Τίτλος Μαθήματος: Διαφορική Γεωμετρία ΙΙ

Ενότητα: Οι εξισώσεις Codazzi και Gauss και το Θεμελιώδες Θεώρημα της θεωρίας επιφανειών

Όνομα Καθηγητή: Ανδρέας Αρβανιτογεώργος

Τμήμα: Μαθηματικών

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Πατρών**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Κεφάλαιο 2

Οι εξισώσεις Codazzi και Gauss και το Θεμελιώδες Θεώρημα της θεωρίας επιφανειών

Στο κεφάλαιο αυτό θα ασχοληθούμε με μια βαθύτερη κατανόηση της καμπυλότητας Gauss θα ορίσουμε τα σύμβολα του Christoffel τα οποία είναι πραγματικές συναρτήσεις $\Gamma_{ij}^k : U \to \mathbb{R}$ με μια περιοχή παραμέτρησης $X : U \to M$ μιας επιφάνειας M οι οποίες θα οριστούν ως οι συντελεστές γραμμικών εκφράσεων των μερικών παραγώγων X_{uu}, X_{uv}, X_{vv} ως προς τη βάση $\{X_u, X_v, N\}$ του $\mathbb{R}^3$. Θα καταλήξουμε σε δύο σημαντικές ομάδες εξισώσεων τις εξισώσεις Christoffel και τις εξισώσεις Gauss που συνδέουν τα θεμελιώδη ποσά πρώτης τάξης E, F, G με την καμπυλότητα K και τα Γ_{ij}^k. Θα φανεί επίσης ότι τα σύμβολα Christoffel εξαρτώνται μόνο από τα E, F, G, άρα θα έχουμε μια εναλλακτική απόδειξη του Θαυμαστού Θεωρήματος του Gauss. Στη συνέχεια θα δούμε κάποια σημαντικά αποτελέσματα ολικού χαρακτήρα για μια επιφάνεια (π.χ. Θεώρημα Liebmann).

Έστω M μια κανονική επιφάνεια του $\mathbb{R}^3$ με απεικόνιση Gauss $N : M \to \mathbb{S}^2$ και έστω $X : U \subset \mathbb{R}^2 \to M$ μια τοπική παραμέτρηση της M. Σε κάθε σημείο του $X(U) \subset M$ ορίζουμε την βάση του $\mathbb{R}^3$ που αποτελείται από τα διανύσματα $\{X_u, X_v, N\}$ και θα μελετήσουμε τις εκφράσεις $X_{..}$ των παραγώγων των διανυσμάτων X_u, X_v και των N_u, N_v ως προς την βάση αυτή.

Θυμίζουμε ότι αν σε οποιοδήποτε σημείο $X(u,v) = p$ $((u,v) \in U)$ είναι

$$T_pM = \operatorname{span}\{X_u(u,v), X_v(u,v)\}$$

και ότι το διάνυσμα $N(X(u,v))$ είναι κάθετο στον T_pM. Επίσης, θυμίζουμε ότι για τα θεμελιώδη ποσά δεύτερης τάξης ισχύουν οι σχέσεις

$$e = \langle N, X_{uu} \rangle\,,\ f = \langle N, X_{vu} \rangle\,,\ g = \langle N, X_{vv} \rangle \tag{1}$$

Προκυμένου να χρησιμοποιήσουμε ιστορικά καθιερωμένο συμβολισμό ας θέσουμε $u \leftrightarrow 1$ και $v \leftrightarrow 2$. Επειδή λοιπόν το σύνολο $\{X_u, X_v, N\}$ αποτελεί βάση του $\mathbb{R}^3$, υπάρχουν συναρτήσεις Γ^1_{11}, Γ^2_{11}, Γ^1_{12}, Γ^2_{12}, Γ^1_{22} και Γ^2_{22} τέτοιες ώστε

$$\begin{aligned}
X_{uu} &= \Gamma^1_{11}X_u + \Gamma^2_{11}X_v + eN \\
X_{uv} &= \Gamma^1_{12}X_u + \Gamma^2_{12}X_v + fN \\
X_{vu} &= \Gamma^1_{21}X_u + \Gamma^2_{21}X_v + fN \\
X_{vv} &= \Gamma^1_{22}X_u + \Gamma^2_{22}X_v + gN
\end{aligned} \tag{2.1}$$

