Τίτλος Μαθήματος: Ειδικές Συναρτήσεις

Ενότητα: Στοιχειώδεις ειδικές συναρτήσεις

Όνομα Καθηγήτριας: Χρυσή Κοκολογιαννάκη

Τμήμα: Μαθηματικών

Άδειες Χρήσης

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό υπόκειται σε άδειες χρήσης Creative Commons.
- Για εκπαιδευτικό υλικό, όπως εικόνες, που υπόκειται σε άλλου τύπου άδειας χρήσης, η άδεια χρήσης αναφέρεται ρητώς.

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Πατρών**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ

Ενότητα 1

1 Συνάρτηση Γάμμα

Μια από τις πιο απλές και πιο σημαντικές συναρτήσεις είναι η συνάρτηση Γάμμα. Η θεωρία για την συνάρτηση Γάμμα αναπτύχθηκε στην προσπάθεια της γενίκευσης του παραγοντικού φυσικών αριθμών, δηλαδή θέλοντας να βρεθεί μια έκφραση, που να επεκτείνει το $n!$ (n φυσικός αριθμός)σε οποιονδήποτε πραγματικό αριθμό. Το γνωστό γενικευμένο ολοκλήρωμα:

$$\int_0^\infty e^{-t}t^n dt,\ n \in \mathbb{N}$$

αποδεικνύεται ότι ισούται με $n!$, δηλαδή:

$$\int_0^\infty e^{-t}t^n dt = n!,\ n \in \mathbb{N}. \tag{1.1}$$

Αν αντικατασταθεί ο φυσικός αριθμός n με ένα αυθαίρετο πραγματικό αριθμό x, με την προϋπόθεση ότι το ολοκλήρωμα συγκλίνει, αυτό θα αποτελεί τη γενίκευση, που ζητείται. Έτσι εισήχθη η συνάρτηση Γάμμα, πρώτα από τον Σουηδό Μαθηματικό Leonard-Euler (1703–1783), ως εξής:

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-t}t^{x-1} dt,\ x > 0 \tag{1.2}$$

η οποία επεκτάθηκε και στους μιγαδικούς αριθμούς.

Ορισμός 1.1: (Euler) Η συνάρτηση $\Gamma(z)$ ορίζεται από το ολοκλήρωμα Euler πρώτου είδους:

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-t}t^{z-1} dt \tag{1.3}$$

και συγκλίνει για κάθε $z \in \mathbb{C}$, με $Re(z) > 0$.

Σημείωση 1.1: Ο συμβολισμός $\Gamma(z)$ για την συνάρτηση Γάμμα, οφείλεται στον Legendre το έτος 1809. Λόγω της μεγάλης σπουδαιότητας της, η συνάρτηση Γάμμα μελετήθηκε, εκτός από τον Euler και από άλλους σπουδαίους μαθηματικούς, όπως τους Legendre, Gauss, Guderman, Liouville, Weirstrass, Hermite κ.ά..

Πρόταση 1.1: Η συναρτησιακή εξίσωση που ικανοποιεί η συνάρτηση Γάμμα είναι:

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z),\ z \in \mathbb{C},\ \mu\epsilon\ Re(z) > 0. \tag{1.4}$$

Απόδειξη. Στην ισότητα (1.3), θέτουμε όπου z το $z+1$ και ολοκληρώνουμε κατά παράγοντες, οπότε προκύπτει:

$$\Gamma(z+1) = \int_0^\infty e^{-t}t^z dt = \lim_{\alpha\to\infty}\int_0^\alpha e^{-t}t^z dt = \lim_{\alpha\to\infty}[-e^{-t}t^z]_{t=0}^\alpha + z\int_0^\infty e^{-t}t^{z-1} dt = z\Gamma(z).$$

$\square$

Σημείωση 1.2: Αν $z = n \in \mathbb{N}$, τότε εφαρμόζοντας διαδοχικά την (1.4) και λαμβάνοντας υπ'οψιν μας ότι:

$$\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-t} dt = 1 \tag{1.5}$$

έχουμε:

$$\Gamma(n+1) = n\Gamma(n) = n(n-1)\Gamma(n-1) = \cdots = n(n-1)\ldots 2 \cdot 1\Gamma(1) \overset{(1.5)}{=} n!,$$

δηλαδή καταλήγουμε ότι:

$$\Gamma(n+1) = n!,\ n \in \mathbb{N}. \tag{1.6}$$

Αποδεικνύεται, λοιπόν, ότι η συνάρτηση Γάμμα μπορεί να θεωρηθεί επέκταση του παραγοντικού φυσικών αριθμών, σε οποιονδήποτε μιγαδικό αριθμό z, με $Re(z) > 0$.

Πρόταση 1.2: Η συνάρτηση Γάμμα είναι παντού αναλυτική στο μιγαδικό επίπεδο, εκτός από τα σημεία $z = 0, -1, -2, \ldots$, όπου η συνάρτηση Γάμμα έχει απλούς πόλους.

Απόδειξη. Χρησιμοποιώντας την σχέση (1.4), μπορούμε να γράψουμε:

$$\Gamma(z+n) = (z+n-1)\Gamma(z+n-1) = (z+n-1)(z+n-2)\Gamma(z+n-2) = \cdots =$$

$$= (z+n-1)(z+n-2)\ldots(z+1)z\Gamma(z) = (z)_n\Gamma(z)$$

όπου $(z)_n$ είναι το σύμβολο του Pochhammer, που ορίζεται για τους μιγαδικούς αριθμούς $z \in \mathbb{C}$ και για τους φυσικούς $n \in \mathbb{N}_0$ από τη σχέση:

$$(z)_n = z(z+1)\ldots(z+n-1),\ n \in \mathbb{N}\ \textit{και}\ (z)_0 = 1. \tag{1.7}$$

