Μαθημα 1ο – Απειροστικός Λογισμος ΙΙ
Αόριστα Ολοκληρώματα

Ενα απο τα βασικά προβλήματα του Διαφορικού Λογισμού ειναι η εύρεση της παραγώγου μιας συνάρτησης.
Στον ολοκληρωτικό Λογισμό το βασικό προβλημα ειναι ακριβώς το αντίστροφο. Δηλαδή η εύρεση της συναρτησης οταν γνωρίζουμε τη παραγωγό της.

<u>Ορισμός 1</u> Εστω Δ διάστημα και $f:\Delta\to\mathbb{R}$ συνάρτηση. Μια συνάρτηση $F:\Delta\longrightarrow\mathbb{R}$ καλείται παραγουσα ή αρχική συναρτηση της f στο Δ οταν η F ειναι παραγωγίσιμη στο Δ και αληθεύει οτι

$$F'(x)=f(x), \text{ για κάθε } x\in\Delta.$$

<u>Παράδειγματα</u>

(1) Η συναρτηση $F(x)=\frac{x^3}{3}+10$, $x\in[0,1]$ ειναι παραγουσα της $f(x)=x^2$ στο $[0,1]$.
- Η F ειναι παραγωγίσιμη στο $[0,1]$
- $F'(x)=\left(\frac{x^3}{3}+10\right)'=\frac{\cancel{3}x^2}{\cancel{3}}+0=x^2$, $\forall x\in[0,1]$.

(2) Η $F(x)=\ln x$, $x\in(0,+\infty)$ ειναι παράγουσα της $f(x)=\frac{1}{x}$ στο $(0,+\infty)$
- Η F ειναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$
- $F'(x)=(\ln x)'=\frac{1}{x}$, $\forall x\in(0,+\infty)$.

<u>Ερώτηση</u> Έχουν όλες οι συναρτήσεις παράγουσα?

<u>Απάντηση</u> ΟΧΙ

Υπάρχουν συναρτήσεις που δεν έχουν παράγουσα!

<u>Παράδειγμα</u> Θεωρούμε τη συνάρτηση $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ με τύπο

$$f(x)=\begin{cases}0, & x\in[0,1)\\ 2, & x=1\end{cases}$$

Η f δεν έχει παράγουσα στο $[0,1]$.

Πράγματι, έστω ότι F είναι μια παράγουσα της f στο $[0,1]$. Δηλαδή F είναι μια συνάρτηση παραγωγίσιμη στο $[0,1]$ και τ.ω. $F'(x)=f(x)$, για κάθε $x\in[0,1]$. Θα καταλήξουμε σε άτοπο.

Παρατηρούμε ότι:

α) F συνεχής στο $[0,1]$ (ως παραγωγίσιμη στο $[0,1]$)

β) $F'(x)=f(x)=0$, για κάθε $x\in(0,1)$

Οπότε από γνωστή πρόταση του Διαφορικού Λογισμού

"Έστω Δ διάστημα, $f:\Delta\to\mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση και $f'(x)=0$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ. Τότε η f είναι σταθερή στο Δ. Δηλαδή $\exists$ πραγματική σταθερά c τ.ω. $f(x)=c$, για κάθε $x\in\Delta$" (Πρόταση 9.1.1 Βιβλίου)

Συνεπώς υπάρχει πραγματικός αριθμός c τέτοιος ώστε $F(x)=c$ για κάθε $x\in[0,1]$.

Επομένως $F'(x)=0$, $\forall x\in[0,1]$. Άτοπο αφού $F'(1)=f(1)=2\neq 0$!!!

Σχολιο

Οι συνεχεις συναρτησεις σ'ενα διαστημα Δ του $\mathbb{R}$ εχουν παραγουσα.
Την αποδειξη αυτου θα την δουμε στα ορισμενα ολοκληρωματα.