όπου λάβαμε υπόψη τις σχέσεις (1). Οι πραγματικές συναρτήσεις Γ^k_{ij} $(i, j, k \in \{1, 2\})$ επί του $U \subset \mathbb{R}^2$ ονομάζονται σύμβολα του Christoffel. Λόγω της σχέσης $X_{uv} = X_{vu}$ ισχύει ότι

$$\Gamma^1_{12} = \Gamma^1_{21}, \quad \Gamma^2_{12} = \Gamma^2_{21}$$

Παράδειγμα 2.1. Θεωρούμε την σφαίρα $\mathbb{S}^2$ με τοπική παραμέτρηση

$$X(u, v) = (\sin u \cos v, \sin u \sin v, \cos u).$$

Είναι

$$\begin{aligned}
X_u &= (\cos u \cos v, \cos u \sin v, -\sin u) \\
X_v &= (-\sin u \sin v, \sin u \cos v, 0) \\
X_{uu} &= (-\sin u \cos v, -\sin u \sin v, -\cos u) = -X(u, v) \\
X_{uv} &= (\cos u \sin v, \cos u \cos v, 0) \\
X_{vv} &= (-\sin u \cos v, -\sin u \sin v, 0) = -\sin u(\cos v, \sin v, 0).
\end{aligned}$$

Επειδή το διάνυσμα X_{uu} βρίσκεται στη διεύθυνση του διανύσματος N, είναι $\Gamma^1_{11} = \Gamma^2_{11} = 0$. Επιπλέον, παρατηρούμε ότι $X_{uv} = \cot u X_v$, άρα $\Gamma^1_{12} = 0$ και $\Gamma^2_{12} = \cot u$. Τέλος, λόγω του ότι $X_{vv} = -\sin u \cos u X_u - \sin^2 u N$ παίρνουμε ότι $\Gamma^1_{22} = -\sin u \cos u$ και $\Gamma^2_{22} = 0$. Στη συνέχεια, παίρνουμε τα εσωτερικά γινόμενα στις εξισώσεις (2.1) με X_u και X_v και λαμβάνουμε ότι

$$\begin{aligned}
\langle X_{uu}, X_u\rangle &= \Gamma^1_{11}E + \Gamma^2_{11}F \\
\langle X_{uu}, X_v\rangle &= \Gamma^1_{11}F + \Gamma^2_{11}G \\
\langle X_{uv}, X_u\rangle &= \Gamma^1_{12}E + \Gamma^2_{12}F \\
\langle X_{uv}, X_v\rangle &= \Gamma^1_{12}F + \Gamma^2_{12}G \\
\langle X_{vv}, X_u\rangle &= \Gamma^1_{22}E + \Gamma^2_{22}F \\
\langle X_{vv}, X_v\rangle &= \Gamma^1_{22}F + \Gamma^2_{22}G
\end{aligned} \tag{2.2}$$

Παρατηρούμε τώρα ότι ισχύουν οι εξής σχέσεις:

$$\begin{aligned}
\langle X_{uu}, X_u \rangle &= \frac{1}{2} \langle X_u, X_u \rangle_u = \frac{1}{2} E_u \\
\langle X_{uv}, X_u \rangle &= \frac{1}{2} \langle X_u, X_u \rangle_v = \frac{1}{2} E_v \\
\langle X_{uv}, X_v \rangle &= \frac{1}{2} \langle X_v, X_v \rangle_u = \frac{1}{2} G_u \\
\langle X_{uu}, X_v \rangle &= \langle X_u, X_v \rangle_u - \langle X_u, X_{uv} \rangle = F_u - \frac{1}{2} E_v \\
\langle X_{vv}, X_u \rangle &= \langle X_u, X_v \rangle_v - \langle X_{uv}, X_v \rangle = F_v - \frac{1}{2} G_u \\
\langle X_{vv}, X_v \rangle &= \frac{1}{2} \langle X_v, X_v \rangle_v = \frac{1}{2} G_v . \qquad (2.3)
\end{aligned}$$

Συνεπώς λόγω της $(2,3)$ οι σχέσεις (2.2) μπορούν να ξαναγραφτούν ως εξής:

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Gamma_{11}^1 \\ \Gamma_{11}^2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} E_u \\ F_u - \frac{1}{2} E_v \end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Gamma_{12}^1 \\ \Gamma_{12}^2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} E_v \\ \frac{1}{2} G_u \end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Gamma_{22}^1 \\ \Gamma_{22}^2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} F_v - \frac{1}{2} G_u \\ \frac{1}{2} G_v \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Από τις παραπάνω ισότητες προκύπτουν οι εξής:

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} \Gamma_{11}^1 \\ \Gamma_{11}^2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} E_u \\ F_u - \frac{1}{2} E_v \end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix} \Gamma_{12}^1 \\ \Gamma_{12}^2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} E_v \\ \frac{1}{2} G_u \end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix} \Gamma_{22}^1 \\ \Gamma_{22}^2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} F_v - \frac{1}{2} G_u \\ \frac{1}{2} G_v \end{pmatrix} \qquad (2.4)
\end{aligned}$$

