Δημήτρης Γεωργίου
Καθηγητής

ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ ΙΙ
(Συμπληρωματικές Σημειώσεις)

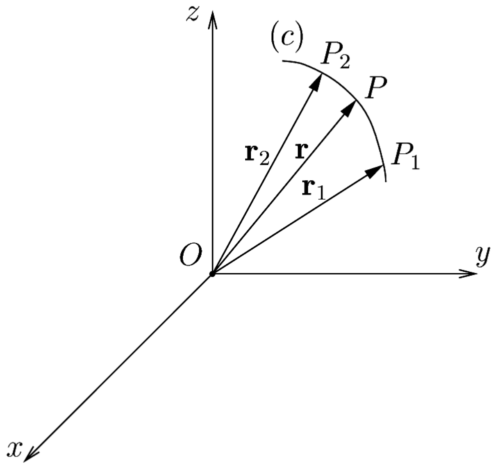
ΠΑΤΡΑ 2020

Περιεχόμενα

1. Διανυσματικές Συναρτήσεις

1. Εισαγωγικές έννοιες

Ας θεωρήσουμε μία καμπύλη γραμμή (c) στο χώρο (Σχήμα 1.41). Έστω P τυχαίο σημείο της καμπύλης, η θέση του οποίου ορίζεται ως προς το κέντρο O από το διάνυσμα θέσης $\mathbf{r}$. Η ιδιότητα που έχει το σημείο P να βρίσκεται στην καμπύλη (c) το ξεχωρίζει από τα υπόλοιπα σημεία του χώρου που δεν έχουν αυτήν την ιδιότητα. Η αλλαγή θέσης του σημείου P πάνω στην καμπύλη και μάλιστα κατά συνεχή τρόπο συνδέεται με τη μεταβολή κάποιας ποσότητας δηλαδή μιάς πραγματικής παραμέτρου, έστω t. Αν, για παράδειγμα, το σημείο P είναι ένα κινητό που η θέση του μεταβάλλεται με το χρόνο κατά μήκος του δρόμου (c), τότε είναι φανερό, πως η παράμετρος t αντιστοιχεί στο χρόνο. Έτσι, η θέση P_1 του P αντιστοιχεί στην τιμή της παραμέτρου t_1 και η θέση P_2 στην τιμή t_2. Επομένως, και το διάνυσμα θέσης $\mathbf{r}$ του P θα **εξαρτάται** από την τιμή αυτής της παραμέτρου, δηλαδή θα είναι μία συνάρτηση, της παραμέτρου t, $\mathbf{r}(t)$. Στη θέση P_1 το σημείο ορίζεται από το διάνυσμα $\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}(t_1)$ και στη θέση P_2 ορίζεται από το διάνυσμα $\mathbf{r}_2 = \mathbf{r}(t_2)$.



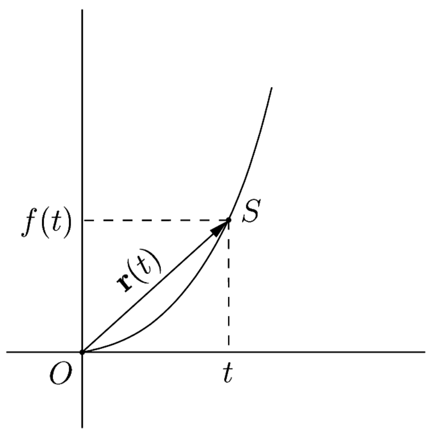
Σχήμα 1.41

Αν υποθέσουμε ότι το σημείο P παίρνει θέσεις πάνω στην καμπύλη κατά συνεχή τρόπο από το P_1 έως το P_2 είναι φανερό ότι το διάνυσμα θέσης του σημείου θα μεταβάλλεται καθώς η παράμετρος t θα παίρνει τιμές στο διάστημα $I = [t_1, t_2]$.

Παράδειγμα. Έστω ότι ένα σωματίδιο S κινείται σε σχέση με το χρόνο t πάνω σ' ένα επίπεδο κατά μήκος της καμπύλης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $y = f(x) = x^2$, $x \in [0, +\infty)$. (Σχήμα 1.42). Τότε οι συντεταγμένες της θέσης του σωματιδίου σε κάθε χρονική στιγμή $t \in [0, \infty)$ πάνω στο επίπεδο είναι $(t, f(t) = t^2)$, δηλαδή η θέση του σωματιδίου σε κάθε χρονική στιγμή t καθορίζεται από το ακτινικό διάνυσμα:

$$\mathbf{r}(t) = (t, t^2),\ \ t \in [0, \infty),$$

όπου $\mathbf{OS}(t) = \mathbf{r}(t)$.



Σχήμα 1.42

Η συνάρτηση $\mathbf{r}(t) = (t, t^2),\ \ t \in [0, \infty)$ είναι μία **διανυσματική συνάρτηση μιας πραγματικής μεταβλητής**.

Γενικότερα, αν σε κάθε πραγματική τιμή $t \in I$, όπου I ένα διάστημα του $\mathbb{R}$, αντιστοιχεί ένα διάνυσμα $\mathbf{u}(t)$ του επιπέδου ή του χώρου, τότε η $\mathbf{u}(t)$, $t \in I$ καλείται **διανυσματική συνάρτηση** μιάς πραγματικής μεταβλητής.

Έστω

$$\mathbf{u}(t) = u_1(t)\mathbf{e_1} + u_2(t)\mathbf{e_2} + u_3(t)\mathbf{e_3},\ \ \ t \in I.$$

Τότε οι συναρτήσεις $u_1(t)$, $u_2(t)$ και $u_3(t)$ καλούνται **συνιστώσες** της διανυσματικής συνάρτησης $\mathbf{u}(t)$, $t \in I$.

Παραδείγματα.

(1) Η διανυσματική συνάρτηση

$$\mathbf{u}(t) = a \text{ συν}(\omega t)\mathbf{e_1} + a \text{ ημ}(\omega t)\mathbf{e_2} + bt\mathbf{e_3},$$

όπου a, b και ω είναι θετικές σταθερές, αναπαριστά μία κυκλική έλικα.

(2) Η διανυσματική συνάρτηση

$$\mathbf{u}(t) = t\mathbf{e_1} + t^2\mathbf{e_2} + 0\mathbf{e_3}, \ t \in (0, 1)$$

όπου $a > 0$, αναπαριστά τμήμα παραβολής στο επίπεδο Oxy.

(3) Η διανυσματική συνάρτηση

$$\mathbf{u}(t) = a \text{ συν} t\mathbf{e_1} + a \text{ ημ} t\mathbf{e_2} + 0\mathbf{e_3},$$

όπου $a > 0$, αναπαριστά κύκλο κέντρου O$(0, 0)$ και ακτίνος a στο επίπεδο Oxy.

Ο ορισμός της διανυσματικής συνάρτησης $\mathbf{u}(t)$, $t \in I$ μας επιτρέπει να μεταφέρουμε εύκολα τις έννοιες του ορίου, της συνέχειας, της παραγώγου και του ολοκληρώματος.

2. Όριο διανυσματικής συνάρτησης

Έστω η διανυσματική συνάρτηση

$$\mathbf{u}(t) = (u_1(t), u_2(t), u_3(t)), \quad t \in I$$

και το διάνυσμα $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$. Θα λέμε ότι το διάνυσμα $\mathbf{v}$ είναι το **όριο** της διανυσματικής συνάρτησης $\mathbf{u}(t)$, όταν το t τείνει στο t_0 και θα γράφουμε

$$\lim_{t \to t_0} \mathbf{u}(t) = \mathbf{v}$$

αν και μόνο αν

$$\lim_{t\to t_0} u_1(t) = v_1, \quad \lim_{t\to t_0} u_2(t) = v_2, \text{ και } \lim_{t\to t_0} u_3(t) = v_3.$$

Έστω $\mathbf{u}(t)$, $\mathbf{v}(t)$, $t \in I$ δύο διανυσματικές συναρτήσεις, που ορίζονται στο ίδιο διάστημα I και έστω $\lim_{t\to t_0} \mathbf{u}(t) = \mathbf{w}$ και $\lim_{t\to t_0} \mathbf{v}(t) = \mathbf{r}$. Τότε, ισχύουν τα εξής:

(1) $\lim_{t\to t_0} (\mathbf{u}(t) \pm \mathbf{v}(t)) = \mathbf{w} \pm \mathbf{r}$.
(2) $\lim_{t\to t_0} (\mathbf{u}(t) \cdot \mathbf{v}(t)) = \mathbf{w} \cdot \mathbf{r}$.
(3) $\lim_{t\to t_0} (\mathbf{u}(t) \times \mathbf{v}(t)) = \mathbf{w} \times \mathbf{r}$.
(4) Αν $\lim_{t\to t_0} f(t) = \lambda \in I\!R$, τότε $\lim_{t\to t_0} (f(t)\mathbf{u}(t)) = \lambda \mathbf{w}$.

3. Συνέχεια διανυσματικής συνάρτησης

Έστω $\mathbf{u}(t)$, $t \in I$ διανυσματική συνάρτηση και έστω $t_0 \in I$. Θα λέμε ότι η $\mathbf{u}(t)$ είναι **συνεχής** στο $t_0 \in I$ αν και μόνο αν $\lim_{t\to t_0} \mathbf{u}(t) = \mathbf{u}(t_0)$.

Η διανυσματική συνάρτηση $\mathbf{u}(t)$, $t \in I$ καλείται **συνεχής** στο I, αν είναι συνεχής σε κάθε σημείο $t \in I$.