Οπότε, η συνάρτηση Γάμμα μπορεί να επεκταθεί και στο μιγαδικό ημιεπίπεδο $Re(z) \leq 0$, ως εξής:

$$\Gamma(z) = \frac{\Gamma(z+n)}{(z)_n} \tag{1.8}$$

όπου $Re(z) > -n$, $n \in \mathbb{N}$ και $z \notin \mathbb{Z}_0^- = 0, -1, -2, \ldots$. Προφανώς, η σχέση (1.8) αποδεικνύει την Πρόταση 1.2. $\square$

Πρόταση 1.3: Ισχύει η κάτωθι ισότητα:

$$\int_0^\infty e^{-pt} t^{z-1} dt = \frac{\Gamma(z)}{p^z},\ Re(p) > 0,\ Re(z) > 0. \tag{1.9}$$

Απόδειξη. Θέτουμε $pt = u$ στο ολοκλήρωμα, τα άκρα του δεν αλλάζουν και έχουμε:

$$\int_0^\infty e^{-pt} t^{z-1} dt = \int_0^\infty e^{-u} \left(\frac{u}{p}\right)^{z-1} \frac{du}{p} = \frac{1}{p^z} \int_0^\infty e^{u} u^{z-1} du = \frac{\Gamma(z)}{p^z}. \qquad \square$$

Άλλοι Ορισμοί για τη συνάρτηση Γάμμα

Ορισμός 1.2: (Euler (1729) και Gauss (1811)) Έστω $z \in \mathbb{C}$ με $Re(z) > 0$, τότε η συνάρτηση Γάμμα ορίζεται ως εξής:

$$\Gamma(z) = \lim_{p\to\infty} \Gamma_p(z), \tag{1.10}$$

όπου

$$\Gamma_p(z) = \frac{p!\, p^z}{z(z+1)\dots(z+p)} = \frac{p^z}{z\Big(1+\dfrac{z}{1}\Big)\Big(1+\dfrac{z}{2}\Big)\dots\Big(1+\dfrac{z}{p}\Big)}. \tag{1.11}$$

Ορισμός 1.3: (Weirstrass) Για κάθε $z \in \mathbb{R}$, εκτός από τους αρνητικούς ακεραίους $\{0, -1, -2\dots\}$ ισχύει:

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = z e^{\gamma z} \prod_{p=1}^{\infty} \Big(1+\frac{z}{p}\Big) e^{-\frac{z}{p}} \tag{1.12}$$

όπου γ είναι η σταθερά Euler, που ορίζεται ως εξής:

$$\gamma = \lim_{p\to\infty}\Big(1+\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{p}-\ln p\Big) \simeq 0,577215\dots$$

Πρόταση1.4: Οι ορισμοί 1.1, 1.2 και 1.3 της συνάρτησης Γάμμα, είναι ισοδύναμοι.

Απόδειξη. Για να αποδείξουμε την ισοδυναμία των ορισμών 1.1 και 1.2, θεωρούμε τη συνάρτηση

$$f_n(z) = \int_0^n \Big(1-\frac{t}{n}\Big)^n t^{z-1} dt, \;\; Re(z) > 0, \;\; n \in \mathbb{N}. \tag{1.13}$$

Κάνουμε τον μετασχηματισμό $\dfrac{t}{n} = \tau$ και ολοκληρώνοντας κατά παράγοντες διαδοχικά, η (1.13) γράφεται:

$$\begin{aligned} f_n(z) &= n^z \int_0^1 (1-\tau)^n \tau^{z-1} d\tau = \frac{n^z}{z} n \int_0^1 (1-\tau)^{n-1} \tau^z d\tau = \\ &= \frac{n^z}{z}\frac{n(n-1)}{z+1}\int_0^1 (1-\tau)^{n-2}\tau^{z+1} d\tau = \dots = \\ &= \frac{n^z n!}{z(z+1)\dots(z+n-1)} \int_0^1 \tau^{z+n-1} d\tau = \frac{n^z n!}{z(z+1)\dots(z+n-1)(z+n)} \end{aligned} \tag{1.14}$$

Λαμβάνοντας υπ' όψιν μας ότι:

$$\lim_{n\to\infty}\Big(1-\frac{t}{n}\Big)^n = e^{-t}$$

παίρνουμε το όριο του $n \to \infty$ στην (1.13), οπότε προκύπτει:

$$\lim_{n\to\infty} f_n(z) = \lim_{n\to\infty}\int_0^n \Big(1-\frac{t}{n}\Big)^n t^{z-1} dt = \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1} dt = \Gamma(z).$$

Λόγω της (1.14), $\lim_{n\to\infty} \frac{n^z n!}{z(z+1)\dots(z+n)} = \Gamma(z)$, δηλαδή ισχύει η ισοδυναμία των ορισμών (1.1) και (1.2).

Για να αποδείξουμε την ισοδυναμία των ορισμών 1.2 και 1.3, παρατηρούμε ότι επειδή

$$p^z = e^{z\ln p} = e^{z\left(\ln p - 1 - \frac{1}{2} - \dots - \frac{1}{p}\right)} e^{z + \frac{z}{2} + \dots + \frac{z}{p}}$$

η (1.11) μπορεί να γραφεί:

$$\Gamma_p(z) = e^{-\gamma z}\frac{1}{z}\frac{1}{z+1}\frac{2}{z+2}\cdots\frac{p}{z+p}e^{z+\frac{z}{2}+\dots+\frac{z}{p}} = e^{-\gamma z}\frac{1}{z}\frac{e^z}{z+1}\frac{e^{\frac{z}{2}}}{\frac{z}{2}+1}\cdots\frac{e^{\frac{z}{p}}}{\frac{z}{p}+1} =$$
$$= \frac{e^{-\gamma z}}{z}\prod_{k=0}^{p}\left(1+\frac{z}{k}\right)^{-1}e^{\frac{z}{k}}. \tag{1.15}$$

Η ισότητα (1.15) αν πάρουμε το όριο $p \to \infty$, μας δίνει την ισοδυναμία τον ορισμών 1.2 και 1.3. □

2 Συνάρτηση Βήτα

Ορισμός 2.1: Η συνάρτηση Βήτα ορίζεται ως εξής:

$$B(x,y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt, \text{ με } Re(x) > 0 \text{ και } Re(y) > 0. \tag{2.1}$$

Ορισμός 2.2: Η συνάρτηση Βήτα δίνεται από το ολοκλήρωμα

$$B(x,y) = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2x-1}\phi\, \cos^{2y-1}\phi\, d\phi, \text{ με } Re(x) > 0 \text{ και } Re(y) > 0. \tag{2.2}$$

Σημείωση 2.1: Ο ορισμός 2.2 προκύπτει από τον ορισμό 2.1 θέτοντας όπου $t = \sin^2\phi,\ dt = 2\sin\phi\cos\phi\, d\phi$, με $0 \le \phi \le \frac{\pi}{2}$.