Αυτό το οποίο είναι αξιοσημείωτο από τους παραπάνω τύπους είναι ότι τα <u>σύμβολα του Christoffel</u>, τα οποία καθορίζουν τις εφαπτομενικές συνιστώσες των δεύτερων παραγώγων $X_{..}$, *μπορούν να υπολογιστούν μόνο από τα θεμελιώδη ποσά πρώτης τάξης* E, F, G *δηλ. εξαρτώνται μόνο από την πρώτη θεμελιώδη μορφή της επιφάνειας.*

Παράδειγμα 2.2. Θα υπολογίσουμε εκ νέου τα σύμβολα Christoffel για τη σφαίρα $\mathbb{S}^2$ και θα συγκρίνουμε τα αποτελέσματα με αυτά του παραδείγματος 2. Για την παραμέτρηση που χρησιμοποιήσαμε είναι $E = 1$, $F = 0$ και $G = \sin^2 u$. Χρησιμοποιώντας τις σχέσεις $(2,4)$ παίρνουμε ότι[1]

$$\begin{pmatrix} \Gamma^1_{11} \\ \Gamma^2_{11} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \csc^2 u \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} \Gamma^1_{12} \\ \Gamma^2_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \csc^2 u \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \sin u \cos u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \cot u \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} \Gamma^1_{22} \\ \Gamma^2_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \csc^2 u \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\sin u \cos u \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin u \cos u \\ 0 \end{pmatrix}$$

Συνεπώς τα μόνα μη μηδενικά σύμβολα Christoffel είναι τα $\Gamma^2_{12} = \Gamma^2_{21} = \cot u$ και $\Gamma^1_{22} = -\sin u \cos u$ όπως βρήκαμε στο Παράδειγμα 1.

Προκειμένου να προχωρήσουμε θυμίζουμε ότι αν $S_p : T_pM \to T_pM$, $S_p = -dN_p$ ο τελεστής σχήματος της επιφάνειας M σε ένα σημείο $p \in M$ με πίνακα $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ ως προς την βάση $\{X_u, X_v\}$, τότε είναι

$$\begin{aligned} N_u &= -aX_u - cX_v \\ N_v &= -bX_u - dX_v \end{aligned} \tag{2.5}$$

Παραγωγίζουμε τώρα τις εξισώσεις (2.1) και χρησιμοποιούμε την ισότητα των μικτών παραγώγων καθώς και την (2.5) και παίρνουμε:

$$\begin{aligned} X_{uuv} &= (\Gamma^1_{11})_v X_u + \Gamma^1_{11} X_{uv} + (\Gamma^2_{11})_v X_v + \Gamma^2_{11} X_{vv} + e_v N + e N_v \\ &= (\Gamma^1_{11})_v X_u + \Gamma^1_{11}\big(\Gamma^1_{12} X_u + \Gamma^2_{12} X_v + fN\big) + (\Gamma^2_{11})_v X_v \\ &\quad + \Gamma^2_{11}\big(\Gamma^1_{22} X_u + \Gamma^2_{22} X_v + gN\big) + e_v N - e\big(bX_u + dX_v\big) \\ &= \big((\Gamma^1_{11})_v + \Gamma^1_{11}\Gamma^1_{12} + \Gamma^2_{11}\Gamma^1_{22} - eb\big) X_u + \big((\Gamma^2_{11})_v + \Gamma^1_{11}\Gamma^2_{12} + \Gamma^2_{11}\Gamma^2_{22} - ed\big) X_v \\ &\quad + \big(\Gamma^1_{11} f + \Gamma^2_{11} g + e_v\big) N. \end{aligned}$$

Επίσης με παρόμοιο τρόπο

$$\begin{aligned} X_{uvu} &= \big((\Gamma^1_{12})_u + \Gamma^1_{12}\Gamma^1_{11} + \Gamma^2_{12}\Gamma^1_{12} - fa\big) X_u + \big((\Gamma^2_{12})_u + \Gamma^1_{12}\Gamma^2_{11} + \Gamma^2_{12}\Gamma^2_{12} - fc\big) X_v \\ &\quad + \big(e\Gamma^1_{12} f \Gamma^2_{12} + f_u\big) N \end{aligned}$$