Προταση 1 Εστω Δ διαστημα, $f: \Delta \to \mathbb{R}$ και F παραγουσα της f στο Δ. Μια συναρτηση $G: \Delta \to \mathbb{R}$ ειναι παραγουσα της f στο $\Delta \Longleftrightarrow$ οταν υπαρχει πραγματικος αριθμος c τετοιος ωστε

$$G(x) = F(x) + c, \text{ για καθε } x \in \Delta.$$

Αποδειξη $\Leftarrow$ Εστω $G: \Delta \to \mathbb{R}$ με τυπο $G(x) = F(x) + c$, για καθε $x \in \Delta$.
Αποδεικνυουμε οτι η G ειναι παραγουσα της f στο Δ. Πραγματι, εχουμε

α) Η G παραγωγισιμη στο Δ (διοτι η F ειναι παραγωγισιμη στο Δ).

β) $G'(x) = (F(x) + c)' = F'(x) + (c)' = f(x)$, για καθε $x \in \Delta$.

$\Rightarrow$ Εστω $G: \Delta \to \mathbb{R}$ παραγουσα της f στο Δ. Τοτε η G παραγωγισιμη στο Δ και $G'(x) = f(x)$, για καθε $x \in \Delta$. Θεωρουμε τη συναρτηση $H: \Delta \to \mathbb{R}$ με τυπο $H(x) = G(x) - F(x)$, $x \in \Delta$. Παρατηρουμε οτι η H ειναι παραγωγισιμη στο Δ και

$H'(x) = (G(x) - F(x))' = G'(x) - F'(x) = f(x) - f(x) = 0$, για καθε $x \in \Delta$. Οποτε υπαρχει σταθερα c τ.ω. $H(x) = c$, για καθε $x \in \Delta$ ή ισοδυναμα $G(x) - F(x) = c$, για καθε $x \in \Delta$ ή ισοδυναμα $G(x) = F(x) + c$, για καθε $x \in \Delta$.

__Σχόλιο__. Η πρόταση 1 δεν αληθεύει αν το Δ δεν είναι διάστημα!!!
Πράγματι, έστω $\Delta = [0,1] \cup [2,3]$ και
$f: \Delta \to \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = 2x, \forall x \in \Delta$.
Θεωρούμε τις συναρτήσεις

$F: \Delta \to \mathbb{R}$ με τύπο $F(x) = x^2$

$G: \Delta \to \mathbb{R}$ με τύπο $G(x) = \begin{cases} x^2, & x \in [0,1] \\ x^2+5, & x \in [2,3] \end{cases}$

Παρατηρούμε ότι

$$F'(x) = (x^2) = 2x, \quad \forall x \in \Delta$$

και

$$G'(x) = 2x, \quad \forall x \in \Delta$$

ΑΛΛΑ

$$G(x) - F(x) = \begin{cases} 0, & \text{αν } x \in [0,1] \\ 5, & \text{αν } x \in [2,3] \end{cases}$$

Οπότε δεν υπάρχει πραγματικός αριθμός c τ.ω.

$$G(x) = F(x) + c, \quad \forall x \in \Delta = [0,1] \cup [2,3]$$

Ορισμός του Αορίστου ολοκληρώματος

Έστω Δ διάστημα του $\mathbb{R}$ και $f:\Delta \to \mathbb{R}$

- Το σύνολο όλων των παραγουσών της f στο Δ καλείται αόριστο ολοκλήρωμα της f στο Δ και συμβολίζεται ως

$$\int f(x)\,dx$$

- Υπάρχει περίπτωση $\int f(x)\,dx = \emptyset$ ή $\int f(x)\,dx \neq \emptyset$

Όταν το $\int f(x)\,dx \neq \emptyset$, τότε λέμε ότι η συνάρτηση f έχει αόριστο ολοκλήρωμα στο Δ.

ΣΥΜΒΟΛΙΣΜΟΣ Έστω Δ διάστημα και $f:\Delta \to \mathbb{R}$.

Τότε $\boxed{\int f(x)dx = \{F + c : c \in \mathbb{R}\}}$, όπου F παράγουσα της f στο Δ.