Ορισμός 2.3: Η συνάρτηση Βήτα δίνεται από το ολοκλήρωμα

$$B(x,y) = \int_0^{\infty} \frac{u^{x-1}}{(1+u)^{x+y}}du, \text{ με } Re(x) > 0 \text{ και } Re(y) > 0. \tag{2.3}$$

Σημείωση 2.2: Ο ορισμός 2.3 προκύπτει από τον ορισμό 2.1 θέτοντας όπου $t = \frac{u}{1+u},\ 1-t = \frac{1}{1+u},\ dt = \frac{1}{(1+u)^2}du,$ με $0 \le u < \infty$.

Πρόταση 2.1: Η συνάρτηση Βήτα συνδέεται με τη συνάρτηση Γάμμα μέσω της σχέσης:

$$B(x,y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}. \tag{2.4}$$

Απόδειξη. Από τον ορισμό 1.1 της συνάρτησης Γάμμα, έχουμε:

$$\Gamma(x)\Gamma(y) = \Big(\int_0^\infty e^{-t}t^{x-1}dt\Big)\Big(\int_0^\infty e^{-u}u^{y-1}du\Big) = \int_0^\infty \Big(\int_0^\infty e^{-(u+t)}u^{y-1}t^{x-1}dt\Big)du. \tag{2.5}$$

Στο διπλό αυτό ολοκλήρωμα κάνουμε την αλλαγή των μεταβλητών:
$t = w\sin^2\phi$ και $u = w\cos^2\phi$, όπου $0 \le w < \infty$ και $0 \le \phi \le \dfrac{\pi}{2}$, οπότε $dt\,du = |J|\,dw\,d\phi$, όπου J είναι η Ιακωβιανή ορίζουσα και ισούται με:

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial t}{\partial w} & \frac{\partial t}{\partial \phi} \\ \frac{\partial u}{\partial w} & \frac{\partial u}{\partial \phi} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sin^2\phi & 2w\sin\phi\cos\phi \\ \cos^2\phi & -2w\cos\phi\sin\phi \end{vmatrix} = -2w\sin\phi\cos\phi$$

και επειδή $t + u = w$, η (2.5) παίρνει τη μορφή:

$$\Gamma(x)\Gamma(y) = \Big(\int_0^\infty e^{-w}w^{x+y-1}dw\Big)\Big(2\int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^{2x-1}\phi\, cos^{2y-1}\phi\, d\phi\Big) = \Gamma(x+y)B(x,y)$$

από όπου προκύπτει η (2.4). □

Ιδιότητες της συνάρτησης Βήτα

Υποθέτοντας ότι $Re(x) > 0$, $Re(y) > 0$, ισχύουν οι ιδιότητες:

1. $B(x,y) = B(y,x)$
2. $B(x+1,y) = \dfrac{x}{x+y}B(x,y),\ \ B(x,y+1) = \dfrac{y}{x+y}B(x,y)$
3. $B(x,n+1) = \dfrac{n!}{(x)_{n+1}}$, $n \in \mathbb{N}$ και $(x)_n$ είναι το σύμβολο του Pochhammer όπως ορίζεται από την (1.7).

Απόδειξη. Η απόδειξη των ιδιοτήτων γίνεται, λαμβάνοντας υπ' όψιν μας τις ισότητες (2.4) και (1.4).

1. Προφανές.
2. $B(x+1,y) = \dfrac{\Gamma(x+1)\Gamma(y)}{\Gamma(x+1+y)} = \dfrac{x\Gamma(x)\Gamma(y)}{(x+y)\Gamma(x+y)} = \dfrac{x}{x+y}B(x,y)$

   $B(x,y+1) = \dfrac{\Gamma(x)\Gamma(y+1)}{\Gamma(x+y+1)} = \dfrac{y\Gamma(x)\Gamma(y)}{(x+y)\Gamma(x+y)} = \dfrac{y}{x+y}B(x,y)$
3. $B(x,n+1) = \dfrac{\Gamma(x)\Gamma(n+1)}{\Gamma(x+n+1)} \overset{(1.6)}{=} \dfrac{\Gamma(x)\,n!}{(x+n)\Gamma(x)\,(x)_n} \overset{(1.7)}{=} \dfrac{n!}{(x)_{n+1}}.$

□

Πρόταση 2.2: Ισχύει η σχέση:

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin(\pi z)},\ z \in \mathbb{C} \text{ με } 0 < Re(z) < 1. \tag{2.6}$$

Απόδειξη. Χρησιμοποιώντας τη σχέση (2.4) και το γεγονός ότι $\Gamma(1) = 1$, έχουμε:

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \Gamma(1)B(z, 1-z). \tag{2.7}$$

Από τον ορισμό 2.3 της συνάρτησης $B(x, y)$, έχουμε:

$$B(z, 1-z) = \int_0^\infty \frac{t^{z-1}}{1+t} dt = \frac{\pi}{\sin(\pi z)}. \tag{2.8}$$

Η δεύτερη ισότητα στην (2.8) αποδεικνύεται με τη βοήθεια των μιγαδικών συναρτήσεων (βλ., π.χ., Μιγαδική Ανάλυση, Ν.Αρτεμιάδης, σελ. 211). Από τις (2.7) και (2.8), προκύπτει η (2.6).