Έστω ότι οι συναρτήσεις $\mathbf{u}(t)$, $\mathbf{v}(t)$, $f(t)$, $t \in I$ είναι συνεχείς στο σημείο $t_0 \in I$. Τότε και οι συναρτήσεις

α) $\mathbf{u}(t) \pm \mathbf{v}(t)$, $t \in I$
β) $\mathbf{u}(t) \cdot \mathbf{v}(t)$, $t \in I$
γ) $\mathbf{u}(t) \times \mathbf{v}(t)$, $t \in I$
δ) $f(t)\mathbf{u}(t)$, $t \in I$

είναι συνεχείς στο σημείο $t_0 \in I$.

Παράδειγμα. Να αποδειχθεί ότι αν για κάθε $t \in (a, b)$ το διάνυσμα $\mathbf{u}(t)$ είναι κάθετο στο διάνυσμα $\mathbf{v}$ και $\lim_{t\to t_0} \mathbf{u}(t) = \mathbf{u}$, όπου $t_0 \in (a, b)$, τότε τα διανύσματα $\mathbf{u}$ και $\mathbf{v}$ είναι κάθετα.

Έχουμε:

$$\mathbf{u}(t) \cdot \mathbf{v} = 0, \quad \text{για κάθε } t \in (a, b).$$

Οπότε

$$\lim_{t\to t_0} (\mathbf{u}(t) \cdot \mathbf{v}) = \lim_{t\to t_0} 0 \quad \text{ή}$$

$$\lim_{t\to t_0} \mathbf{u}(t) \cdot \lim_{t\to t_0} \mathbf{v} = 0 \quad ή \quad \mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = 0.$$

Συνεπώς τα διανύσματα $\mathbf{u}$ και $\mathbf{v}$ είναι κάθετα μεταξύ τους.

4. Παράγωγος διανυσματικής συνάρτησης.

Έστω $\mathbf{u}(t)$, $t \in I$ διανυσματική συνάρτηση και έστω $t_0 \in I$. Το όριο

$$\lim_{t\to t_0} \frac{\mathbf{u}(t) - \mathbf{u}(t_0)}{t - t_0}.$$

(αν υπάρχει) καλείται **παράγωγος** της $\mathbf{u}(t)$ στο t_0 και συμβολίζεται με

$$\mathbf{u}'(t_0) \text{ ή } \frac{d\mathbf{u}(t_0)}{dt}.$$

Λέμε ότι η $\mathbf{u}(t)$ είναι **παραγωγίσιμη** στο t_0.

Η διανυσματική συνάρτηση $\mathbf{u}(t)$, $t \in I$ καλείται **παραγωγίσιμη** στο διάστημα I, αν αυτή είναι παραγωγίσιμη σε κάθε σημείο $t \in I$.

Έστω

$$\mathbf{u}(t) = u_1(t)\mathbf{e_1} + u_2(t)\mathbf{e_2} + u_3(t)\mathbf{e_3}$$

και έστω ότι υπάρχει η

$$\frac{d\mathbf{u}(t_0)}{dt}, \text{ όπου } \ t_0 \in I.$$

Τότε:

$$\frac{d\mathbf{u}(t_0)}{dt} = \frac{du_1(t_0)}{dt}\mathbf{e_1} + \frac{du_2(t_0)}{dt}\mathbf{e_2} + \frac{du_3(t_0)}{dt}\mathbf{e_3}$$

ή

$$\mathbf{u}'(t_0) = u_1'(t_0)\mathbf{e_1} + u_2'(t_0)\mathbf{e_2} + u_3'(t_0)\mathbf{e_3}.$$

Οι παράγωγοι δεύτερης, τρίτης και n-τάξης ορίζονται από τις παρακάτω σχέσεις:

$$\frac{d^2\mathbf{u}(t_0)}{dt^2} = \frac{d^2u_1(t_0)}{dt^2}\mathbf{e_1} + \frac{d^2u_2(t_0)}{dt^2}\mathbf{e_2} + \frac{d^2u_3(t_0)}{dt^2}\mathbf{e_3},$$

$$\frac{d^3\mathbf{u}(t_0)}{dt^3} = \frac{d^3u_1(t_0)}{dt^3}\mathbf{e_1} + \frac{d^3u_2(t_0)}{dt^3}\mathbf{e_2} + \frac{d^3u_3(t_0)}{dt^3}\mathbf{e_3},$$

$$\frac{d^n\mathbf{u}(t_0)}{dt^n} = \frac{d^nu_1(t_0)}{dt^n}\mathbf{e_1} + \frac{d^nu_2(t_0)}{dt^n}\mathbf{e_2} + \frac{d^nu_3(t_0)}{dt^n}\mathbf{e_3}.$$

Έστω ότι οι διανυσματικές συναρτήσεις $\mathbf{u}(t)$, $\mathbf{v}(t)$, $\mathbf{w}(t)$, $t \in I$ και η πραγματική συνάρτηση $f(t)$, $t \in I$ είναι παραγωγίσιμες στο $t_0 \in I$. Τότε έχουμε:

(1)

$$\frac{d(f(t_0)\mathbf{u}(t_0))}{dt} = \frac{df(t_0)}{dt}\mathbf{u}(t_0) + f(t_0)\frac{d\mathbf{u}(t_0)}{dt}.$$

(2)

$$\frac{d(\mathbf{u}(t_0) \pm \mathbf{v}(t_0))}{dt} = \frac{d\mathbf{u}(t_0)}{dt} \pm \frac{d\mathbf{v}(t_0)}{dt}.$$

(3)

$$\frac{d(\mathbf{u}(t_0) \cdot \mathbf{v}(t_0))}{dt} = \frac{d\mathbf{u}(t_0)}{dt} \cdot \mathbf{v}(t_0) + \mathbf{u}(t_0) \cdot \frac{d\mathbf{v}(t_0)}{dt}.$$

(4)

$$\frac{d(\mathbf{u}(t_0) \times \mathbf{v}(t_0))}{dt} = \frac{d\mathbf{u}(t_0)}{dt} \times \mathbf{v}(t_0) + \mathbf{u}(t_0) \times \frac{d\mathbf{v}(t_0)}{dt}.$$

Παραδείγματα.

(1) Δίνεται η διανυσματική συνάρτηση $\mathbf{u}(t) = (\text{συν}t, \text{ημ}t, t)$, $t \in \mathbb{R}$. Να βρεθεί το διάνυσμα $\mathbf{u}'(t) \times \mathbf{u}''(t)$, $t = \frac{\pi}{2}$.

Έχουμε:

$$\mathbf{u}'(t) = (-\text{ημ}t, \text{συν}t, 1)$$

και

$$\mathbf{u}''(t) = (-\text{συν}t, -\text{ημ}t, 0).$$

Οπότε

$$\mathbf{u}'(\frac{\pi}{2}) = (-1, 0, 1)$$

και

$$\mathbf{u}''(\frac{\pi}{2}) = (0, -1, 0).$$

Συνεπώς

$$\mathbf{u}'(\frac{\pi}{2}) \times \mathbf{u}''(\frac{\pi}{2}) = \begin{vmatrix} \mathbf{e_1} & \mathbf{e_2} & \mathbf{e_3} \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 1\mathbf{e_1} + 0\mathbf{e_2} + 1\mathbf{e_3}.$$

(2) Έστω $\mathbf{u}(t)$, $t \in (a, b)$ μία παραγωγίσιμη διανυσματική συνάρτηση. Να αποδειχθεί ότι αν $|\mathbf{u}(t)| = c$, όπου c σταθερά, τότε το διάνυσμα $\mathbf{u}'(t)$ είναι κάθετο στο διάνυσμα $\mathbf{u}(t)$.

Έχουμε:

$$\mathbf{u}(t) \cdot \mathbf{u}(t) = |\mathbf{u}(t)|^2 = c^2.$$

Οπότε

$$(\mathbf{u}(t) \cdot \mathbf{u}(t))' = 0 \quad \acute{\eta} \quad 2\mathbf{u}(t) \cdot \mathbf{u}'(t) = 0.$$

Συνεπώς τα διανύσματα $\mathbf{u}(t)$ και $\mathbf{u}'(t)$ είναι κάθετα.

5. Ολοκλήρωση διανυσματικής συνάρτησης

Ανάλογα μπορεί να γίνει η επέκταση της έννοιας του ολοκληρώματος. Ορίζουμε ως **αόριστο ολοκλήρωμα** της διανυσματικής συνάρτησης

$$\mathbf{u}(t) = u_1(t)\mathbf{e_1} + u_2(t)\mathbf{e_2} + u_3(t)\mathbf{e_3}, \quad t \in I$$

το διάνυσμα

$$\int \mathbf{u}(t)\ dt = [\int u_1(t)\ dt]\mathbf{e_1} + [\int u_2(t)\ dt]\mathbf{e_2} + [\int u_3(t)\ dt]\mathbf{e_3}.$$

Αν υπάρχει διανυσματική συνάρτηση $\mathbf{v}(t)$, $t \in I$ τέτοια ώστε:

$$\frac{d\mathbf{v}(t)}{dt} = \mathbf{u}(t),$$

τότε έχουμε:

$$\int \mathbf{u}(t)\ dt = \mathbf{v}(t) + \mathbf{c},$$

όπου $\mathbf{c}$ ένα αυθαίρετο σταθερό διάνυσμα.