Έχει επικρατήσει συμβολικά να γράφουμε

$$\int f(x)\,dx = F(x) + c,\ c \in \mathbb{R}$$

ή

$$\int f(x)\,dx = F(x) + c$$

Παραδείγματα

(1) $\int \text{συν}x\, dx = \text{ημ}x + c$

διότι $(\text{ημ}x)' = \text{συν}x,\ x \in \mathbb{R}$

(2) $\int x^2 dx = \frac{x^3}{3} + c$

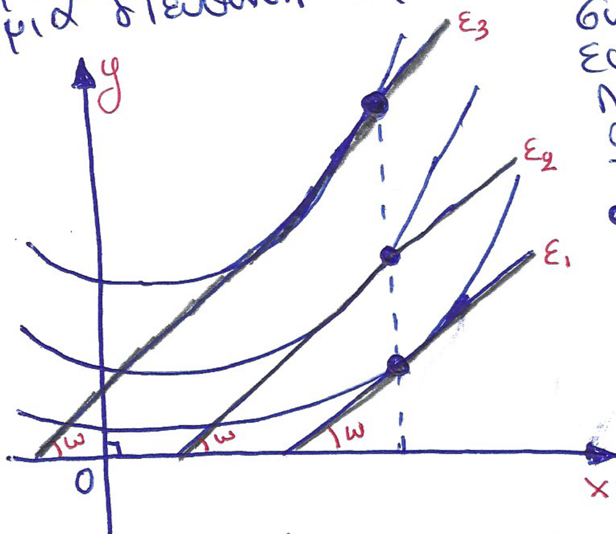
διότι $\left(\frac{x^3}{3}\right)' = \frac{1}{3}(x^3)' = \frac{1}{\cancel{3}} \cdot \cancel{3}x^2 = x^2,\ x \in \mathbb{R}$

Γεωμετρική Ερμηνεία του Αορίστου Ολοκληρώματος

- Έστω Δ διάστημα, $f: \Delta \to \mathbb{R}$ συνάρτηση και $F: \Delta \to \mathbb{R}$ παράγουσα της f στο Δ. Τότε

$$\int f(x)dx = F(x) + c,\quad c \in \mathbb{R}$$

- Θεωρούμε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $F+c$, $c \in \mathbb{R}$. Οι γραφικές παραστάσεις αυτών προκύπτουν με μετακίνηση της γραφικής παράστασης της F κατά μια διεύθυνση παράλληλη του άξονα Oy. Στη συνέχεια φέρουμε τις εφαπτόμενες στις γραφικές παραστάσεις στα σημεία αυτών με την ίδια τετμημένη x.



- Για κάθε $c \in \mathbb{R}$ $(F(x)+c)' = f(x)$

Οπότε ο συντελεστής διεύθυνσης όλων αυτών των εφαπτομένων είναι $f(x)$. Δηλαδή οι εφαπτόμενες (βλέπε $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$) έχουν την ίδια κλίση και επομένως είναι παράλληλες

Μαθημα 2ο

Αόριστα Ολοκληρώματα

Υπενθυμίζουμε ότι ...

(1) Έστω Δ διάστημα και $f:\Delta \to \mathbb{R}$ συνάρτηση

Μια συνάρτηση $F:\Delta \to \mathbb{R}$ καλείται παράγουσα της f στο Δ όταν η F είναι παραγωγίσιμη στο Δ και ισχύει ότι $F'(x)=f(x)$, $\forall x \in \Delta$

π.χ. Αν $f(x)=3^x$, $x\in\mathbb{R}$, τότε η $F(x)=\frac{3^x}{\ln 3}$, $x\in\mathbb{R}$ είναι παράγουσα της f στο $\mathbb{R}$ διότι

$$F'(x)=\left(\frac{3^x}{\ln 3}\right)'=3^x\cdot \ln 3\cdot \frac{1}{\ln 3}=3^x,\ \forall x\in\mathbb{R}$$

(2) Έστω Δ διάστημα του $\mathbb{R}$, $f:\Delta\to\mathbb{R}$ και $F:\Delta\to\mathbb{R}$ παράγουσα της f στο Δ. Τότε μια συνάρτηση $G:\Delta\to\mathbb{R}$ είναι παράγουσα της f στο Δ $\Longleftrightarrow$ όταν υπάρχει πραγματικός αριθμός c τέτοιος ώστε $G(x)=F(x)+c$, για κάθε $x\in\Delta$.