□

Πρόταση 2.3: Ισχύει ότι $\Gamma\Big(\dfrac{1}{2}\Big) = \sqrt{\pi}$.

Απόδειξη. Χρησιμοποιώντας την (2.6) για $z = \dfrac{1}{2}$, προκύπτει ότι:

$$\left[\Gamma\Big(\frac{1}{2}\Big)\right]^2 = \frac{\pi}{\sin(\frac{\pi}{2})} \Rightarrow \left[\Gamma\Big(\frac{1}{2}\Big)\right]^2 = \pi \Rightarrow \Gamma\Big(\frac{1}{2}\Big) = \sqrt{\pi}. \tag{2.9}$$

□

Πρόταση 2.4: Να δειχθεί ο τύπος διπλασιασμού (του Legendre):

$$\Gamma(2z) = \frac{2^{2z-1}}{\sqrt{\pi}}\Gamma(z)\Gamma\Big(z + \frac{1}{2}\Big), \ Re(z) > 0. \tag{2.10}$$

Απόδειξη. Χρησιμοποιούμε τη σχέση (2.1) και έχουμε:

$$B(z, z) = \int_0^1 (t(1-t))^{z-1} dt = \int_0^1 \left(\frac{1}{4} - \Big(t - \frac{1}{2}\Big)^2\right)^{z-1} dt.$$

Θέτοντας $t - \dfrac{1}{2} = \dfrac{sin\theta}{2}$, έχουμε:

$$\begin{aligned} B(z, z) &= \frac{1}{2^{2z-1}} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} cos^{2z-1}\theta \, d\theta = \frac{2}{2^{2z-1}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} cos^{2z-1}\theta \, d\theta = \frac{B(\frac{1}{2}, z)}{2^{2z-1}} \\ &= \frac{\Gamma(z)\Gamma(\frac{1}{2})}{2^{2z-1}\Gamma(z + \frac{1}{2})}. \end{aligned} \tag{2.11}$$

Οπότε από τις (2.11) και (2.9), προκύπτει η (2.10). □

Πρόταση 2.5: Να δειχθεί ότι:

$$\Gamma\Big(n + \frac{1}{2}\Big) = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2n-1)\sqrt{\pi}}{2^n} = \frac{(2n)!}{2^{2n} n!}\sqrt{\pi}. \tag{2.12}$$

Απόδειξη. Εφαρμόζουμε την αναδρομική σχέση (1.4), κατ' επανάληψη, οπότε προκύπτει:

$$\begin{aligned}
\Gamma\Big(n+\frac{1}{2}\Big) &= \Gamma\Big(n-\frac{1}{2}+1\Big) = \Big(n-\frac{1}{2}\Big)\Gamma\Big(n-\frac{1}{2}\Big) = \Big(n-\frac{1}{2}\Big)\Big(n-\frac{3}{2}\Big)\Gamma\Big(n-\frac{3}{2}\Big) \\
&= \cdots = \Big(n-\frac{1}{2}\Big)\Big(n-\frac{3}{2}\Big)\ldots\frac{1}{2}\Gamma\Big(\frac{1}{2}\Big) = \frac{(2n-1)}{2}\frac{(2n-3)}{2}\ldots\frac{5}{2}\frac{3}{2}\frac{1}{2}\sqrt{\pi} \\
&= \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot \ldots \cdot (2n-1)\sqrt{\pi}}{2^n} = \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot \ldots \cdot (2n-1)\cdot (2n)\sqrt{\pi}}{2\cdot 4\cdot \ldots \cdot (2n)\cdot 2^n} \\
&= \frac{(2n)!}{2^{2n}n!}\sqrt{\pi}.
\end{aligned}$$

□

Σημείωση 2.3: Ο τύπος (2.12) προκύπτει και από τον τύπο (2.10), θέτοντας όπου z το $n \in \mathbb{N}$.

3 Συνάρτηση ψ(z)

Ορισμός 3.1: Η συνάρτηση $\psi(z)$ ορίζεται ως το πηλίκο της παραγώγου της συνάρτησης $\Gamma(z)$ προς τη συνάρτηση $\Gamma(z)$, δηλαδή:

$$\psi(z) = \frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)} = \frac{d}{dz}(\ln\Gamma(z)), \quad z \neq 0, -1, -2, \ldots. \tag{3.1}$$

Πρόταση 3.1: Η συνάρτηση $\psi(z)$ ικανοποιεί τη σχέση:

$$\psi(z+1) = \psi(z) + \frac{1}{z}, \quad z \neq 0, -1, -2, \ldots. \tag{3.2}$$

Απόδειξη. Χρησιμοποιούμε τη σχέση (3.1) θέτοντας όπου z το $z+1$, οπότε προκύπτει:

$$\begin{aligned}
\psi(z+1) &= \frac{\Gamma'(z+1)}{\Gamma(z+1)} = \frac{d}{dz}(\ln\Gamma(z+1)) \overset{(1.4)}{=} \frac{d}{dz}(\ln(z\Gamma(z))) = \frac{d}{dz}(\ln z + \ln\Gamma(z)) \\
&= \frac{1}{z} + \frac{d}{dz}(\ln\Gamma(z)) = \frac{1}{z} + \psi(z).
\end{aligned}$$

□

Πρόταση 3.2: Η συνάρτηση $\psi(z)$ ικανοποιεί τις παρακάτω σχέσεις:

$$(\alpha) \quad \psi(z+n) = \psi(z) + \sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{z+k}, \quad n = 1, 2, \ldots \tag{3.3}$$

$$(\beta) \quad \psi(z) - \psi(1-z) = -\frac{\pi}{\tan \pi z}, \quad z \neq 0, \pm 1, \pm 2, \ldots. \tag{3.4}$$