Επειδή $X_{uuv} = X_{uvu}$ εξισώνουμε τις συνιστώσες των αντίστοιχων διανυσμάτων όπως φαίνονται παρακάτω:

$$\begin{aligned} (X_u) &: (\Gamma^1_{11})_v + \Gamma^2_{11}\Gamma^1_{22} - eb = (\Gamma^1_{12})_u + \Gamma^1_{12}\Gamma^1_{11} + \Gamma^2_{12}\Gamma^2_{12} - fa \\ (X_v) &: (\Gamma^2_{11})_v + \Gamma^1_{11}\Gamma^2_{12} + \Gamma^2_{11}\Gamma^2_{22} - eb = (\Gamma^2_{12})_u + \Gamma^1_{12}\Gamma^2_{11} + \Gamma^2_{12}\Gamma^2_{12} - fc \\ (N) &: e_v + f\Gamma^1_{11} + g\Gamma^2_{11} = f_u + e\Gamma^1_{12} + f\Gamma^2_{12} \end{aligned} \tag{2.6}$$

[1] $\csc x = \frac{1}{\sin x}$ ονομάζεται συντέμνουσα του x. Παρόμοια $\sec x = \frac{1}{\cos x}$ ονομάζεται τέμνουσα του x.

Με ανάλογο τρόπο λαμβάνοντας υπόψη ότι $X_{uvv} = X_{vvu}$ παίρνουμε τις ισότητες των αντίστοιχων παρακάτω συνιστωσών:

$$\begin{aligned}
(X_u) &: (\Gamma^1_{12})_v + \Gamma^1_{12}\Gamma^1_{12} + \Gamma^2_{12}\Gamma^1_{22} - fb = (\Gamma^1_{22})_u + \Gamma^1_{22}\Gamma^1_{11} + \Gamma^2_{22}\Gamma^1_{12} - ga \\
(X_v) &: (\Gamma^2_{12})_v + \Gamma^1_{12}\Gamma^2_{12} - fd = (\Gamma^2_{22})_u + \Gamma^1_{22}\Gamma^2_{11} - gc \\
(N) &: f_v + f\Gamma^1_{12} + g\Gamma^2_{12} = g_u + e\Gamma^1_{22} + f\Gamma^2_{22}.
\end{aligned} \tag{2.7}$$

Οι δύο εξισώσεις που προκύπτουν από την ισότητα των κάθετων συνιστωσών είναι γνωστές ως

Εξισώσεις Codazzi[2]

$$\boxed{\begin{aligned}
e_v - f_u &= e\Gamma^1_{12} + f\left(\Gamma^2_{12} - \Gamma^1_{11}\right) - g\Gamma^2_{11} \\
f_v - g_u &= e\Gamma^1_{22} + f\left(\Gamma^2_{22} - \Gamma^1_{12}\right) - g\Gamma^2_{12}
\end{aligned}}$$

Χρησιμοποιώντας τώρα τον τύπο για την καμπυλότητα Gauss $K = \frac{eg-f^2}{EG-F^2}$ καθώς και ότι τα στοιχεία του πίνακα του τελεστή σχήματος δίνονται από τις εξισώσεις

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{EG-F^2}\begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix}\begin{pmatrix} G & -F \\ -F & E \end{pmatrix} \tag{$*$}$$

και τις τέσσερεις από τις εξισώσεις (2.6), $(*)$ που αντιστοιχούν στις συνιστώσες X_u και X_v λαμβάνουμε τις παρακάτω

Εξισώσεις Gauss

$$\boxed{\begin{aligned}
EK &= (\Gamma^2_{11})_v - (\Gamma^2_{12})_u + \Gamma^1_{11}\Gamma^2_{12} + \Gamma^2_{11}\Gamma^2_{22} - \Gamma^1_{12}\Gamma^2_{11} - (\Gamma^2_{12})^2 \\
FK &= (\Gamma^1_{12})_u - (\Gamma^1_{11})_v + \Gamma^2_{12}\Gamma^1_{12} - \Gamma^2_{11}\Gamma^1_{22} \\
FK &= (\Gamma^2_{12})_v - (\Gamma^2_{22})_u + \Gamma^1_{12}\Gamma^2_{12} - \Gamma^1_{22}\Gamma^2_{11} \\
GK &= (\Gamma^1_{22})_u - (\Gamma^1_{12})_v + \Gamma^1_{22}\Gamma^1_{11} + \Gamma^2_{22}\Gamma^1_{12} - (\Gamma^1_{12})^2 - \Gamma^2_{12}\Gamma^1_{22}
\end{aligned}}$$

Άσκηση 1. Αποδείξτε την πρώτη από τις εξισώσεις Gauss. (Υποδ. Χρησιμοποιείστε την δεύτερη από τις εξισώσεις (2.6))

Άσκηση 2. Αποδείξτε ότι αν $F = 0$ τότε η καμπυλότητα Gauss δίνεται από τη σχέση

$$K = -\frac{1}{2\sqrt{EG}}\left(\left(\frac{E_v}{\sqrt{EG}}\right)_v + \left(\frac{G_u}{\sqrt{EG}}\right)_u\right)$$

Ως αποτέλεσμα των εξισώσεων Gauss έχουμε μια άλλη απόδειξη του Θαυμαστού Θεωρήματας (Therema Egregium) του Gauss.