Επίσης η έννοια του ορισμένου ολοκληρώματος ορίζεται από την παρακάτω σχέση

$$\int_{t_1}^{t_2} \mathbf{u}(t)\ dt = [\mathbf{v}(t)]_{t_1}^{t_2} = \mathbf{v}(t_2) - \mathbf{v}(t_1),$$

όπου $\mathbf{v}(t)$, $t \in I$ διανυσματική συνάρτηση τέτοια ώστε:

$$\frac{d\mathbf{v}(t)}{dt} = \mathbf{u}(t).$$

Παραδείγματα.

(1) Έστω $\mathbf{u}(t) = (t^2, t, 1)$, $t \in [0,1]$. Να βρεθεί το $\int_0^1 \mathbf{u}(t)\ dt$.
Έχουμε ότι

$$\int \mathbf{u}(t)\ dt = (\int t^2\ dt, \int t\ dt, \int 1\ dt) = (\frac{t^3}{3}, \frac{t^2}{2}, t) + \mathbf{c},$$

όπου $\mathbf{c}$ αυθαίρετο σταθερό ελεύθερο διάνυσμα. Επομένως

$$\int_0^1 \mathbf{u}(t)\ dt = (\int_0^1 t^2\ dt, \int_0^1 t\ dt, \int_0^1 1\ dt) = (\frac{1}{3}, \frac{1}{2}, 1).$$

(2) Έστω $\mathbf{u}(t) = (\eta\mu t, \sigma\upsilon\nu t, e^t)$, $t \in [0, \pi]$. Να βρεθεί το $\int_0^{\pi} \mathbf{u}(t)\ dt$.
Έχουμε ότι

$$\int \mathbf{u}(t)\ dt = (\int \eta\mu t\ dt, \int \sigma\upsilon\nu t\ dt, \int e^t\ dt) = (-\sigma\upsilon\nu t, \eta\mu t, e^t) + \mathbf{c},$$

όπου $\mathbf{c}$ αυθαίρετο σταθερό ελεύθερο διάνυσμα. Επομένως

$$\int_0^{\pi} \mathbf{u}(t)\ dt = (\int_0^{\pi} \eta\mu t\ dt, \int_0^{\pi} \sigma\upsilon\nu t\ dt, \int_0^{\pi} e^t\ dt) = (2, 0, e^{\pi} - 1).$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Να βρεθούν τα παρακάτω όρια:

α. $\lim_{t\to 0}(t^3-2t+1, \eta\mu t, \sigma\upsilon\nu(t^2-4t))$

β. $\lim_{t\to 1}(\frac{t^3-5t}{t^2+1}, \sigma\upsilon\nu(t^4-1), \eta\mu(t^2+2t-3t))$

γ. $\lim_{t\to 0}[(t^3-2t+1, \eta\mu t, \sigma\upsilon\nu(t^2-4t)) \times (t^4, \eta\mu(2t), \sigma\upsilon\nu(t^2-4t))]$.

2. Να βρεθεί η παράγωγος των διανυσματικών συναρτήσεων:

α. $\mathbf{u_1}(t) = (t^5-2t^3+t, \eta\mu(t^2-3t), \sigma\upsilon\nu(t^7-4t^6))$

β. $\mathbf{u_2}(t) = (\frac{t^3-5t}{t^2+1}, \sigma\upsilon\nu(t^4-1)\ \eta\mu(t^2+2t-3t))$

γ. $\mathbf{u_3}(t) = [(t^3-2t+1, \eta\mu t, \sigma\upsilon\nu(t^2-4t)) \times (t^4, \eta\mu(2t), \sigma\upsilon\nu(t^2-4t))]$

δ. $\mathbf{u_4}(t) = (\ln(t^4+t^2+1), e^{t^3-2t}, \sqrt{t^2+1}\ \sigma\upsilon\nu(t^3-2t))$

ε. $\mathbf{u_5}(t) = (e^{\eta\mu(t^2+1)}, 3^{t^3-2t}, (t^3+1)\ \sigma\upsilon\nu(t^2-3t))$.

3. Να βρεθούν τα παρακάτω ολοκληρώματα:

α. $\int \mathbf{u_1}(t)\ dt = \int (t^5-2t^3+t, t^2-3t, t^7-4t^6)\ dt$

β. $\int \mathbf{u_2}(t)\ dt = \int (\frac{1}{t^2-5t+6}, \sigma\upsilon\nu(t-1))\ dt$

γ. $\int_0^1 \mathbf{u_3}(t)\ dt = \int_0^1 (t^3-2t+1, \eta\mu t, \sigma\upsilon\nu(t-4))\ dt$

δ. $\int_1^2 \mathbf{u_4}(t)\ dt = \int_1^2 (t^4+t^2+1, e^{t-2}, \sqrt{t})\ dt$

ε. $\int_0^3 \mathbf{u_5}(t)\ dt = \int_0^3 (e^{2t}, 3^{t-2}, \sigma\upsilon\nu(t-3))\ dt$.

4. Δίνεται η διανυσματική συνάρτηση $\mathbf{u}(t) = (t^2, -(t+1), e^t-1)$, $t \in I\!R$. Να βρεθούν:

α. $\frac{d\mathbf{u}(t)}{dt}$

β. $\frac{d^3\mathbf{u}(t)}{dt^3}$

γ. $\int \mathbf{u}(t)\ dt$

δ. $\int_1^4 \mathbf{u}(t)\ dt$

ε. $\int \mathbf{u}(t) \times \mathbf{u}'(t)\ dt$ και

στ. $\int_0^1 \mathbf{u}(t) \times \mathbf{u}'(t)\ dt$.

2. Καμπύλες του χώρου

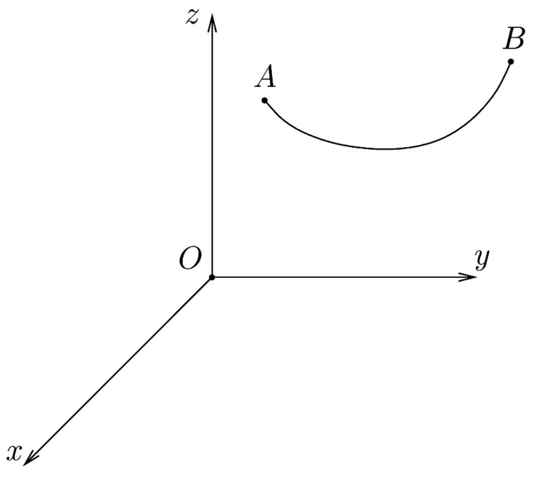
Βασικοί ορισμοί.

Καλούμε **συνεχή καμπύλη** του χώρου $\mathbb{R}^3$ με αρχή το σημείο $A(x_1, y_1, z_1)$ και τέλος το σημείο $B(x_2, y_2, z_2)$ (Σχήμα 1.43) το σύνολο όλων των σημείων του χώρου $\mathbb{R}^3$ οι συντεταγμένες των οποίων είναι συναρτήσεις μιάς μεταβλητής $x = x(t)$, $y = y(t)$ και $z = z(t)$, όπου $t \in [\alpha, \beta]$ τέτοιες ώστε:

(i) $x_1 = x(\alpha)$, $y_1 = y(\alpha)$ και $z_1 = z(\alpha)$,

(ii) $x_2 = x(\beta)$, $y_2 = y(\beta)$ και $z_2 = z(\beta)$ και

(iii) είναι συνεχείς συναρτήσεις στο $[\alpha, \beta]$.



Σχήμα 1.43

Η παραπάνω καμπύλη με διανυσματική μορφή περιγράφεται ως εξής:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t) = (x(t), y(t), z(t)), \quad \text{όπου } t \in [\alpha, \beta].$$

Μία καμπύλη

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t) = (x(t), y(t), z(t)), \quad \text{όπου } t \in [\alpha, \beta]$$

καλείται **λεία** όταν οι συναρτήσεις $x = x'(t)$, $y = y'(t)$ και $z = z'(t)$ υπάρχουν και είναι συνεχείς συναρτήσεις στο $[\alpha, \beta]$ και επιπλέον $x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2 \neq 0$, για κάθε $t \in [\alpha, \beta]$. Το τελευταίο σημαίνει ότι για κάθε $t \in [\alpha, \beta]$ δεν μπορούν να μηδενίζονται ταυτόχρονα οι $x'(t)$, $y'(t)$ και $z'(t)$.

Μία καμπύλη καλείται **κλειστή** άν $x(\alpha) = x(\beta)$, $y(\alpha) = y(\beta)$ και $z(\alpha) = z(\beta)$ ή ισοδύναμα όταν $\mathbf{r}(\alpha) = \mathbf{r}(\beta)$.

Μία καμπύλη θα λέμε ότι είναι καμπύλη **χωρίς πολλαπλά σημεία** αν

$$\mathbf{r}(t_1) \neq \mathbf{r}(t_2)$$

ή ισοδύναμα

$$(x(t_1), y(t_1), z(t_1)) \neq (x(t_2), y(t_2), z(t_2)),$$

για κάθε $t_1, t_2 \in [\alpha, \beta]$ με $t_1 \neq t_2$.

Παρατηρήσεις.

(1) Αν στον παραπάνω ορισμό της συνεχούς καμπύλης παραλείψουμε την ιδιότητα (iii) έχουμε την έννοια γενικά της καμπύλης στο χώρο.

(2) Με ανάλογο τρόπο ορίζονται και οι καμπύλες του επιπέδου $I\!R^2$.