<u>ΠΡΟΣΟΧΗ</u> <u>Δ διάστημα</u> στην υπόθεση είναι ΣΗΜΑΝΤΙΚΟ
Δεν αληθεύει γενικά το (2) αν το Δ δεν είναι διάστημα.

(3) Έστω Δ διάστημα του $\mathbb{R}$ και $f:\Delta\to\mathbb{R}$. Το σύνολο όλων των παραγουσών της f στο Δ καλείται αόριστο ολοκλήρωμα της f στο Δ και συμβολίζεται με

$$\int f(x)\,dx.$$

- Υπάρχει περίπτωση μια συνάρτηση f να μην έχει παράγουσα στο Δ. Οπότε $\int f(x)\,dx=\emptyset$
- Αν όμως το σύνολο $\int f(x)\,dx\neq\emptyset$, τότε λέμε ότι η συνάρτηση f έχει αόριστο ολοκλήρωμα στο Δ.

Σημειώνουμε ότι με βάση το (2) ότι αν $F:\Delta\to\mathbb{R}$ παράγουσα της f στο Δ, τότε

$$\int f(x)\,dx=\{F+c : c\in\mathbb{R}\}$$

Σε ότι ακολουθεί θα γράφουμε απλά $\int f(x)\,dx=F(x)+c$.

Αόριστα ολοκληρώματα που πρέπει να γνωρίζω

$$\int 1\,dx = x + c$$

$$\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + c$$

$$\int \frac{1}{x^2}\,dx = -\frac{1}{x} + c$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = 2\sqrt{x} + c$$

$$\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c \,, \quad n = 1, 2, \ldots$$

$$\int \alpha^x\,dx = \frac{\alpha^x}{\ln\alpha} + c \,, \quad \alpha > 0 \text{ και } \alpha \neq 1$$

$$\int \eta\mu x\,dx = -\sigma\upsilon\nu x + c$$

$$\int \sigma\upsilon\nu x\,dx = \eta\mu x + c$$

$$\int \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}\,dx = \varepsilon\varphi x + c$$

$$\int \frac{1}{\eta\mu^2 x}\,dx = -\sigma\varphi x + c$$

Βασικές Ιδιότητες

① $\int k f(x) + \lambda g(x)\,dx = k\int f(x)\,dx + \lambda\int g(x)\,dx$

② $\int f'(x) g(x)\,dx = f(x) g(x) - \int f(x) g'(x)\,dx$

Προσοχή! Για την ② έπρεπε κανονικά να γράφω

$$\int f'(x)\,g(x)\,dx = \{f\cdot g\} - \int f(x)\,g'(x)\,dx \quad !!$$

Δυο λογια για το διαφορικό

- Εστω Δ διάστημα του $\mathbb{R}$ και $f:\Delta \to \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη συναρτηση. Η συναρτηση $df: \Delta\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με τύπο $df(x,h) = f'(x)\cdot h$, $\forall (x,h) \in \Delta\times\mathbb{R}$ καλείται διαφορικό της f.

  Εχει επικρατήσει στη θεση του $df(x,h)$ να γραφουμε df ή $df(x)$ ή dy. Οποτε ο παραπανω τύπος γινεται:

  $$df = f'(x)\cdot h \quad \text{ή} \quad dy = f'(x)\cdot h \quad \text{ή} \quad df(x) = f'(x)\, h$$

  Επισης στη θεση της μεταβλητής h συνήθως θετουμε dx. Οποτε ο τυπος γινεται π.χ. $dy = f'(x)\cdot dx$.