[2]Καμμιά φορά αναφέρονται και ως εξισώσεις των Codazzi - Mainardi

Θεώρημα 2.1. *(Θαυμαστό Θεώρημα του Gauss) Η καμπυλότητα Gauss καθορίζεται πλήρως από την πρώτη θεμελιώδη μορφή, δηλαδή από τα θεμελιώδη ποσά πρώτης τάξης και τις μερικές παραγώγους αυτών.*

Απόδειξη. Από οποιαδήποτε από τις εξισώσεις του Gauss προκύπτει ότι η καμπυλότητα K εκφράζεται μόνο συναρτήσει των E, F, G και των συμβόλων του Christoffel και των παραγώγων τους, συνεπώς εκφράζεται μόνο συναρτήσει των E, F, G και των παραγώγων τους. $\square$

Πόρισμα 2.1. *Αν δύο επιφάνειες είναι τοπικά ισομετρικές τότε οι αντίστοιχες καμπυλότητες Gauss είναι ίσες.*

Οι εξισώσεις Codazzi μαζί με οποιαδήποτε από τις εξισώσεις Gauss ονομάζονται *εξισώσεις συμβατότητας* της θεωρίας επιφανειών.

Ένα ερώτημα είναι κατά πόσον υπάρχουν και άλλες εξισώσεις συμβατότητας μεταξύ των θεμελιώδων ποσών πρώτης και δεύτερης τάξης για μια επιφάνεια εκτός από τις παραπάνω. Η απάντηση είναι όχι. Με άλλα λόγια, διαδοχικές παραγωγίσεις ή άλλες πράξεις δεν είναι δυνατόν να δώσουν επιπλέον σχέσεις μεταξύ των συναρτήσεων E, F, G, e, f, g και των παραγώγων τους.

Το παρακάτω θεώρημα δίνει ακριβώς την απάντηση.

Θεώρημα 2.2. *(Bonnet) Έστω $E, F, G, e, f, g : V \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ διαφορίσιμες συναρτήσεις στο ανοικτό σύνολο V με $E > 0$ και $G > 0$. Υποθέτουμε ότι οι συναρτήσεις αυτές ικανοποιούν τις εξισώσεις Codazzi και Gauss (μία από αυτές) και ότι $EG - F^2 > 0$. Τότε για κάθε $q \in V$ υπάρχει ανοικτό $U \subset V$ με $q \in U$ και αμφιδιαφόριση $X : U \to X(U) \subset \mathbb{R}^3$ τέτοια ώστε η κανονική επιφάνεια $X(U) \subset \mathbb{R}^3$ να έχει τις συναρτήσεις E, F, G, e, f και g ως τα θεμελιώδη ποσά πρώτης και δεύτερης τάξης. Στην περίπτωση που το U είναι συνεκτικό, η αμφιδιαφόριση X είναι μοναδική μη λαμβάνοντας υπόψη στερεές κινήσεις του $\mathbb{R}^3$.*

Η απόδειξη δεν είναι ιδιαίτερα απλή. Χρειαζόμαστε αποτελάσματα θεωρίας με μερικές παραγώγους (βλ. Do Carmo σελ. 311-314, Abate-Toneva σελ. 242-246)

Οι εξισώσεις Coodazzi και Gauss είναι ιδαίτερα δύσκολες στην χρήση τους στη γενική τους μορφή, αλλά κάποιες ειδικές περιπτώσεις έχουν ενδιαφέρουσες εφαρμογές και ταυτόχρονα αναδεικνύουν την αξία τους. Παρακάτω θα παρουσιάσουμε κάποιες σημαντικές εφαρμογές. Χρειαζόμαστε πρώτα κάποιους ορισμούς.