(3) Μία λεία καμπύλη c στο χώρο

$$c : \mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$$

ή

$$c : \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t), \quad t \in [\alpha, \beta] \end{cases}$$

έχει πεπερασμένο μήκος $\mu(c)$ το οποίο υπολογίζεται από την έκφραση:

$$\mu(c) = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2}\, dt.$$

(4) Μία καμπύλη c που έχει εξίσωση $y = f(x)$, $x \in [\alpha, \beta]$ στο ορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων Oxy μπορεί να τεθεί σε παραμετρική μορφή ως εξής:

$$c : \begin{cases} x = t \\ y = f(t), \quad t \in [\alpha, \beta]. \end{cases}$$

Αν η $y = f'(x)$ είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$, τότε το μήκος αυτής είναι:

$$\mu(c) = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{1 + f'(t)^2}\ dt.$$

(5) Έστω η λεία καμπύλη στο χώρο που ορίζεται από τις εξισώσεις $x = x(t)$, $y = y(t)$ και $z = z(t)$, όπου $t \in [\alpha, \beta]$. Τότε το εφαπτόμενο διάνυσμα σ' ένα σημείο $M(x(t_1), y(t_1), z(t_1))$ αυτής είναι:

$$\mathbf{r}(t) = x'(t_1)\ \mathbf{e_1} + y'(t_1)\ \mathbf{e_2} + z'(t_1)\ \mathbf{e_3}.$$

Οπότε οι παραμετρικές εξισώσεις της ευθείας ε του χώρου που είναι εφαπτομένη στην καμπύλη στο σημείο $M(x(t_1), y(t_1), z(t_1))$ είναι:

$$\varepsilon : \begin{cases} x = x(t_1) + tx'(t_1) \\ y = y(t_1) + ty'(t_1) \\ z = z(t_1) + tz'(t_1), \quad t \in I\!R. \end{cases}$$

Παράδειγμα. Δίνεται η καμπύλη

$$c : \begin{cases} x(t) = \eta\mu t \\ y(t) = \sigma\upsilon\nu t \\ z(t) = t,\ t \in [0, \pi]. \end{cases}$$

Να βρεθούν:

(1) Το μήκος της καμπύλης c.

(2) Οι παραμετρικές εξισώσεις της ευθείας ε του χώρου που είναι εφαπτομένη στην καμπύλη στο σημείο $M(1, 0, \frac{\pi}{2})$.

Έχουμε:

$$\begin{cases} x'(t) = \sigma\upsilon\nu t \\ y'(t) = -\eta\mu t \\ z'(t) = 1. \end{cases}$$

Οπότε:

(1)

$$\mu(c) = \int_0^{\pi} \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2}\ dt$$

ή

$$\mu(c) = \int_0^{\pi} \sqrt{(\sigma\upsilon\nu t)^2 + (\eta\mu t)^2 + 1}\ dt$$

ή

$$\mu(c) = \int_0^{\pi} \sqrt{2}\ dt = \sqrt{2}\pi.$$

(2) Το εφαπτόμενο διάνυσμα στο σημείο $M(1, 0, \frac{\pi}{2})$ αυτής είναι:

$$\mathbf{r}(t) = 0\mathbf{e_1} - 1\mathbf{e_2} + 1\ \mathbf{e_3}.$$

Οπότε οι παραμετρικές εξισώσεις της ευθείας ε του χώρου που είναι εφαπτομένη στην καμπύλη στο σημείο $M(1, 0, \frac{\pi}{2})$ είναι:

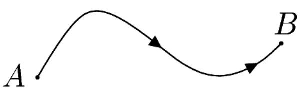
$$\varepsilon : \begin{cases} x = 1 \\ y = -t \\ z = \frac{\pi}{2} + t, \quad t \in I\!R. \end{cases}$$

3. Επικαμπύλια Ολοκληρώματα

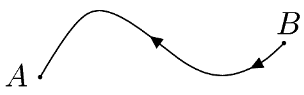
Στην παράγραφο αυτή γίνεται περιγραφή των επικαμπύλιων ολοκληρωμάτων.

1. Προκαταρκτικά.

Έστω $c : \mathbf{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$, $t \in [a, b]$ μία λεία καμπύλη και έστω ότι η καμπύλη c είναι προσανατολισμένη με αρχή το σημείο $A(x(a), y(a), z(a))$ και τέλος το σημείο $B(x(b), y(b), z(b))$ (υπάρχει περίπτωση το σημείο A να ταυτίζεται με το σημείο B). Σχήμα 3.25.



Σχήμα 3.25



Σχήμα 3.26

Τότε η λεία καμπύλη c_- που έχει το ίδιο γράφημα με τη c αλλά είναι προσανατολισμένη με αρχή το σημείο B και τέλος το σημείο A (Σχήμα 3.26) έχει διανυσματική παραμετρική εξίσωση

$$c_- : \mathbf{r}_-(t) = (x(a+b-t), y(a+b-t), z(a+b-t)),\ \ t \in [a, b].$$

2. Επικαμπύλια ολοκληρώματα πρώτου είδους.

Έστω $c : \mathbf{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$, $t \in [a, b]$ μία λεία καμπύλη, προσανατολισμένη με αρχή το σημείο $A(x(a), y(a), z(a))$ και τέλος το σημείο $B(x(b), y(b), z(b))$ (υπάρχει περίπτωση το σημείο A να ταυτίζεται με το σημείο B) και έστω $w = f(x, y, z)$ συνεχής συνάρτηση επί του φορέα:

$$\mathbf{c} = \{(x, y, z) \in I\!R^3 : x = x(t),\ \ y = y(t),\ \ z = z(t),\ \ t \in [a, b]\}$$

της καμπύλης c.

Καλούμε **επικαμπύλιο ολοκλήρωμα πρώτου είδους** της συνάρτησης f επί της καμπύλης c και το συμβολίζουμε

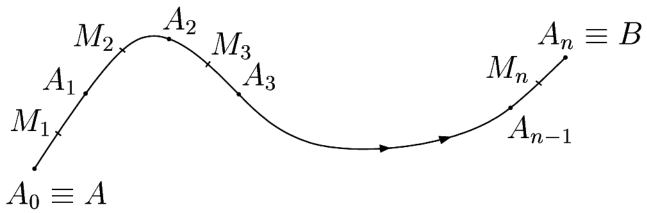
$$\int_c f(x, y, z)\ ds$$

το ορισμένο ολοκλήρωμα:

$$\int_a^b f(x(t), y(t), z(t))\ \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2}\ dt.$$

Γεωμετρική ερμηνεία του επικαμπύλιου ολοκληρώματος πρώτου είδους.

Έστω A_0, A_1,...,A_n σημεία του φορέα της καμπύλης c τέτοια ώστε: $A_0 \equiv A$ και $A_n \equiv B$. Σχημα 3.27.



Σχήμα 3.27

Το σύνολο $\mathcal{D} = \{A_0, A_1, ..., A_n\}$ λέμε ότι αποτελεί **διαμέριση** του φορέα της καμπύλης c. Αν Δs_i είναι το μήκος $\mu(A_{i-1}A_i)$ του τόξου $A_{i-1}A_i$, $i = 1, 2, ..., n$, της καμπύλης c, τότε με Δs συμβολίζουμε το μέγιστο στοιχείο των Δs_i, $i = 1, 2, ..., n$.

Στη συνέχεια επιλέγουμε τυχόντα σημεία $M_i(x(\xi_i), y(\xi_i), z(\xi_i))$ των τόξων $A_{i-1}A_i$, $i = 1, 2, ..., n$ και θεωρούμε το άθροισμα:

$$\sum_{i=1}^{n} f(x(\xi_i), y(\xi_i), z(\xi_i))\Delta s_i.$$

Αποδεικνύεται ότι το όριο του παραπάνω αθροίσματος όταν το $\Delta s \to 0$ (και επομένως $n \to \infty$) υπάρχει και είναι ανεξάρτητο της διαμέρισης $\mathcal{D}$ του φορέα της καμπύλης και της επιλογής των σημείων $M_i \in A_{i-1}A_i$, $i = 1, 2, ..., n$. Το όριο αυτό είναι το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα της f πρώτου είδους επί της καμπύλης c.

Ιδιότητες του επικαμπύλιου ολοκληρώματος πρώτου είδους.

Έστω $c : \mathrm{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$, $t \in [a, b]$ μία λεία καμπύλη, προσανατολισμένη με αρχή το σημείο $A(x(a), y(a), z(a))$ και τέλος το σημείο $B(x(b), y(b), z(b))$ (υπάρχει περίπτωση το σημείο A να ταυτίζεται με το σημείο B) και έστω $w = f(x, y, z)$, $w = g(x, y, z)$ συνεχείς συναρτήσεις επί του φορέα $\mathbf{c}$ της καμπύλης c.

Τότε έχουμε:

(1) $\int_c (\varkappa f(x,y,z) \pm \lambda g(x,y,z))\, ds = \varkappa \int_c f(x,y,z)\, ds \pm \lambda \int_c g(x,y,z)\, ds$, όπου $\varkappa, \lambda \in \mathbb{R}$.

(2) $|\int_c f(x,y,z)\, ds| \leq \int_c |f(x,y,z)|\, ds$.

