Τίτλος Μαθήματος: Διαφορική Γεωμετρία ΙΙ

Ενότητα: Επαναληπτικά θέματα

Όνομα Καθηγητή: Ανδρέας Αρβανιτογεώργος

Τμήμα: Μαθηματικών

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Πατρών**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Κεφάλαιο 1

Επαναληπτικά θέματα

Το μάθημα Διαφορική Γεωμετρία ΙΙ απαιτεί καλή γνώση του μαθήματος Διαφορική Γεωμετρία, οπότε κάνουμε μια σύντομη επανάληψη των βασικών εννοιών και συμβολισμών του μαθήματος Διαφορική Γεωμετρία προκειμένου να διευκολυνθεί ο αναγνώστης στην παρακολούθηση του παρόντος μαθήματος.

Ορισμός 1.1. *Ένα μη κενό υποσύνολο M του $\mathbb{R}^3$ ονομάζεται μια κανονική επιφάνεια εάν για κάθε $p \in M$ υπάρχουν ανοικτές περιοχές $V \subset \mathbb{R}^3$, $U \subset \mathbb{R}^2$ και μια 1-1 απεικόνιση κλάσης C^∞ $X : U \subset \mathbb{R}^2 \to V \cup M \subset \mathbb{R}^3$ η οποία να είναι ομοιομορφισμός τέτοια ώστε $X_u(q) \times X_v(q) \neq 0$ για κάθε $q \in U$.*

Η απεικόνιση X ονομάζεται τοπική παραμέτρηση της M και η αντίστροφη X^{-1} τοπικός χάρτης της M στο σημείο $X(q) = p$.

Ορισμός 1.2. 1) *Μια απεικόνιση $\varphi : M_1 \to M_2$ μεταξύ δύο επιφανειών ονομάζεται λεία εάν για κάθε δύο τοπικές παραμετρήσεις (U_1, X_1) της M_1 και (U_2, X_2) της M_2 η απεικόνιση*

$$X_2^{-1} \circ \varphi \circ X_1 : U \to \mathbb{R}^2$$

όπου $U = X_1^{-1}\big(X_1(U_1) \cap \varphi^{-1}(X_2(U_2))\big)$ είναι διαφορίσιμη απεικόνιση υπό την κλασική έννοια.
2) *Μια αμφιδιαφόριση $\varphi : M_1 \to M_2$ είναι μια 1-1 και επί λεία απεικόνιση με φ^{-1} λεία.*

Ο εφαπτόμενος χώρος στο σημείο $p \in M$ μιας κανονικής επιφάνειας M ορίζεται ως

$$T_pM = \{Z \in \mathbb{R}^3 : \text{υπάρχει } \gamma : I \to M \text{ με } \gamma(0) = p, \gamma'(0) = Z\}.$$

Αποδεικνύεται ότι αν $X : U \subset \mathbb{R}^2 \to M$ είναι μια τοπική παραμέτρηση της M με $X(u_0, v_0) = p$, τότε

$$T_pM = \mathrm{span}\{X_u(u_0, v_0), X_v(u_0, v_0)\} = \mathrm{Im}DX(\vec{0}).$$

Ορισμός 1.3. *Έστω M_1, M_2 κανονικές επιφάνειες $p \in M_1$, $\varphi : M_1 \to M_2$ λεία. Το διαφορικό της φ στο p $d\varphi_p : T_pM_1 \to T_{\varphi(p)}M_2$ ορίζεται ως εξής:*
Έστω $Z \in T_pM_1$, $\gamma : I \to M_1$ με $\gamma(0) = p$, $\gamma'(0) = Z$. Τότε

$$d\varphi_p(Z) = \frac{d}{dt}\big(\varphi \circ \gamma(t)\big)\big|_{t=0} \in T_{\varphi(p)}M_2.$$

Ορισμός 1.4. *Μια αμφιδιαφόριση $\varphi : M_1 \to M_2$ ονομάζεται <u>ισομετρία</u> εάν για κάθε $p \in M_1$ ισχύει*

$$\langle d\varphi_p(Z), d\varphi_p(W)\rangle_{\varphi(p)} = \langle Z, W\rangle_p \ \text{ για κάθε } Z, W \in T_pM_1,$$

όπου $\langle \cdot, \cdot \rangle$ είναι το κανονικό εσωτερικό γινόμενο του $\mathbb{R}^3$.

Έστω M μια κανονική επιφάνεια και $X : U \subset \mathbb{R}^2 \to X(U) \subset M$ μια τοπική παραμέτρηση της M. Τα <u>θεμελιώδη ποσά πρώτης τάξης</u> για την παραμέτρηση (U, X) ορίζονται ως

$$E = \langle X_u, X_u \rangle\,,\ F = \langle X_u, X_v \rangle\,,\ G = \langle X_v, X_v \rangle\,,$$

ή εναλλακτικά

$$\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} = [dX][dX]^t,$$

όπου $[dX]$ ο 2×3 ανάστροφος του πίνακα του διαφορικού $dX_{(u,v)} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$.