Απόδειξη. (α) Η απόδειξη αυτής της σχέσης θα γίνει χρησιμοποιώντας τη μέθοδο της επαγωγής:
Για $n = 1$:

$$\psi(z+1) = \psi(z) + \frac{1}{z},$$

που ισχύει (βλέπε (3.2)).
Έστω ότι ισχύει για $n = m$, δηλαδή

$$\psi(z+m) = \psi(z) + \sum_{k=0}^{m-1} \frac{1}{z+k}. \tag{3.5}$$

Θα δείξουμε ότι ισχύει για $n = m+1$, δηλαδή

$$\psi(z+m+1) = \psi(z) + \sum_{k=0}^{m} \frac{1}{z+k}. \tag{3.6}$$

Το πρώτο μέλος της αποδεικτέας σχέσης μπορεί να γραφεί:

$$\psi(z+m+1) = \psi(z+m) + \frac{1}{z+m} \overset{(3.5)}{=} \psi(z) + \sum_{k=0}^{m-1} \frac{1}{z+k} + \frac{1}{z+m} = \psi(z) + \sum_{k=0}^{m} \frac{1}{z+k},$$

η οποία είναι η (3.6). Άρα η (3.3) ισχύει για κάθε $n \in \mathbb{N}$.
(β) Η απόδειξη αυτής της σχέσης, βασίζεται στην (2.6). Πράγματι:

$$\begin{aligned}\psi(z) - \psi(1-z) &= \frac{d}{dz}\ln\Gamma(z) + \frac{d}{dz}\ln\Gamma(1-z) = \frac{d}{dz}\ln(\Gamma(z)\Gamma(1-z)) \overset{(2.6)}{=} \frac{d}{dz}\ln\frac{\pi}{\sin\pi z} \\ &= \frac{\sin\pi z}{\pi}\frac{(-\pi)^2\cos\pi z}{(\sin\pi z)^2} = -\frac{\pi}{\tan\pi z}.\end{aligned}$$

□

4 Συνάρτηση Σφάλματος

Ορισμός 4.1: Η συνάρτηση σφάλματος ορίζεται ως το ολοκλήρωμα

$$erf(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt, \quad x > 0. \tag{4.1}$$

Ορισμός 4.2: Η συμπληρωματική συνάρτηση σφάλματος ορίζεται ως το ολοκλήρωμα

$$erfc(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^\infty e^{-t^2} dt, \quad x > 0. \tag{4.2}$$

Πρόταση 4.1: Η συνάρτηση σφάλματος και η συμπληρωματική συνάρτηση σφάλματος ικανοποιούν την ισότητα:

$$erf(x) + erfc(x) = 1. \tag{4.3}$$

Απόδειξη. Παρατηρούμε ότι:

$$erf(x) + erfc(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty e^{-t^2} dt. \tag{4.4}$$

Για τον υπολογισμό του ολοκληρώματος $\displaystyle\int_0^\infty e^{-t^2} dt$, θέτουμε $t^2 = u \Rightarrow 2tdt = du$. Τα άκρα ολοκλήρωσης θα είναι ίδια, οπότε έχουμε:

$$\int_0^\infty e^{-t^2} dt = \int_0^\infty e^{-u} u^{-1/2} \frac{du}{2} = \frac{1}{2} \int_0^\infty e^{-u} u^{1/2-1} du = \frac{1}{2} \Gamma\Big(\frac{1}{2}\Big) \overset{(2.9)}{=} \frac{\sqrt{\pi}}{2}. \tag{4.5}$$

Οπότε από τις (4.4) και (4.5) προκύπτει η (4.2). □

Ασκήσεις

Άσκηση 1. Να υπολογισθούν τα ολοκληρώματα:

(1) $\displaystyle\int_0^\infty x^5 e^{-x} dx$, (2) $\displaystyle\int_0^\infty x^3 e^{-2x} dx$, (3) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{e^{-2t}}{\sqrt{t}}\, dt$, (4) $\displaystyle\int_0^1 \ln\Big(\frac{1}{x}\Big)^{n-1} dx,\ n \geq 1$,

(5) $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{\frac{1-x}{x}}\, dx$, (6) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos^3\theta \sin^2\theta\, d\theta$, (7) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \sqrt{\tan\theta}\, d\theta$, (8) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{y^2}{1+y^4}\, dy$,

(9) $\displaystyle\int_\alpha^\beta (x-\alpha)^p (\beta - x)^q\, dx,\ p > -1,\ q > -1,\ \beta > \alpha$, (10) $\displaystyle\int_0^2 x^2 (2-x)^{13} dx$,

(11) $\displaystyle\int_0^1 x^2 (1-x^4)^{-1/3} dx$, (12) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x^m}{x^n + a} dx,\ m, n \in \mathbb{N},\ n > m+1$,

(13) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \tan^{1/n}\theta d\theta,\ n > 1$, (14) $\displaystyle\int_0^1 (1-x^n)^{-\frac{1}{n}} dx,\ n > 1$,

(15) $\displaystyle\int_0^\infty x^n e^{-x^p} dx,\ p > 0$, (16) $\displaystyle\int_0^\infty 2u^{2x-1} e^{-u^2} du$.

Λύση:

(1) $\displaystyle\int_0^\infty x^5 e^{-x} dx = \int_0^\infty x^{6-1} e^{-x} dx = \Gamma(6) = 5!$

(2) Θέτουμε $2x = t \Rightarrow dx = \dfrac{dt}{2}$. Τα άκρα της ολοκλήρωσης δεν αλλάζουν, οπότε:

$$\int_0^\infty x^3 e^{-2x} dx = \int_0^\infty \Big(\frac{t}{2}\Big)^3 e^{-t} \frac{dt}{2} = \frac{1}{2^4} \int_0^\infty t^3 e^{-t} dt = \frac{1}{2^4} \int_0^\infty t^{4-1} e^{-t} dt = \frac{1}{2^4} \Gamma(4) = \frac{3!}{2^4}$$