(3) Έστω $c_- : \mathbf{r}_-(t) = (x(a+b-t), y(a+b-t), z(a+b-t))$, $t \in [a, b]$. Τότε:

$$\int_c f(x,y,z)\, ds = \int_{c_-} f(x,y,z)\, ds.$$

(4) Έστω Α η αρχή της καμπύλης c, Β το τέλος της καμπύλης c και Γ σημείο του τόξου ΑΒ. Αν c_1 είναι το τμήμα της καμπύλης c με αρχή το Α και τέλος το σημείο Γ και c_2 είναι το τμήμα της καμπύλης c με αρχή το σημείο Γ και τέλος το σημείο Β, τότε

$$\int_c f(x,y,z)\, ds = \int_{c_1} f(x,y,z)\, ds + \int_{c_2} f(x,y,z)\, ds.$$

Παρατηρήσεις.

(1) Έστω $c : \mathbf{r}(t) = (x(t), y(t))$, $t \in [a, b]$ μία λεία καμπύλη του επιπέδου, προσανατολισμένη με αρχή το σημείο $A(x(a), y(a))$ και τέλος

το σημείο $B(x(b), y(b))$ (υπάρχει περίπτωση το σημείο A να ταυτίζεται με το σημείο B) και έστω $w = f(x, y)$ συνεχής συνάρτηση επί του φορέα:

$$\mathbf{c} = \{(x, y) \in I\!R^2 : x = x(t),\ y = y(t),\ t \in [a, b]\}$$

της καμπύλης c.

Καλούμε **επικαμπύλιο ολοκλήρωμα πρώτου είδους** της συνάρτησης f επί της καμπύλης c και το συμβολίζουμε

$$\int_c f(x, y)\ ds$$

το ορισμένο ολοκλήρωμα:

$$\int_a^b f(x(t), y(t))\ \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\ dt.$$

Ειδικότερα, αν

$$c : \begin{cases} x = t \\ x = g(t), \end{cases}$$

$t \in [a, b]$, τότε

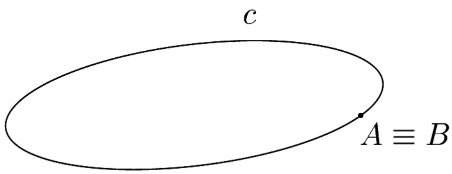
$$\int_c f(x, y)\ ds = \int_a^b f(t, g(t))\ \sqrt{1 + (g'(t))^2}\ dt.$$

(2) Αν η επίπεδη καμπύλη $c : \mathbf{r}(t) = (x(t), y(t))$, $t \in [a, b]$ είναι κλειστή και δεν περιέχει πολλαπλά σημεία (Σχήμα 3.28), τότε το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα

$$\int_c f(x, y)\ ds$$

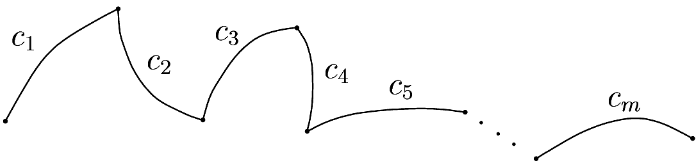
συμβολίζεται με

$$\oint_c f(x, y)\ ds.$$



Σχήμα 3.28

(3) Αν μία συνεχής καμπύλη c του χώρου χωρίζεται σε πεπερασμένο πλήθος λείων καμπύλων c_i, $i = 1, 2, ..., m$ (Σχήμα 3.29), τότε



Σχήμα 3.29

$$\int_c f(x, y, z)\ ds = \sum_{i=1}^{m} \int_{c_i} f(x, y, z)\ ds.$$

Ομοίως αν μία συνεχή καμπύλη c του επιπέδου χωρίζεται σε πεπερασμένο πλήθος λείων καμπύλων c_i, $i = 1, 2, ..., m$, τότε έχουμε:

$$\int_c f(x, y)\ ds = \sum_{i=1}^{m} \int_{c_i} f(x, y)\ ds.$$

(4) Αν θεωρήσουμε ότι ο φορέας της καμπύλης $c : \mathbf{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$, $t \in [a, b]$ περιγράφει ένα υλικό τόξο και η συνάρτηση $w = \delta(x(t), y(t), z(t))$

δίνει την πυκνότητα της μάζας σε κάθε σημείο του φορέα της καμπύλης με συντεταγμένες $(x(t), y(t), z(t))$, τότε η μάζα m της καμπύλης είναι:

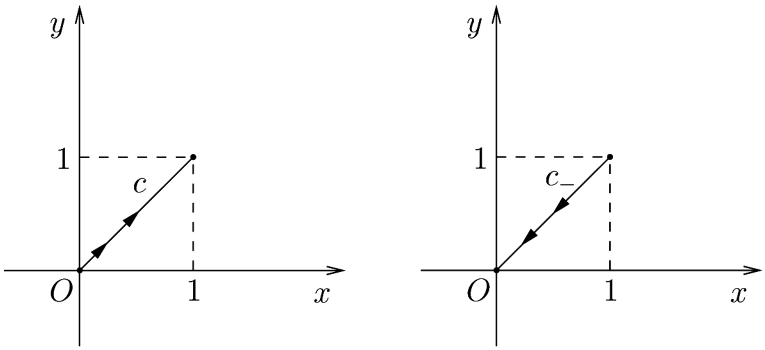
$$m = \int_c \delta(x, y, z)\ ds.$$

Παραδείγματα.

(1) Δίνεται η καμπύλη

$$c : \begin{cases} x = t \\ y = t, \end{cases}$$

όπου $t \in [0, 1]$ (Σχήμα 3.30).



Σχήμα 3.30

Να βρεθούν τα $\int_c x\ ds$ και $\int_{c_-} x\ ds$.

Έχουμε:

$$c_- : \begin{cases} x = 1 + 0 - t \\ y = 1 + 0 - t, \end{cases}$$

όπου $t \in [0, 1]$.

Οπότε:

$$\int_c x\ ds = \int_0^1 t\sqrt{1^2 + 1^2}\ dt = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

και

$$\int_{c_-} x\ ds = \int_0^1 (1-t)\sqrt{(-1)^2+(-1)^2}\ dt = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Την ισότητα των παραπάνω επικαμπύλιων ολοκληρωμάτων την περιμέναμε από τις ιδιότητες αυτών.

(2) Δίνεται η καμπύλη

$$c : \begin{cases} x = \text{συν}t \\ y = \text{ημ}t, \end{cases}$$

όπου $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$ και η συνάρτηση $f(x, y) = x$. Να υπολογισθεί το $\int_c f(x, y)\ ds$.

Έχουμε:

$$\begin{aligned} \int_c f(x,y)\ ds &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{συν}t\sqrt{(-\text{ημ}t)^2 + (\text{συν}t)^2}\ dt \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{συν}t\ dt = 1. \end{aligned}$$

(3) Δίνεται η καμπύλη

$$c : \begin{cases} x = \text{συν}t \\ y = \text{ημ}t \\ z = t, \end{cases}$$

όπου $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$ και η συνάρτηση $f(x, y, z) = xy$. Να υπολογισθεί το $\int_c f(x, y, z)\ ds$.

Έχουμε:

$$\begin{aligned} \int_c f(x,y,z)\ ds &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{συν}t\ \text{ημ}t\sqrt{(-\text{ημ}t)^2 + (\text{συν}t)^2 + 1^2}\ dt \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{συν}t\ \text{ημ}t\ dt = \frac{\sqrt{2}}{2}. \end{aligned}$$

(4) Δίνεται η καμπύλη

$$c : \begin{cases} x = \text{συν}t \\ y = \text{ημ}t \\ z = t, \end{cases}$$

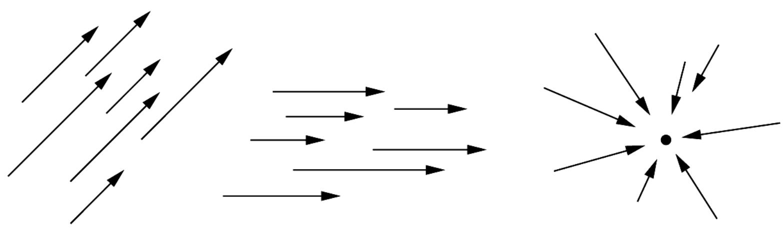
όπου $t \in [0, 2\pi]$ και η συνάρτηση $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$. Να υπολογισθεί το $\int_c f(x, y, z)\ ds$.

Έχουμε:

$$\begin{aligned}\int_c f(x, y, z)\ ds &= \int_0^{2\pi} [(\text{συν}t)^2 + (\text{ημ}t)^2 + t^2]\sqrt{(-\text{ημ}t)^2 + (\text{συν}t)^2 + 1^2}\ dt \\ &= \int_0^{2\pi} [(\text{συν}t)^2 + (\text{ημ}t)^2 + t^2]\ \sqrt{2}\ dt \\ &= \int_0^{2\pi} (1 + t^2)\ \sqrt{2}\ dt = \sqrt{2}(2\pi + \frac{8\pi^3}{3}).\end{aligned}$$

3. Επικαμπύλια ολοκληρώματα δευτέρου είδους.

Μία συνάρτηση $\mathrm{f} : \mathbf{A} \subseteq I\!R^3 \to I\!R^3$ (αντίστοιχα, $\mathrm{f} : \mathbf{A} \subseteq I\!R^2 \to I\!R^2$) καλείται **διανυσματικό πεδίο του** $I\!R^3$ (αντίστοιχα, του $I\!R^2$). Τα διανυσματικά πεδία είναι ιδιαίτερα χρήσιμα στη φυσική και χρησιμοποιούνται για την περιγραφή εννοιών όπως, πεδία δυνάμεων, ροή ρευστών, ροή θερμότητας κ.λπ. Σχήμα 3.31.