Ορισμός 1.5. 1) *Έστω M μια κανονική επιφάνεια. Μια λεία απεικόνιση $N : M \to \mathbb{S}^2$ τέτοια ώστε $N(p) \perp T_pM$ για κάθε $p \in M$ ονομάζεται <u>απεικόνιση Gauss</u>.*
2) *Η επιφάνεια M ονομάζεται <u>προσανατολίσιμη</u> αν υπάρχει μια απεικόνιση Gauss και <u>προσανατολισμένη</u> εάν είναι εφοδιασμένη με μια απεικόνιση Gauss.*

Αν $X : U \to M$ είναι μια τοπική παραμέτρηση της M τότε μια (τοπική) απεικόνιση Gauss είναι η

$$N(q) = N(X(u,v)) = \frac{X_u(u,v) \times X_v(u,v)}{\|X_u(u,v) \times X_v(u,v)\|},\ (q = X(u,v) \in M).$$

Ορισμός 1.6. *Ο <u>τελεστής σχήματος</u> (ή απεικόνιση Weingarten) μιας κανονικής προσανατολισμένης επιφάνειας M στο σημείο $p \in M$ ορίζεται ως*

$$S_p : T_pM \to T_pM,\ S_p(Z) = -dN_p(Z).$$

Ο τελεστής S_p είναι αυτοσυζυγής, άρα υπάρχει ορθοκανονική βάση $\{Z_1, Z_2\}$ του T_pM από ιδιοδιανύσματα, έτσι ώστε $S_p(Z_1) = \lambda_1 Z_1$, $S_p(Z_2) = \lambda_2 Z_2$. Αν

$$A = [S_p] = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

είναι ο πίνακας του τελεστή σχήματος S_p στο σημείο $p \in M$, τότε εξ ορισμού $-[dN] = A[dX]$.

Ορισμός 1.7. *Τα στοιχεία του πίνακα*

$$\begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix} = -[dN][dX]^t = A \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}$$

ονομάζονται θεμελιώδη ποσά δεύτερης τάξης της επιφάνειας M ως προς την τοπική παραμέτρηση $X : U \to X(U) \subset M$.

Εναλλακτικά δίνονται ως (επειδή $N \perp \text{span}\{X_u, X_v\}$)

$$\begin{aligned} e &= -\langle N_u, X_u \rangle = \langle N, X_{uu} \rangle \\ f &= -\langle N_u, X_v \rangle = \langle N, X_{vu} \rangle \\ g &= -\langle N_v, X_v \rangle = \langle N, X_{vv} \rangle . \end{aligned}$$

Σημειώνουμε ότι αυτά είναι πραγματικές συναρτήσεις στο $U \subset \mathbb{R}^2$ συνεπώς, ο πίνακας του τελεστή σχήματος δίνεται ως

$$A = \begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{EG - F^2} \begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix} \begin{pmatrix} G & -F \\ -F & E \end{pmatrix}.$$

Ορισμός 1.8. 1) *Η καμπυλότητα Gauss της M είναι η συνάρτηση*

$$K : M \to \mathbb{R}, \quad K(p) = \det S_p.$$

2) *Η μέση καμπυλότητα της M είναι η συνάρτηση*

$$H : M \to \mathbb{R}, \quad H(p) = \frac{1}{2}\text{tr} S_p.$$

Ισχύουν οι τύποι

$$K = \frac{eg - f^2}{EG - F^2}, \qquad H = \frac{1}{2}\frac{eG - 2fF + gE}{EG - F^2}.$$

Μια επιφάνεια ονομάζεται επίπεδη εάν $K(p) = 0$ για κάθε $p \in M$ και ελάχιστης έκτασης εάν $H(p) = 0$ για κάθε $p \in M$.

Αν $\gamma : I \to M$ είναι μια καμπύλη στην M με παραμέτρηση κατά μήκος τόξου τέτοια ώστε $\gamma(0) = p \in M$, $\gamma'(0) = Z \in T_pM$ τότε η κάθετη καμπυλότητα της M στο p στη διεύθυνση του Z ορίζεται ως

$$k_p(Z) = \langle S_p(Z), Z \rangle .$$

Οι κύριες καμπυλότητες $k_1(p), k_2(p)$ της M στο σημείο p είναι το μέγιστο και ελάχιστο αντίστοιχα της συνάρτησης

$$\tilde{k_p} : T^1_pM \to \mathbb{R}, \quad Z \mapsto k_p(Z),$$

όπου $T_p^1 M$ ο μοναδιαίος κύκλος στον T_pM. Ένα διάνυσμα $Z \in T_p^1 M$ καθορίζει μια κύρια διεύθυνση της M στο p εάν και μόνο εάν το Z είναι ένα ιδιοδιάνυσμα του τελεστή σχήματος $S_p : T_pM \to T_pM$.

Το Θαυμαστό Θεώρημα του Gauss (Theorema Egregium) αναφέρει ότι η καμπυλότητα Gauss K μιας επιφάνειας M καθορίζεται πλήρως από τα θεμελιώδη ποσά πρώτης τάξης.

1.1 Βιβλιογραφία

M. Abate - F. Torena: *Curves and Surfaces*, Springer 2012.

C. Bär: *Elementary Differential Geometry*, Cambridge Univ. Press 2010.

M. P. do Carmo: *Differential Geometry of Curves and Surface*, Prentice-Hall 1976.

J. Oprea: *Differential Geometry and Its Applications*, The Mathematical Assocation of America, 2007.

Β. Ι. Παπαντωνίου: *Διαφορική Γεωμετρία*, Εκδ. Πανεπιστ. Πατρών, Πάτρα, 2013.

A. Pressley: *Elementary Differential Geometry*, Second Edition, Springer 2010. Μετάφραση: *Στοιχειώδης Διαφορική Γεωμετρία*, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, Κρήτη 2012.