(3) Θέτουμε $2t = x \Rightarrow dt = \dfrac{dx}{2}$. Τα άκρα της ολοκλήρωσης δεν αλλάζουν, οπότε:

$$\int_0^\infty \frac{e^{-2t}}{\sqrt{t}}\,dt = \int_0^\infty t^{-1/2}e^{-2t}dt = \int_0^\infty \left(\frac{x}{2}\right)^{-1/2} e^{-x}\frac{dx}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^\infty x^{-1/2}e^{-x}dx =$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^\infty x^{1/2-1}e^{-x}dx = \frac{\Gamma(1/2)}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

(4) Θέτουμε $\ln\frac{1}{x} = t \Rightarrow \frac{1}{x} = e^t \Rightarrow x = e^{-t},\ dx = -e^{-t}dt$. Για $x \to 0$, το $t \to \infty$ και για $x \to 1$, το $t \to 0$, οπότε το ολοκλήρωμα:
$$\int_0^1 \ln\left(\frac{1}{x}\right)^{n-1}dx = \int_\infty^0 t^{n-1}(-e^{-t})dt = \int_0^\infty t^{n-1}e^{-t}dt = \Gamma(n) = (n-1)!$$

(5) $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{\frac{1-x}{x}}\,dx = \int_0^1 x^{-1/2}(1-x)^{1/2}dx = \int_0^1 x^{\frac{1}{2}-1}(1-x)^{\frac{3}{2}-1}dx = B\Big(\frac{1}{2},\frac{3}{2}\Big) =$

$$\left.\begin{array}{r} = \frac{\Gamma(1/2)\,\Gamma(3/2)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}+\frac{3}{2}\right)} = \frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma(3/2)}{\Gamma(2)} = \sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) \\ \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{2!}{2^2}\sqrt{\pi} = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \end{array}\right\} = \frac{\pi}{2}$$

(6) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos^3\theta\sin^2\theta\,d\theta = \int_0^{\pi/2} \cos^{2\cdot 2-1}\theta\sin^{2\cdot\frac{3}{2}-1}\theta\,d\theta = \frac{1}{2}\,B\big(2,\frac{3}{2}\big) = \frac{1}{2}\,\frac{\Gamma(2)\,\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{7}{2}\right)}$

$$= \frac{1}{2}\,\frac{1!\,\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}{\frac{5}{2}\cdot\frac{3}{2}\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)} = \frac{2}{15}$$

(7) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \sqrt{\tan\theta}\,d\theta = \int_0^{\pi/2} \sin^{1/2}\theta\cos^{-1/2}\theta\,d\theta = \int_0^{\pi/2} \sin^{\frac{3}{2}-1}\theta\cos^{\frac{1}{2}-1}\theta\,d\theta = \frac{1}{2}\,B\Big(\frac{3}{4},\frac{1}{4}\Big) =$

$$= \frac{1}{2}\,\frac{\Gamma(1/4)\Gamma(3/4)}{\Gamma(1)} = \frac{1}{2}\,\Gamma(1/4)\Gamma(3/4)$$

(8) Θέτουμε $y^4 = u \Rightarrow y = u^{1/4},\ dy = \frac{1}{4}u^{-3/4}du$ και $y^2 = u^{1/2}$. Τα άκρα της ολοκλήρωσης δεν αλλάζουν, οπότε:
$$\int_0^\infty \frac{y^2}{1+y^4}\,dy = \int_0^\infty \frac{u^{1/2}}{1+u}\,\frac{1}{4}\,u^{-3/4}\,du = \frac{1}{4}\int_0^\infty \frac{u^{-1/4}}{1+u}\,du \overset{(*)}{=} \frac{1}{4}\int_0^\infty \frac{u^{3/4-1}}{(1+u)^1}\,du =$$
$$= \frac{1}{4}\,B\Big(\frac{1}{4},\frac{3}{4}\Big) = \frac{1}{4}\,\frac{\Gamma(1/4)\Gamma(3/4)}{\Gamma(1)} = \frac{1}{4}\,\Gamma(1/4)\Gamma(3/4)$$
$(*)$ αφού $-\frac{1}{4} = x-1 \Rightarrow x = \frac{3}{4}$ και $\frac{3}{4}+y = 1 \Rightarrow y = \frac{1}{4}$

(9) Θέτουμε $x-\alpha = (\beta-\alpha)u \Rightarrow x = (\beta-\alpha)u+\alpha,\ dx = (\beta-\alpha)du$ και $\beta - x = \beta-\alpha-(\beta-\alpha)u = (\beta-\alpha)(1-u)$, για $x \to \alpha$, το $u \to 0$ και για $x \to \beta$, το $u \to 1$, οπότε:
$$\int_\alpha^\beta (x-\alpha)^p(\beta-x)^q\,dx = \int_0^1 (\beta-\alpha)^{p+q}\,u^p\,(1-u)^q\,(\beta-\alpha)du =$$
$$= (\beta-\alpha)^{p+q+1}\int_0^1 u^{p+1-1}\,(1-u)^{q+1-1}du = (\beta-\alpha)^{p+q+1}\,B(p+1,q+1) =$$

$$= (\beta-\alpha)^{p+q+1}\,\frac{\Gamma(p+1)\,\Gamma(q+1)}{\Gamma(p+q+2)}.$$

(10) Θέτουμε $x=2u,\ \ dx=2du$, για $x\to 0$, το $u\to 0$ και για $x\to 2$, το $u\to 1$, οπότε:

$$\int_0^2 x^2(2-x)^{13}dx=\int_0^1 4u^2(2-2u)^{13}2du=2^{16}\int_0^1 u^2(1-u)^{13}du=$$
$$=2^{16}\int_0^1 u^{3-1}(1-u)^{14-1}du=2^{16}B(3,14)=2^{16}\frac{\Gamma(3)\Gamma(14)}{\Gamma(3+14)}=2^{16}\frac{2!13!}{16!}=\frac{4096}{105}$$