Σχήμα 3.31

Έστω $c : \mathrm{r}(t) = (x(t), y(t), z(t)),\ t \in [a, b]$ μία λεία καμπύλη, προσανατολισμένη με αρχή το σημείο $A(x(a), y(a), z(a))$ και τέλος το σημείο $B(x(b), y(b), z(b))$ (υπάρχει περίπτωση το σημείο A να ταυτίζεται με το σημείο B) και έστω $\mathrm{f}(x, y, z) = (P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z))$ ένα διανυσματικό πεδίο που ορίζεται επί του φορέα:

$$\mathrm{c} = \{(x, y, z) \in I\!R^3 : x = x(t),\ y = y(t),\ z = z(t),\ t \in [a, b]\}$$

της καμπύλης c έτσι ώστε οι συναρτήσεις $P(x,y,z)$, $Q(x,y,z)$ και $R(x,y,z)$ να είναι συνεχείς.

Καλούμε **επικαμπύλιο ολοκλήρωμα δευτέρου είδους** του διανυσματικού πεδίου f επί της καμπύλης c και το συμβολίζουμε

$$\int_c \mathbf{f}(x,y,z)\cdot d\mathbf{r}$$

το ορισμένο ολοκλήρωμα:

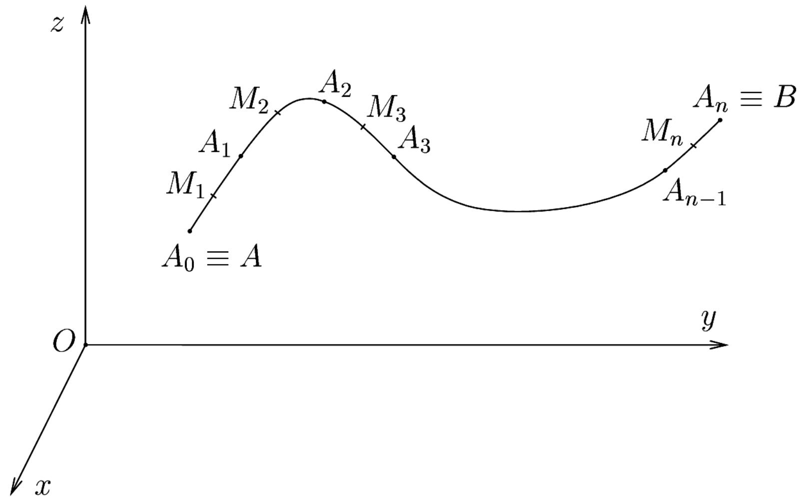
$$\begin{aligned}
&\int_a^b \mathbf{f}(x(t),y(t),z(t))\cdot \mathbf{r}'(t)\ dt \\
&= \int_a^b P(x(t),y(t),z(t))x'(t) + Q(x(t),y(t),z(t))y'(t) \\
&+ R(x(t),y(t),z(t))z'(t)\ dt.
\end{aligned}$$

Πολλές φορές χρησιμοποιείται ο συμβολισμός:

$$\int_c \mathbf{f}(x,y,z)\cdot d\mathbf{r} = \int_a^b P(x,y,z)\ dx + Q(x,y,z)\ dy + R(x,y,z)\ dz.$$

Γεωμετρική ερμηνεία του επικαμπύλιου ολοκληρώματος δευτέρου είδους.

Έστω A_0, A_1,...,A_n σημεία του φορέα της καμπύλης c τέτοια ώστε: $A_0 \equiv A$ και $A_n \equiv B$. Σχημα 3.32.



Σχήμα 3.32

Το σύνολο $\mathcal{D} = \{A_0, A_1, ..., A_n\}$ λέμε ότι αποτελεί **διαμέριση** του φορέα της καμπύλης c.

Συμβολίζουμε με Δx_i, Δy_i και Δz_i τις προβολές του στοιχειώδους τόξου $A_{i-1}A_i$, $i = 1, 2, ..., n$, της καμπύλης c, πάνω στους άξονες Ox, Oy και Oz, αντίστοιχα.

Στη συνέχεια επιλέγουμε τυχόντα σημεία $M_i(x(\xi_i), y(\xi_i), z(\xi_i))$ των τόξων $A_{i-1}A_i$, $i = 1, 2, ..., n$ και θεωρούμε το άθροισμα:

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{n} \mathrm{f}(x(\xi_i), y(\xi_i), z(\xi_i)) \cdot (\Delta x_i, \Delta y_i, \Delta z_i) \\
&= \sum_{i=1}^{n} P(x(\xi_i), y(\xi_i), z(\xi_i))\Delta x_i + \sum_{i=1}^{n} Q(x(\xi_i), y(\xi_i), z(\xi_i))\Delta y_i \\
&+ \sum_{i=1}^{n} R(x(\xi_i), y(\xi_i), z(\xi_i))\Delta z_i.
\end{aligned}$$

Αποδεικνύεται ότι το όριο του παραπάνω αθροίσματος όταν το $n \to \infty$ (με την προϋπόθεση ότι το μέγιστο μήκος των $\mathrm{A}_{i-1}A_i$, $i = 1, 2, ..., n$ τείνει στο μηδέν) υπάρχει και είναι ανεξάρτητο της διαμέρισης $\mathcal{D}$ του φορέα της καμπύλης c και της επιλογής των σημείων $M_i \in A_{i-1}A_i$, $i = 1, 2, ..., n$. Το όριο αυτό είναι το επικαμπύλιο ολοκήρωμα δευτέρου είδους του διανυσματικού πεδίου f επί της καμπύλης c.

Ιδιότητες του επικαμπύλιου ολοκληρώματος δευτέρου είδους.

Έστω $c : \mathbf{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$, $t \in [a, b]$ μία λεία καμπύλη, προσανατολισμένη με αρχή το σημείο $A(x(a), y(a), z(a))$ και τέλος το σημείο $B(x(b), y(b), z(b))$ (υπάρχει περίπτωση το σημείο A να ταυτίζεται με το σημείο B) και έστω f, g διανυσματικά πεδία του $\mathbb{R}^3$ συνεχείς συναρτήσεις επί του φορέα **c** της καμπύλης c.

Τότε, έχουμε:

(1) $\int_c (\varkappa \mathbf{f}(x, y, z) \pm \lambda \mathbf{g}(x, y, z)) \cdot d\mathbf{r} = \varkappa \int_c \mathbf{f}(x, y, z) \cdot d\mathbf{r} \pm \lambda \int_c \mathbf{g}(x, y, z) \cdot d\mathbf{r}$, όπου $\varkappa, \lambda \in \mathbb{R}$.

(2) $|\int_c \mathbf{f}(x, y, z) \cdot d\mathbf{r}| \leq \int_c |\mathbf{f}(x, y, z)| \cdot d\mathbf{r}$.

(3) Έστω $c_- : \mathbf{r}_-(t) = (x(a+b-t), y(a+b-t), z(a+b-t))$, $t \in [a, b]$. Τότε:

$$\int_c \mathbf{f}(x, y, z) \cdot d\mathbf{r} = -\int_{c_-} \mathbf{f}(x, y, z) \cdot d\mathbf{r}.$$

(4) Έστω Α η αρχή της καμπύλης c, Β το τέλος της καμπύλης c και Γ σημείο του τόξου ΑΒ. Αν c_1 είναι το τμήμα της καμπύλης c με αρχή το Α και τέλος το σημείο Γ και c_2 είναι το τμήμα της καμπύλης c με αρχή το σημείο Γ και τέλος το σημείο Β, τότε

$$\int_c \mathbf{f}(x, y, z) \cdot d\mathbf{r} = \int_{c_1} \mathbf{f}(x, y, z) \cdot d\mathbf{r} + \int_{c_2} \mathbf{f}(x, y, z) \cdot d\mathbf{r}.$$

Παρατηρήσεις.

(1) Έστω $c : \mathbf{r}(t) = (x(t), y(t))$, $t \in [a, b]$ μία λεία καμπύλη του επιπέδου, προσανατολισμένη με αρχή το σημείο $A(x(a), y(a))$ και τέλος το σημείο $B(x(b), y(b))$ (υπάρχει περίπτωση το σημείο A να ταυτίζεται με το σημείο B) και έστω $\mathbf{f}(x, y) = (P(x, y), Q(x, y))$ διανυσματικό πεδίο επί

του $I\!R^2$ τέτοιο ώστε οι συναρτήσεις $P(x,y)$ και $Q(x,y)$ να είναι συνεχείς επί του φορέα:

$$\mathbf{c} = \{(x,y) \in I\!R^2 : x = x(t),\ y = y(t),\ t \in [a,b]\}$$

της καμπύλης c.