Ορισμός 2.1. *Έστω $M \subset \mathbb{R}^3$ μια προσανατολισμένη επιφάνεια με απεικόνιση Gauss $N : M \to \mathbb{S}^2$. Μια γραμμή καμπυλότητας (line of curvature) στην M είναι μια καμπύλη $\gamma : I \to M$ τέτοια ώστε το διάνυσμα $\gamma'(t)$ να είναι πάντα μια κύρια διεύθυνση.*

Ορισμός 2.2. *Έστω $X : U \subset \mathbb{R}^2 \to M$ μια τοπική παραμέτρηση μιας επιφάνειας M και (u, v) οι συντεταγμένες στο U. Μια u-καμπύλη (αντίστοιχα v-καμπύλη) στην M είναι μια καμπύλη της μορφής $u \mapsto X(u, v_0)$ (αντίστοιχα $v \mapsto X(u_0, v)$).*

Αν τώρα οι μεταβλητές u, v παίρνουν όλες τις τιμές στο U τότε ορίζεται ένα πλάγμα επιφανειακών καμπύλων στην M που την καλύπτουν. Το πλέγμα αυτό ονομάζεται *γραμμές συντεταγμένων (coordinate lines)* της M. Το ερώτημα είναι πότε οι γραμμές συντεταγμένων είναι γραμμές καμπυλότητας. Ισχύει το εξής:

Πρόταση 2.1. *Έστω $X : U \to M \subset \mathbb{R}^3$ μια τοπική παραμέτρηση μιας κανονικής επιφάνειας M και υποθέτουμε ότι το σύνολο $X(U)$ δεν περιέχει ομφαλικά σημεία (δηλ. με ίσες κύριες καμπυλότητες). Τότε κάθε γραμμή συντεταγμένων είναι γραμμή καμπυλότητας εάν και μόνο εάν ισχύει $F \equiv f \equiv 0$.*

Απόδειξη. Το γεγονός ότι οι γραμμές συντεταγμένων είναι γραμμές καμπυλότητας ισοδυναμεί με το ότι οι διευθύνσεις των συντεταγμένων είναι πάντα κύριες διευθύνσεις. Αυτό με τη σειρά του ισοδυναμεί με το ότι ο πίνακας A του τελεστή σχήματος ως προς τη βάση $\{X_u, X_v\}$ είναι πάντα διαγώνιος. Λαμβάνοντας τώρα υπόψη την έκφραση $(*)$ προκύπτει ότι αν $F \equiv f \equiv 0$ τότε ο πίνακας A είναι διαγώνιος άρα οι γραμμές συντεταγμένων είναι γραμμές καμπυλότητας. Αντίστροφα, υποθέτουμε ότι οι γραμμές συντεταγμένων είναι γραμμές καμπυλότητας. Αυτό σημαίνει ότι τα διανύσματα X_u, X_v είναι κύριες διευθύνσεις. Επειδή δεν υπάρχουν ομφαλικά σημεία, τα διανύσματα X_u, X_v είναι κάθετα, άρα $F = \langle X_u, X_v \rangle = 0$. Συνεπώς τα εκτός διαγωνίου στοιχεία του πίνακα A στην έκφραση $(*)$ είναι $\frac{f}{G}$ και $\frac{f}{E}$ και επειδή αυτά πρέπει να είναι μηδέν παίρνουμε ότι $f \equiv 0$. Σημειώστε ότι στα ομφαλικά σημεία όλες οι διευθύνσεις είναι κύριες διεθύνσεις, άρα σε αυτά οι γραμμές συντεταγμένων είναι πάντα γραμμές καμπυλότητας. □

Λήμμα 2.1. *Υποθέτουμε ότι X είναι μια παραμέτρηση για την οποία οι γραμμές συντεταγμένων (δηλαδή οι u-καμπύλες και οι v-καμπύλες) είναι γραμμές καμπυλότητας με αντίστοιχες κύριες καμπυλότητες k_1 και k_2. Τότε ισχύουν οι σχέσεις*

$$(k_1)_v = \frac{E_v}{2E}(k_2 - k_1) \text{ και } (k_2)_u = \frac{G_u}{2G}(k_1 - k_2) \qquad (**)$$

Απόδειξη. Λόγω της Πρότασης 2.1 είναι $F \equiv 0 \equiv f$. Τότε οι εξισώσεις Codazzi απλουστεύονται ως

$$e_v = e\Gamma_{12}^1 - g\Gamma_{11}^2, \qquad g_u = g\Gamma_{12}^2 - e\Gamma_{22}^1.$$

Λόγω του ότι $F = 0$ οι σχέσεις (2.4) δίνουν ότι

$$\Gamma_{11}^2 = -\tfrac{1}{2}\tfrac{E_v}{G}, \quad \Gamma_{12}^1 = \tfrac{1}{2}\tfrac{E_v}{G}$$

$$\Gamma_{22}^1 = -\tfrac{1}{2}\tfrac{G_u}{E}, \quad \Gamma_{12}^2 = \tfrac{1}{2}\tfrac{G_u}{G}.$$

Συνεπώς, οι εξισώσεις Codazzi παίρνουν την μορφή

$$e_v = \frac{E_v}{2}\left(\frac{e}{E} + \frac{g}{G}\right), \qquad g_u = \frac{G_u}{2}\left(\frac{e}{E} + \frac{g}{G}\right) \tag{2}$$

