



ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ  
ΠΑΤΡΩΝ  
UNIVERSITY OF PATRAS

ΑΝΟΙΚΤΑ ακαδημαϊκά  
μαθήματα ΠΠ

---

## Τίτλος Μαθήματος: Διαφορική Γεωμετρία II

Ενότητα: Εισαγωγή

Όνομα Καθηγητή: Ανδρέας Αρβανιτογεώργος

Τμήμα: Μαθηματικών

---

## Άδειες Χρήσης

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό υπόκειται σε άδειες χρήσης Creative Commons.
- Για εκπαιδευτικό υλικό, όπως εικόνες, που υπόκειται σε άλλου τύπου άδειας χρήσης, η άδεια χρήσης αναφέρεται ρητώς.



## Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Πατρών**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.



# Εισαγωγή

Το μάθημα αυτό αποτελεί συνέχεια του Ανοικτού Μαθήματος *Διαφορική Γεωμετρία* και εξετάζει κάποια ειδικότερα θέματα της θεωρίας επιφανειών. Ταυτόχρονα, θέτει τις βάσεις για παραπέρα μελέτη, όπως γεωμετρία Riemann και αλγεβρική τοπολογία.

Η περιγραφή των κεφαλαίων έχει ως εξής: Στο Κεφάλαιο 1 κάνουμε μια σύντομη επανάληψη συμβολισμών του μαθήματος *Διαφορική Γεωμετρία* και στο Κεφάλαιο 2 αποδεικνύουμε τις εξισώσεις συμβατότητας μιας κανονικής επιφάνειας, δηλαδή τις εξισώσεις Codazzi και Gauss. Το Θεώρημα Bonnet που διατυπώνουμε στη συνέχεια αναφέρει ότι οι εξισώσεις αυτές καθορίζουν πλήρως την επιφάνεια ως προς στερεές κινήσεις του  $\mathbb{R}^3$ . Δίνουμε επίσης κάποιες ενδιαφέρουσες εφαρμογές της ολικής διαφορικής γεωμετρίας, όπως το Θεώρημα Liembann.

Στο Κεφάλαιο 3 εισάγουμε την έννοια της συναλλοίωτης παραγώγου και της παράλληλης μεταφοράς σε μια επιφάνεια. Αποτελούν τις πιο λεπτές και ενδεχομένως δύσκολες έννοιες της γεωμετρίας, μια και γενικεύουν την έννοια της παραλληλίας που γνωρίζουμε από την Ευκλείδεια γεωμετρία. Η ύπαρξη της καμπυλότητας (κύρτωση) για μια επιφάνεια μας οδηγεί στο να αναθεωρήσουμε την άποψή μας περί παραλληλίας. Έτσι ορίζουμε φυσιολογικά την έννοια της γεωδαισιακής καμπύλης, δηλαδή μιας καμπύλης η οποία (τοπικά) ελαχιστοποιεί την απόσταση μεταξύ δύο σημείων μιας επιφάνειας.

Οι γεωδαισιακές καμπύλες παρουσιάζονται στο Κεφάλαιο 4, όπου δίνουμε και προσέγγισή τους μέσω του λογισμού των μεταβολών. Το Θεώρημα Clairaut αποτελεί ένα χρήσιμο εργαλείο για την εύρεση γεωδαισιακών σε μια επιφάνεια εκ περιστροφής. Συζητάμε επίσης την εκθετική απεικόνιση.

Το τελευταίο Κεφάλαιο 5 αναφέρεται στο πιο κεντρικό θεώρημα της θεωρίας επιφανειών, το Θεώρημα των Gauss-Bonnet και σε διάφορες εκδοχές του. Δίνουμε δύο τοπικές και μία ολική εκδοχή. Η σημασία του θεωρήματος αυτού έγκειται στο ότι συνδέει τοπικές ποσότητες μιας επιφάνειας (όπως η καμπυλότητα Gauss και η γεωδαισιακή καμπυλότητα), με ολικές ποσότητες που σχετίζονται με την τοπολογία της επιφάνειας (όπως η χαρακτηριστική του Euler). Παρουσιάζουμε διάφορες εφαρμογές τοπολογικού χαρακτήρα του θεωρήματος. Το θεώρημα Gauss-Bonnet έχει αποτε-

λέσει τον σπόρο για την ανάπτυξη σημαντικών μαθηματικών θεωριών στις περιοχές της γεωμετρίας και της τοπολογίας κατά τον εικοστό αιώνα.

Την τεχνική επιμέλεια του Ανοιχτού Μαθήματος είχε η υποψήφια διδάκτωρ Μαρίνα Σταθά, την οποία και ευχαριστώ θερμά.

Πάτρα, Μάρτιος 2014

*Ανδρέας Αρβαντογεώργος*