Καλούμε **επικαμπύλιο ολοκλήρωμα δευτέρου είδους** του διανυσματικού πεδίου $\mathbf{f}$ επί της καμπύλης c και το συμβολίζουμε

$$\int_c \mathbf{f}(x,y) \cdot d\mathbf{r}$$

το ορισμένο ολοκλήρωμα:

$$\int_a^b \mathbf{f}(x(t),y(t)) \cdot \mathbf{r}'(t)\ dt = \int_a^b P(x(t),y(t))x'(t) + Q(x(t),y(t))y'(t)\ dt.$$

Ειδικότερα αν

$$c : \begin{cases} x = t \\ x = g(t), \end{cases}$$

$t \in [a,b]$, τότε

$$\int_c \mathbf{f}(x,y)\ d\mathbf{r} = \int_a^b \mathbf{f}(t,g(t)) \cdot \mathbf{r}'(t)\ dt = \int_a^b P(t,g(t)) + Q(t,g(t))g'(t)\ dt.$$

(2) Αν η επίπεδη καμπύλη $c : \mathbf{r}(t) = (x(t),y(t))$, $t \in [a,b]$ είναι κλειστή και δεν περιέχει πολλαπλά σημεία, τότε το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα

$$\int_c \mathbf{f}(x,y) \cdot d\mathbf{r}$$

συμβολίζεται με

$$\oint_c \mathbf{f}(x,y) \cdot d\mathbf{r}.$$

(3) Αν μία συνεχή καμπύλη c του χώρου χωρίζεται σε πεπερασμένο πλήθος λείων καμπύλων c_i, $i = 1,2,...,m$, τότε

$$\int_c \mathrm{f}(x,y,z)\cdot d\mathbf{r} = \sum_{i=1}^{m} \int_{c_i} \mathrm{f}(x,y,z)\cdot d\mathbf{r}.$$

Ομοίως για τις καμπύλες του επιπέδου έχουμε:

$$\int_c \mathrm{f}(x,y)\cdot d\mathbf{r} = \sum_{i=1}^{m} \int_{c_i} \mathrm{f}(x,y)\cdot d\mathbf{r}.$$

(4) Είναι γνωστό από τη Μηχανική ότι αν ένα σωματίδιο κινείται κατά μήκος του φορέα μιάς καμπύλης $c : \mathbf{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$, $t \in [a, b]$, υπο την επίδραση μιάς δύναμης $\mathbf{F}(x,y,z) = (P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z))$, τότε το έργο W που παράγει το πεδίο δυνάμεων $\mathbf{F}$ όταν το σωματίδιο κινείται κατά μήκος του φορέα της καμπύλης c είναι:

$$W = \int_c \mathbf{F}(x,y,z)\cdot d\mathbf{r}.$$

Παραδείγματα.

(1) Δίνεται η καμπύλη

$$c : \begin{cases} x = t \\ y = t, \end{cases}$$

όπου $t \in [0, 1]$.

Να βρεθούν τα $\int_c (x,y)\cdot d\mathbf{r}$ και $\int_{c_-} (x,y)\cdot d\mathbf{r}$.

Έχουμε:

$$c_- : \begin{cases} x = 1 + 0 - t \\ y = 1 + 0 - t, \end{cases}$$

όπου $t \in [0, 1]$.

Οπότε:

$$\int_c (x,y)\cdot d\mathbf{r} = \int_0^1 (t,t)\cdot(1,1)\ dt = \int_0^1 2t\ dt = 1$$

και

$$\int_{c_-} (x,y)\cdot d\mathbf{r} = \int_0^1 (1-t, 1-t)\cdot(-1,-1)\ dt = \int_0^1 -2+2t\ dt = -1.$$

Τη σχέση

$$\int_c (x,y)\cdot d\mathbf{r} = -\int_{c_-} (x,y)\cdot d\mathbf{r}$$

των παραπάνω επικαμπύλιων ολοκληρωμάτων την περιμέναμε από τις ιδιότητες αυτών.

(2) Δίνεται η καμπύλη

$$c : \begin{cases} x = t \\ y = t^2, \end{cases}$$

όπου $t \in [0,2]$ και το διανυσματικό πεδίο $\mathrm{f}(x,y) = (y,x)$. Να υπολογισθεί το $\int_c \mathrm{f}(x,y)\cdot d\mathbf{r}$.

Έχουμε:

$$\begin{aligned} \int_c \mathrm{f}(x,y)\cdot d\mathbf{r} &= \int_0^2 (t^2, t)\cdot(1, 2t)dt \\ &= \int_0^2 t^2 + 2t^2\ dt \\ &= \int_0^2 3t^2\ dt = 8. \end{aligned}$$

(3) Δίνεται η καμπύλη

$$c : \begin{cases} x = \text{συν}t \\ y = \text{ημ}t, \end{cases}$$

όπου $t \in [0,\pi]$ και το διανυσματικό πεδίο $\mathrm{f}(x,y) = (x^2, 2xy)$. Να υπολογισθεί το $\int_c \mathrm{f}(x,y)\cdot d\mathbf{r}$.

Έχουμε:

$$\begin{aligned}
\int_c \mathrm{f}(x,y)\cdot d\mathrm{r} &= \int_0^{\pi} ((\sigma\upsilon\nu t)^2, 2\sigma\upsilon\nu t\ \eta\mu t)\cdot(-\eta\mu t, \sigma\upsilon\nu t)\ dt \\
&= \int_0^{\pi} (-\eta\mu t\ (\sigma\upsilon\nu t)^2 + 2(\sigma\upsilon\nu t)^2\ \eta\mu t)\ dt \\
&= \int_0^{\pi} (\sigma\upsilon\nu t)^2 \eta\mu t\ dt = \frac{2}{3}.
\end{aligned}$$

(4) Δίνεται η καμπύλη

$$c : \begin{cases} x = t \\ y = t^2 \\ z = t^3, \end{cases}$$

όπου $t \in [0,1]$ και το διανυσματικό πεδίο $\mathrm{f}(x,y,z) = (x, xz+1, yz+x)$. Να υπολογισθεί το $\int_c \mathrm{f}(x,y,z)\cdot d\mathrm{r}$.

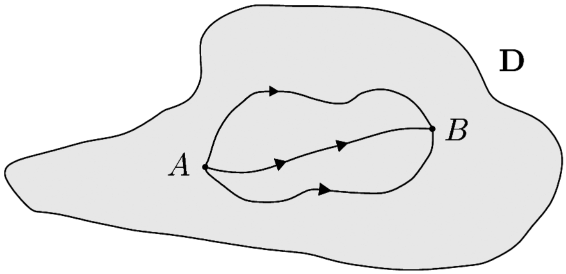
Έχουμε:

$$\begin{aligned}
\int_c \mathrm{f}(x,y,z)\cdot d\mathrm{r} &= \int_0^1 (t, tt^3+1, t^2t^3+t)\cdot(1, 2t, 3t^2)\ dt \\
&= \int_0^1 (t + 2t^5 + 2t + 3t^7 + 3t^3)\ dt \\
&= \int_0^1 (3t^7 + 2t^5 + 3t^3 + 3t)\ dt \\
&= \frac{71}{24}.
\end{aligned}$$

4. Επικαμπύλια ολοκληρώματα ανεξάρτητα από το δρόμο της ολοκλήρωσης.

Έστω $\mathrm{f}(x,y,z) = (P(x,y,z),\ Q(x,y,z),\ R(x,y,z))$ (αντίστοιχα, $\mathrm{f}(x,y) = (P(x,y), Q(x,y))$ ένα διανυσματικό πεδίο ορισμένο επί του ανοικτού υποσυνόλου $\mathbf{D}$ του $\mathbb{R}^3$ (αντίστοιχα, του $\mathbb{R}^2$). Θα λέμε ότι το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα του διανυσματικού πεδίου f στο $\mathbf{D}$ είναι **ανεξάρτητο του δρόμου ολοκλήρωσης** όταν για οποιοδήποτε ζεύγος σημείων

$A, B \in \mathbf{D}$ η τιμή του επικαμπύλιου ολοκληρώματος $\int_c \mathrm{f}(x,y,z) \cdot d\mathbf{r}$ (αντίστοιχα, $\int_c \mathrm{f}(x,y) \cdot d\mathrm{r}$), όπου c είναι καμπύλη που ανήκει στο $\mathbf{D}$ με αρχή το A και τέλος το B (Σχήμα 3.33), εξαρτάται μόνο από το διανυσματικό πεδίο f και τα σημεία A και B και όχι από την καμπύλη c του $\mathbf{D}$ που ενώνει τα σημεία A και B. Σχήμα 3.33.



Σχήμα 3.33

Αποδεικνύονται τα παρακάτω σχετικά θεωρήματα:

Θεώρημα 1. Έστω $\mathrm{f}(x,y) = (P(x,y), Q(x,y))$ ένα διανυσματικό πεδίο που ορίζεται επί του ανοικτού συνόλου $\mathbf{D} = (a,b) \times (c,d)$ του $\mathbb{R}^2$, όπου $a,b,c,d \in \mathbb{R}$ πραγματικές σταθερές, έτσι ώστε οι συναρτήσεις $P(x,y)$ και $Q(x,y)$ να είναι μερικώς παραγωγίσιμες και οι μερικές παράγωγοι αυτών πρώτης τάξης να είναι συνεχείς επί του $\mathbf{D}$. Αν

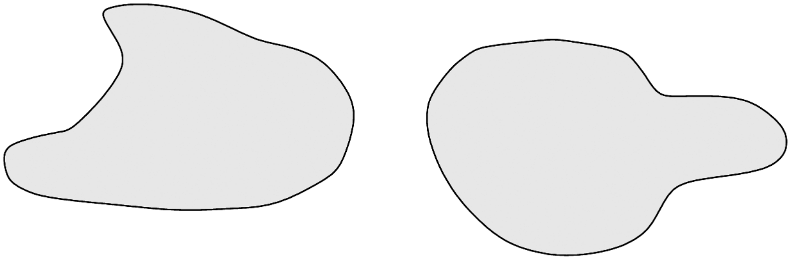
$$\frac{\partial P(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x},$$

για κάθε $(x,y) \in \mathbf{D}$, τότε το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα δευτέρου είδους του διανυσματικού πεδίου f στο $\mathbf{D}$ είναι ανεξάρτητο του δρόμου ολοκλήρωσης.