Λαμβάνοντας υπόψη τη μορφή του πίνακα του τελεστή σχήματος $(*)$ και ότι $F = 0 = f$, προκύπτει ότι

$$k_1 = \frac{e}{E} \;\text{ και }\; k_2 = \frac{g}{G}.$$

Παραγωγίζοντας τις παραπάνω σχέσεις ως προς v και u αντίστοιχα και λαμβάνοντας υπόψη τις σχέσεις (2) προκύπτουν οι ζητούμενες σχέσεις. □

Ερχόμαστε τώρα στην πρώτη ενδιαφέρουσα εφαρμογή των εξισώσεων Codazzi όπου $K \equiv 0$.

Πρόταση 2.2. *Έστω M μια επίπεδη επιφάνεια (δηλαδή $K \equiv 0$) χωρίς επίπεδα σημεία (δηλαδή σημεία p όπου $k_1(p) = k_2(p) = 0$). Τότε η M είναι ένας γενικευμένος κύλινδρος του οποίου το εφαπτόμενο επίπεδο παραμένει σταθερό κατά μήκος των γεννητόρων.*

Απόδειξη. Επειδή η M είναι επίπεδη και δεν περιέχει επίπεδα σημεία μπορούμε να υποθέσουμε ότι $k_1 = 0$ και $k_2 \neq 0$ παντού. Συνεπώς, υπάρχει μια τοπική παραμέτρηση X της M για την οποία οι γραμμές συντεταγμένων να είναι γραμμές καμπυλότητας (οι u-καμπύλες να αντιστοιχούν στην k_1 και οι v-καμπύλες στην k_2). (Αυτό δεν είναι εντελώς προφανές, ανάγεται σε θέμα διαφορικών εξισώσεων βλ. Shifrin σελ. 119-120). Αυτό σημαίνει ότι μπορούμε να επιλέξουμε την παραμέτρηση X ώστε $F = f = 0$. Επειδή $k_1 = 0$ για κάθε $p \in M$ θα είναι $S_p(X_u) = 0$, άρα $N_u = 0$ παντού, συνεπώς το διάνυσμα N θα είναι σταθερό κατά μήκος των u-καμπυλών. Επίσης, παρατηρούμε ότι $e = \langle -S_p(X_u), X_u \rangle = 0$. Θέλουμε τώρα να δείξουμε ότι οι u-καμπύλες είναι ουσιαστικά ευθείες. Επειδή $k_1 = 0$ παντού θα είναι και $(k_1)_v = 0$ και δεδομένου ότι $k_2 \neq k_1$ λόγω του Λήμματος 2.1 προκύπτει ότι $E_v = 0$. Τότε η πρώτη εξίσωση απο τις (2.4) δίνει ότι $\Gamma^2_{11} = 0$, συνεπώς

$$X_{uu} = \Gamma^1_{11} X_u + \Gamma^2_{11} X_v + eN = \Gamma^1_{11} X_u,$$

δηλαδή είναι παράλληλο του διανύσματος X_u. Αυτό σημαίνει ότι το εφαπτόμενο διάνυσμα X_u δεν αλλάζει διεύθυνση κατά μήκος των u-καμπύλων, άρα οι u-καμπύλες είναι ευθείες. Συνεπώς, η επιφάνεια είναι ένας γενικευμένος κύλινδρος του οποίου το εφαπτόμενο επίπεδο παραμένει σταθερό κατά μήκος των γεννητόρων. □

Οι επίπεδοι γενικευμένοι κύλινδροι συχνά ονομάζονται και αναπτυκτές επιφάνειες (developable surfaces). Στη συνέχεια, θα αποδείξουμε ένα ολικό αποτέλεσμα για συμπαγείς επιφάνειες. Στο μάθημα *Διαφορική Γεωμετρία* είχαμε δεί το θεώρημα ότι κάθε συμπαγής επιφάνεια περιέχει ένα τουλάχιστον σημείο με θετική καμπυλότητα Gauss. Θα αποδείξουμε τώρα το εξής:

Θεώρημα 2.3. *(Liebmann) Έστω M μια συμπαγής κανονική επιφάνεια με σταθερή καμπυλότητα Gauss K. Τότε $K > 0$ και η M θα είναι μια σφαίρα ακτίνας $1/\sqrt{K}$.*

Χρειαζόμαστε πρώτα το εξής:

Λήμμα 2.2. *(Hilbert) Έστω p ένα σημείο μιας επιφάνειας το οποίο δεν είναι ομφαλικό και ότι $k_1(p) > k_2(p)$. Υποθέτουμε ότι η k_1 έχει τοπικό μέγιστο στο p και η k_2 τοπικό ελάχιστο στο p. Τότε $K(p) \leq 0$.*