(11) Θέτουμε $x^4=u\Rightarrow x=u^{1/4},\ dx=\dfrac{1}{4}u^{-3/4}du$. Τα άκρα της ολοκλήρωσης δεν αλλάζουν, οπότε:

$$\int_0^1 x^2(1-x^4)^{-1/3}dx=\int_0^1 u^{1/2}(1-u)^{-1/3}\frac{1}{4}u^{-3/4}du=\frac{1}{4}\int_0^1 u^{-1/4}(1-u)^{-1/3}du=$$
$$=\frac{1}{4}\int_0^1 u^{\frac{3}{4}-1}(1-u)^{\frac{2}{3}-1}du=\frac{1}{4}B\big(\frac{3}{4},\frac{2}{3}\big)=\frac{1}{4}\frac{\Gamma(3/4)\Gamma(2/3)}{\Gamma\big(\frac{3}{4}+\frac{2}{3}\big)}=\frac{1}{4}\frac{\Gamma(3/4)\Gamma(2/3)}{\Gamma(17/12)}=$$
$$=\frac{1}{4}\frac{\Gamma(3/4)\Gamma(2/3)}{\frac{5}{12}\Gamma(5/12)}=\frac{3}{5}\frac{\Gamma(3/4)\Gamma(2/3)}{\Gamma(5/12)}$$

(12) Θέτουμε $\dfrac{x^n}{a}=t\Rightarrow x^n=at\Rightarrow w=(at)^{1/n},\ dx=\dfrac{1}{n}a^{1/n}t^{\frac{1}{n}-1}dt$. Τα άκρα της ολοκλήρωσης δεν αλλάζουν, οπότε:

$$\int_0^\infty \frac{x^m}{x^n+a}dx=\int_0^\infty \frac{(at)^{m/n}}{at+a}\frac{1}{n}a^{1/n}t^{\frac{1}{n}-1}dt=\frac{a^{\frac{1}{n}-1+\frac{m}{n}}}{n}\int_0^\infty \frac{t^{m/n}}{t+1}t^{\frac{1}{n}-1}dt=$$
$$=\frac{a^{\frac{m+1-n}{n}}}{n}\int_0^\infty t^{\frac{m+1}{n}-1}(1+t)^{-1}dt=\frac{a^{\frac{m+1-n}{n}}}{n}\int_0^\infty t^{\frac{m+1}{n}-1}(1+t)^{-(1-\frac{m+1}{n}+\frac{m+1}{n})}dt=$$
$$=\frac{a^{\frac{m+1-n}{n}}}{n}B\big(\frac{m+1}{n},1-\frac{m+1}{n}\big)=\frac{a^{\frac{m+1-n}{n}}}{n}\frac{\Gamma(\frac{m+1}{n})\Gamma(1-\frac{m+1}{n})}{\Gamma(\frac{m+1}{n}+1-\frac{m+1}{n})}=$$
$$=\frac{a^{\frac{m+1-n}{n}}}{n}\Gamma(\frac{m+1}{n})\Gamma\big(1-\frac{m+1}{n}\big)$$

(13) $$\int_0^{\pi/2}(\tan\theta)^{1/n}\,d\theta=\int_0^{\pi/2}\sin^{1/n}\theta\cos^{-1/n}\theta\,d\theta=\int_0^{\pi/2}\sin^{\frac{n+1}{n}-1}\theta\cos^{\frac{n-1}{n}-1}\theta\,d\theta=$$
$$=\frac{1}{2}\,B\Big(\frac{n+1}{2n},\frac{n-1}{2n}\Big)=\frac{1}{2}\,\frac{\Gamma(\frac{n+1}{2n})\Gamma(\frac{n-1}{2n})}{\Gamma(\frac{n+1+n-1}{2n})}=\frac{1}{2}\,\Gamma\big(\frac{n+1}{2n}\big)\,\Gamma\big(\frac{n-1}{2n}\big)$$

(14) Θέτουμε $x^n=t\Rightarrow x=t^{1/n},\ dx=\dfrac{1}{n}t^{\frac{1}{n}-1}dt$, για $x\to 0$, το $t\to 0$ και για $x\to 1$, το $t\to 1$, οπότε:

$$\int_0^1(1-x^n)^{-\frac{1}{n}}dx=\int_0^1(1-t)^{-\frac{1}{n}}\frac{1}{n}t^{\frac{1}{n}-1}dt=\frac{1}{n}\int_0^1 t^{\frac{1}{n}-1}(1-t)^{\frac{n-1}{n}-1}dt=$$
$$=\frac{1}{n}B\big(\frac{1}{n},\frac{n-1}{n}\big)=\frac{1}{n}\frac{\Gamma(\frac{1}{n})\Gamma(\frac{n-1}{n})}{\Gamma(\frac{1+n-1}{n})}=\frac{1}{n}\,\Gamma\big(\frac{1}{n}\big)\,\Gamma\big(\frac{n-1}{n}\big)$$

(15) Θέτουμε $x^p = t \Rightarrow x = t^{1/p},\ dx = \dfrac{1}{p} t^{\frac{1}{p}-1} dt$, για $x \to 0$, το $t \to 0$ και για $x \to \infty$, το $t \to \infty$, οπότε:

$$\int_0^\infty x^n e^{-x^p} dx = \int_0^\infty t^{n/p} e^{-t} \frac{1}{p} t^{\frac{1}{p}-1} dt = \frac{1}{p} \int_0^\infty t^{\frac{n+1}{p}-1} e^{-t} dt = \frac{1}{p} \Gamma\big(\frac{n+1}{p}\big)$$

(16) Θέτουμε $u^2 = t \Rightarrow u = t^{1/2},\ 2udu = dt$. Τα άκρα της ολοκλήρωσης δεν αλλάζουν, οπότε:

$$\int_0^\infty 2u^{2x-1} e^{-u^2} du = 2\int_0^\infty (t^{1/2})^{2x-1} e^{-t} \frac{dt}{2t^{1/2}} = \int_0^\infty t^{x-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}} e^{-t} dt = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt =$$
$$= \Gamma(x).$$

Άσκηση 2. Να αποδειχθεί ότι:

$$\int_0^{\pi/2} \cos^{2n+1}\phi\, d\phi = \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!}, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Λύση:

Γνωρίζουμε ότι: $B(x, y) = 2\displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin^{2x-1}\phi \cos^{2y-1}\phi\, d\phi$. Εδώ έχουμε:

$$\int_0^{\pi/2} \cos^{2n+1}\phi\, d\phi = \int_0^{\pi/2} \sin^0\phi \cos^{2n+1}\phi\, d\phi = \int_0^{\pi/2} \sin^{2\frac{1}{2}-1}\phi \cos^{2(n+1)-1}\phi\, d\phi =$$
$$= \frac{1}{2} B\big(\frac{1}{2}, n+1\big) = \frac{1}{2} \frac{\Gamma(1/2)\Gamma(n+1)}{\Gamma(\frac{1}{2}+n+1)} \overset{(1.6)}{=} \frac{1}{2} \frac{\sqrt{\pi} n!}{\Gamma(\frac{1}{2}+n+1)} \overset{(*)}{=} \frac{1}{2} \frac{\sqrt{\pi} n!}{(n+\frac{1}{2})\Gamma(\frac{1}{2}+n)} \overset{(2.12)}{=}$$
$$= \frac{2\sqrt{\pi} n! 4^n n!}{2(2n+1)(2n)!\sqrt{\pi}} = \frac{(n!)^2 2^{2n}}{(2n+1)!}.$$

Άσκηση 3. Να δειχθεί ότι:

$$B(x, y) = B(x+1, y) + B(x, y+1).$$

Λύση:

$$B(x+1, y) + B(x, y+1) = \frac{\Gamma(x+1)\Gamma(y)}{\Gamma(x+1+y)} + \frac{\Gamma(x)\Gamma(y+1)}{\Gamma(x+1+y)} = \frac{x\Gamma(x)\Gamma(y)}{(x+y)\Gamma(x+y)} + \frac{y\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$$
$$= (x+y)\frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{(x+y)\Gamma(x+y)} = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)} = B(x, y).$$

Άσκηση 4. Χρησιμοποιώντας την ισότητα

$$\Gamma(3a) = \frac{3^{3a-\frac{1}{2}}}{2\pi} \Gamma(a)\Gamma\big(a+\frac{1}{3}\big)\Gamma\big(a+\frac{2}{3}\big),$$

να αποδειχθεί ότι:

$$3\psi(3a) = \psi(a) + \psi\big(a + \frac{1}{3}\big) + \psi\big(a + \frac{2}{3}\big) + 3\ln 3.$$

Λύση:

Παίρνουμε τον λογάριθμο και στα δύο μέλη της δοθείσας ισότητας, οπότε προκύπτει:

$$\ln\Gamma(3a) = \big(3a - \frac{1}{2}\big)\ln 3 - \ln(2\pi) + \ln\Gamma(a) + \ln\Gamma\big(a + \frac{1}{3}\big) + \ln\Gamma\big(a + \frac{2}{3}\big).$$

Στη συνέχεια, παραγωγίζουμε ως προς a την προκύπτουσα ισότητα:

$$\begin{aligned}\frac{3\Gamma'(3a)}{\Gamma(3a)} &= 3\ln 3 + \frac{\Gamma'(a)}{\Gamma(a)} + \frac{\Gamma'(a+\frac{1}{3})}{\Gamma(a+\frac{1}{3})} + \frac{\Gamma'(a+\frac{2}{3})}{\Gamma(a+\frac{2}{3})} \Rightarrow \\ 3\psi(3a) &= 3\ln 3 + \psi(a) + \psi\big(a + \frac{1}{3}\big) + \psi\big(a + \frac{2}{3}\big).\end{aligned}$$

Άσκηση 5. Να δειχθεί ότι:

$$\psi(1) = \int_0^\infty e^{-t}\ln t\, dt.$$

Λύση:

$$\psi(1) = \frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)}\Big|_{x=1} = \Gamma'(x)\big|_{x=1} = \Big(\frac{\partial}{\partial x}\int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}dt\Big)\Big|_{x=1} = \int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}\ln t\, dt\Big|_{x=1} =$$
$$= \int_0^\infty e^{-t}\ln t\, dt.$$

Άσκηση 6. Να αποδειχθεί ότι:

$$\psi(2z) = \frac{1}{2}\Big[\psi(z) + \psi\big(z + \frac{1}{2}\big)\Big] + \ln 2.$$

Λύση:

Θα χρησιμοποιήσουμε τον τύπο διπλασιασμού του Legendre:

$$\begin{aligned}\psi(2z) &= \frac{1}{2}\frac{d}{dz}\ln\Gamma(2z) = \frac{1}{2}\frac{d}{dz}\ln\Big[\frac{2^{2z-1}}{\sqrt{\pi}}\Gamma(z)\Gamma\Big(z + \frac{1}{2}\Big)\Big] \\ &= \frac{1}{2}\frac{d}{dz}\Big[\ln 2^{2z-1} - \ln\sqrt{\pi} + \ln\Gamma(z) + \ln\Gamma\Big(z + \frac{1}{2}\Big)\Big] \\ &= \frac{1}{2}\Big[\frac{d}{dz}\big((2z-1)\ln 2\big) + \psi(z) + \psi\big(z + \frac{1}{2}\big)\Big] = \ln 2 + \frac{1}{2}\Big[\psi(z) + \psi\big(z + \frac{1}{2}\big)\Big].\end{aligned}$$

Βιβλιογραφία

Μασσαλάς Χ. (2010) *Ειδικές Συναρτήσεις*, Cutenberg.

Σιαφαρίκας Π. (2009) *Ειδικές Συναρτήσεις*, Εκδόσεις Πανεπιστημίου Πατρών.

Hochstadt H. (1986) *The function of Mathematical Physics*, Dover Publications, Inc. N.Y..

Lebedev N.N. (1972) *Special functions and their Applications*, Dover Publications.

Luke Y. L. (1969) *The special functions and their Approximations-Volume I*, Academic Press.