Θεώρημα 2. Έστω $\mathrm{f}(x,y,z) = (P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z))$ ένα διανυσματικό πεδίο που ορίζεται επί του ανοικτού συνόλου $\mathbf{D} = (a,b) \times (c,d) \times (e,g)$ του $\mathbb{R}^3$, όπου $a,b,c,d,e,g \in \mathbb{R}$ πραγματικές σταθερές, έτσι ώστε οι συναρτήσεις $P(x,y,z)$, $Q(x,y,z)$ και $R(x,y,z)$ να είναι μερικώς παραγωγίσιμες και οι μερικές παράγωγοι αυτών πρώτης τάξης να είναι συνεχείς επί του $\mathbf{D}$. Αν

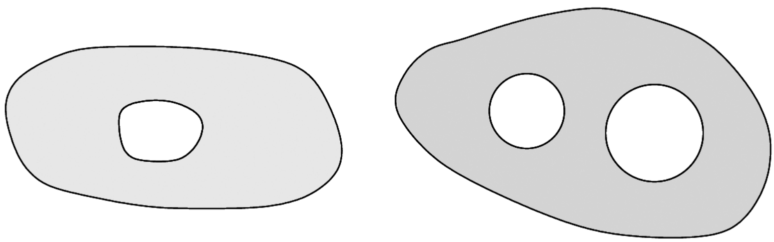
$$\frac{\partial Q(x,y,z)}{\partial x} = \frac{\partial P(x,y,z)}{\partial y}, \ \frac{\partial R(x,y,z)}{\partial x} = \frac{\partial P(x,y,z)}{\partial z} \text{ και}$$
$$\frac{\partial R(x,y,z)}{\partial y} = \frac{\partial Q(x,y,z)}{\partial z},$$

για κάθε $(x,y,z) \in \mathbf{D}$, τότε το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα δευτέρου είδους του διανυσματικού πεδίου f στο $\mathbf{D}$ είναι ανεξάρτητο του δρόμου ολοκλήρωσης.



Απλώς συνεκτικά σύνολα

Έστω $\mathbf{D}$ ανοικτό και συνεκτικό υποσύνολο του $\mathbb{R}^2$. Υπενθυμίζουμε ότι το $\mathbf{D}$ καλείται **απλώς συνεκτικό** αν για κάθε κλειστή καμπύλη c του $\mathbf{D}$ όλα τα σημεία της που βρίσκονται στο εσωτερικό της, ανήκουν επίσης στο $\mathbf{D}$.



Μη απλώς συνεκτικά σύνολα

Θεώρημα 3. Έστω $\mathrm{f}(x,y) = (P(x,y), Q(x,y))$ ένα διανυσματικό πεδίο που ορίζεται επί ενός απλού συνεκτικού τόπου $\mathbf{D}$ του $\mathbb{R}^2$ έτσι ώστε οι συναρτήσεις $P(x, y)$ και $Q(x, y)$ να είναι μερικώς παραγωγίσιμες και οι μερικές παράγωγοι αυτών πρώτης τάξης να είναι συνεχείς επί του $\mathbf{D}$. Αν

$$\frac{\partial P(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial Q(x, y)}{\partial x},$$

για κάθε $(x, y) \in \mathbf{D}$, τότε το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα δευτέρου είδους του διανυσματικού πεδίου f στο $\mathbf{D}$ είναι ανεξάρτητο του δρόμου ολοκλήρωσης.

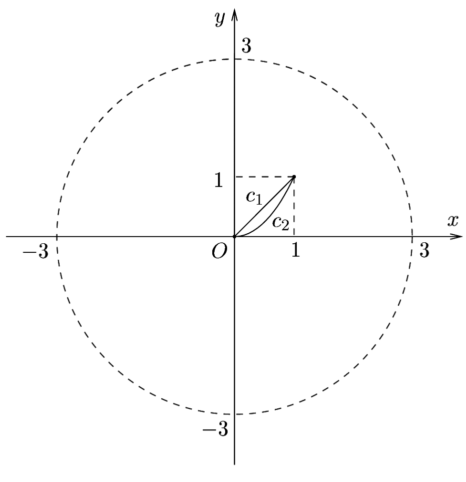
Παραδείγματα. (1) Έστω $\mathbf{D}$ ο ανοικτός κυκλικός δίσκος με κέντρο το σημείο $O(0, 0)$ και ακτίνα 3. Θεωρούμε τα σημεία $O(0, 0)$ και $\mathrm{A}(1, 1)$ και τις καμπύλες

$$c_1 : \begin{cases} x = t \\ y = t, \ t \in [0, 1] \end{cases}$$

και

$$c_2 : \begin{cases} x = t \\ y = t^2, \ t \in [0, 1] \end{cases}$$

που συνδέουν τα σημεία O και A. Σχήμα 3.34.



Σχήμα 3.34

Επίσης, έστω $\mathrm{f}(x, y) = (x + y, y)$ διανυσματικό πεδίο που ορίζεται επί του $\mathbf{D}$.

Παρατηρούμε ότι

$$\int_{c_1} \mathbf{f}(x,y)\cdot d\mathbf{r} = \int_0^1 (t+t,t)\cdot(1,1)\ dt$$
$$= \int_0^1 3t\ dt = \frac{3}{2}$$

και

$$\int_{c_2} \mathbf{f}(x,y)\cdot d\mathbf{r} = \int_0^1 (t+t^2,t^2)\cdot(1,2t)\ dt$$
$$= \int_0^1 2t^3+t^2+t\ dt = \frac{4}{3}.$$

Επομένως, το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα του διανυσματικού πεδίου $\mathbf{f}$ δεν είναι ανεξάρτητο του δρόμου ολοκλήρωσης.

(2) Έστω $\mathbf{D}$ ο ανοικτός κυκλικός δίσκος με κέντρο το σημείο $O(0,0)$ και ακτίνα 3 και έστω $\mathbf{f}(x,y) = (y-3, x+8)$ διανυσματικό πεδίο επί του $\mathbf{D}$. Τότε το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα του διανυσματικού πεδίου $\mathbf{f}$ επί του $\mathbf{D}$ είναι ανεξάρτητο από το δρόμο ολοκλήρωσης.

Πράγματι έχουμε: $P(x,y) = y-3$ και $Q(x,y) = x+8$. Επίσης:

$$\frac{\partial P(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x} = 1,$$

για κάθε $(x,y)\in \mathbf{D}$.

Επομένως, από το Θεώρημα 3 συνάγεται ότι το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα του διανυσματικού πεδίου $\mathbf{f}$ επί του $\mathbf{D}$ είναι ανεξάρτητο από το δρόμο ολοκλήρωσης.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Δίνεται η καμπύλη

$$c : \begin{cases} x = 3\text{συν}t \\ y = 3\text{ημ}t \\ z = \frac{1}{3}t, \ t \in [0, 2\pi]. \end{cases}$$

Να βρεθεί το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα πρώτου είδους της $f(x,y,z) = x^2y^2 + z^2$.

2. Δίνεται η καμπύλη

$$c : \begin{cases} x = 2\text{συν}t \\ y = 2\text{ημ}t \\ z = 2t, \ t \in [0, 2\pi]. \end{cases}$$

Να βρεθεί το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα πρώτου είδους της $f(x,y,z) = x^2 + y^2$.

3. Δίνεται η καμπύλη

$$c : \begin{cases} x = 3t^3 \\ y = 3t^2 \\ z = 5t, \ t \in [0, 1]. \end{cases}$$

Να βρεθεί το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα δευτέρου είδους του διανυσματικού πεδίου $\mathrm{f}(x,y,z) = (x+y, y, z+y)$.

4. Δίνεται η καμπύλη

$$c : \begin{cases} x = t^2 \\ y = t^3 \\ z = -6t, \ t \in [0, 1]. \end{cases}$$

Να βρεθεί το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα δευτέρου είδους του διανυσματικού πεδίου $\mathrm{f}(x,y,z) = (x^2 + y, xy, z - y^3)$.

5. Δίνεται η καμπύλη

$$c : \begin{cases} x = t \\ y = 2t^2, \ t \in [-2, 1]. \end{cases}$$

Να βρεθεί το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα πρώτου είδους της $f(x,y) = x^2 + y + x$.

6. Δίνεται η καμπύλη

$$c : \begin{cases} x = t \\ y = 4t^2, \ t \in [-3, 2]. \end{cases}$$

Να βρεθεί το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα δευτέρου είδους του διανυσματικού πεδίου $\mathrm{f}(x,y) = (x + y, x^2 + y^2)$.

7. Δίνεται η καμπύλη

$$c : \begin{cases} x = t \\ y = 2t^2 \\ z = -6t^3, \ t \in [0, 1]. \end{cases}$$

Να βρεθεί το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα δευτέρου είδους του διανυσματικού πεδίου $\mathrm{f}(x,y,z) = (x, y - z, x - z)$.

8. Δίνεται η καμπύλη

$$c : \begin{cases} x = t \\ y = 3t^3, \ t \in [0, 2]. \end{cases}$$

Να βρεθεί το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα δευτέρου είδους του διανυσματικού πεδίου $\mathrm{f}(x,y) = (x + y^2, 3xy)$.

9. Βρείτε το μήκος της καμπύλης

$$y = x^2 + 4$$

από το $x = 0$ μέχρι το $x = 1$.

10. Να βρεθεί το μήκος της καμπύλης:

$$c : \begin{cases} x = t - 1 \\ y = 2t \\ z = 3t, \ t \in [1, 2]. \end{cases}$$