Απόδειξη. Επειδή $k_1(p) \neq k_2(p)$ υπάρχει τοπική παραμέτρηση στο p ώστε οι u-καμπύλες να είναι γραμμές καμπυλότητας με κύρια καμπυλότητα k_1 και οι v-καμπύλες να είναι γραμμές καμπυλότητας με κύρια καμπυλότητα k_2. Επειδή $k_1 \neq k_2$ και $(k_1)_v = (k_2)_u = 0$ στο, από το Λήμμα 2.1 προκύπτει ότι $E_v = G_u = 0$ στο p. Παραγωγίζοντας τις σχέσεις (∗∗) και λαμβάνοντας υπόψη ότι $(k_1)_u = (k_2)_v = 0$ στο p, έχουμε ότι στο σημείο p ισχύουν οι σχέσεις

$$
\begin{aligned}
(k_1)_{uv} &= \frac{E_{vv}}{2E}(k_2 - k_1) \leq 0 \quad (\text{επειδή } k_1(p) \text{ τοπικό μέγιστο}) \\
(k_2)_{uu} &= \frac{G_{uu}}{2E}(k_1 - k_2) \geq 0 \quad (\text{επειδή } k_2(p) \text{ τοπικό ελάχιστο}),
\end{aligned}
$$

συνεπώς $E_{vv} \geq 0$ και $G_{uu} \geq 0$ στο p. Χρησιμοποιώντας τον τύπο για την καμπυλότητα Gauss από την Άσκηση 2 προκύπτει ότι

$$
-2KEG = E_{vv} + G_{uu} + \alpha(u,v)E_v + \beta(u,v)G_u
$$

για κάποιες συναρτήσεις $\alpha(u,v), \beta(u,v)$, συνεπώς $K(p) \leq 0$. □

Απόδειξη. (του Θεωρήματος 2.3). Επειδή η M είναι συμπαγής υπάρχει ένα σημείο με θετική καμπυλότητα Gauss και επειδή από υπόθεση αυτή είναι σταθερή στην M, τότε θα είναι $K > 0$, άρα δείχτηκε το πρώτο μέρος του θεωρήματος. Εάν όλα τα σημεία της M είναι ομφαλικά, τότε η M είναι μια σφαίρα (αυτό έχει αποδειχθεί στο μάθημα Διαφορική Γεωμετρία). Εάν υπάρχει τουλάχιστον ένα μη ομφαλικό σημείο τότε επειδή η M είναι συμπαγής η μεγαλύτερη κύρια καμπυλότητα k_1 λαμβάνει μέγιστη τιμή σε κάποιο $p \in M$. Επειδή η $K = k_1 k_2$ είναι σταθερή, η συνάρτηση $k_2 = K/k_1$ πρέπει να λαμβάνει ελάχιστη τιμή στο σημείο p. Δεδομένου ότι το σημείο p δεν μπορεί να είναι ομφαλικό (γιατί;) τότε λόγω του Λήμματος 2.2 θα είναι $K(p) \leq 0$ άτοπο. □

Άσκηση 3. Αποδείξτε ότι αν M είναι μια συμπαγής και συνεκτική (προσανατολισμένη) επιφάνεια με $K > 0$ και H σταθερή, τότε η M είναι μια σφαίρα ακτίνας $1/\sqrt{K}$. *Υπόδειξη.* Θεωρήστε τη συνάρτηση $H^2 - K = (k_1 - k_2)^2/4$ και έστω $p \in M$ ένα σημείο μεγίστου. Εξετάστε τις περιπτώσεις $H^2 - K(p) = 0$ και $H^2 - K(p) > 0$ και χρησιμοποιείστε το Θεώρημα Liebmann και το Λήμμα του Hilbert αντίστοιχα.

2.1 Βιβλιογραφία

M. Abate - F. Torena: *Curves and Surfaces*, Springer 2012.

C. Bär: *Elementary Differential Geometry*, Cambridge Univ. Press 2010.

M. P. do Carmo: *Differential Geometry of Curves and Surface*, Prentice-Hall 1976.

J. Oprea: *Differential Geometry and Its Applications*, The Mathematical Assocation of America, 2007.

Β. Ι. Παπαντωνίου: *Διαφορική Γεωμετρία*, Εκδ. Πανεπιστ. Πατρών, Πάτρα, 2013.

A. Pressley: *Elementary Differential Geometry*, Second Edition, Springer 2010. Μετάφραση: *Στοιχειώδης Διαφορική Γεωμετρία*, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, Κρήτη 2012.