\phi - \frac{n^2}{\pi}\int_0^\pi \cos(z\sin\phi-n\phi)\,d\phi
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= -\frac{z^2}{\pi}\int_0^{\pi}\cos(z\sin\phi - n\phi)\,d\phi + \frac{zn}{\pi}\int_0^{\pi}\cos\phi\cos(z\sin\phi - n\phi)\,d\phi + \frac{z^2}{\pi}\int_0^{\pi}\cos(z\sin\phi - n\phi)\,d\phi \\
&\quad - \frac{n^2}{\pi}\int_0^{\pi}\cos(z\sin\phi - n\phi)\,d\phi \\
&\quad = \frac{n}{\pi}\int_0^{\pi}\cos(z\sin\phi - n\phi)(z\cos\phi - n)\,d\phi = \frac{n}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{\partial}{\partial\phi}\big(\sin(z\sin\phi - n\phi)\big)\,d\phi \\
&\quad = \frac{n}{\pi}\big(\sin(z\sin\phi - n\phi)\big)\Big|_{\phi=0}^{\pi} = 0. \qquad \square
\end{aligned}
$$

Βιβλιογραφία

Μασσαλάς Χ. (2010) *Ειδικές Συναρτήσεις*, Cutenberg.

Σιαφαρίκας Π. (2009) *Ειδικές Συναρτήσεις*, Εκδόσεις Πανεπιστημίου Πατρών.

Hochstadt H. (1986) *The function of Mathematical Physics*, Dover Publications, Inc. N.Y..

Lebedev N.N. (1972) *Special functions and their Applications*, Dover Publications.

Luke Y. L. (1969) *The special functions and their Approximations-Volume I*, Academic Press.

Watson G. N. (1966) *A treatise on the theory of Bessel functions*, Cambridge University Press.