- Παρακαλώ να διαβαστούν οι σελίδες 303 και 304 απο το βιβλίο.

ΜΕΘΟΔΟΙ ΟΛΟΚΛΗΡΩΣΗΣ

● Να διαβαστούν από το βιβλίο οι σελίδες 395 έως 497
Επίσης οι σελίδες 303 και 304.

1η Μέθοδος Εφαρμογή της Γραμμικής Ιδιότητας

$$\int (k_1 f_1(x)+k_2 f_2(x)+\dots+k_m f_m(x))\,dx = k_1\int f_1(x)\,dx + k_2\int f_2(x)\,dx+\dots+k_m\int f_m(x)\,dx$$

π.χ.1 Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα

$\int (5\cdot \sigma\upsilon\nu x + 3e^{2x} + 8x^3)dx = 5\int \sigma\upsilon\nu x + 3\int e^{2x}dx + 8\int x^3 dx =$

$5\cdot \eta\mu x + 3\cdot \dfrac{e^{2x}}{2} + 8\dfrac{x^4}{4} + c$

π.χ.2 $\displaystyle\int \frac{4}{1+x^2} + \frac{3}{\sqrt{x}}\,dx = 4\int \frac{1}{1+x^2}dx + 3\int \frac{1}{\sqrt{x}}dx$

$= 4\,\tau o\xi\varepsilon\varphi x + 3\cdot 2\cdot \sqrt{x} + c$

π.χ.3. $\displaystyle\int \frac{2}{\sigma\upsilon\nu^2 x} + \frac{7}{\eta\mu^2 x}\,dx = 2\int \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}dx + 7\int \frac{1}{\eta\mu^2 x}dx$

$= 2\,\varepsilon\varphi x + 7(-\sigma\varphi x) + c$

2η Μέθοδος Ολοκλήρωση με αντικατάσταση

$$\int f(\varphi(x))\,\varphi'(x)\,dx \xrightarrow[dy=\varphi'(x)dx]{y=\varphi(x)} \int f(y)\,dy = \dots = F(y)+c = F(\varphi(x))+c,$$

όπου F συνάρτηση τ.ω. $F'(y)=f(y)$.

π.χ.1 $\displaystyle\int e^{2x+5}dx \xrightarrow[dy=(2x+5)'dx=2dx]{y=2x+5} \int e^y \frac{1}{2}dy = \frac{1}{2}\int e^y dy = \frac{1}{2}e^y + c$

$= \dfrac{1}{2}e^{2x+5} + c.$

π.χ.2 $\displaystyle\int \sigma\upsilon\nu(7x+6)\,dx \xrightarrow[dy=(7x+6)'dx=7dx]{y=7x+6} \int \sigma\upsilon\nu y\cdot \frac{1}{7}dy$

$= \dfrac{1}{7}\int \sigma\upsilon\nu y\,dy = \dfrac{1}{7}\eta\mu y + c = \dfrac{1}{7}\eta\mu(7x+6) + c.$

π.χ.3 $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{2x+3}}dx \xrightarrow[dy=(2x+3)'dx=2dx]{y=2x+3} \int \frac{1}{\sqrt{y}}\cdot\frac{1}{2}dy = \frac{1}{2}\int \frac{1}{\sqrt{y}}dy$

$= \dfrac{1}{2}\cdot 2\sqrt{y} + c = \sqrt{y} + c = \sqrt{2x+3} + c.$

$\boxed{\text{3η Μέθοδος}}$ Ολοκλήρωση κατά παράγοντες

$$\int f'(x)g(x)\,dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)\,dx$$

<u>π.χ.1</u> $\int \ln x\,dx = \int 1\cdot \ln x\,dx = \int (x)'\ln x\,dx = x\ln x - \int x(\ln x)'dx$
$= x\ln x - \int x\frac{1}{x}dx = x\ln x - \int 1\,dx = x\ln x - x + c.$

<u>π.χ.2</u> $\int x e^x dx = \int x(e^x)'dx = x\cdot e^x - \int (x)'e^x dx = xe^x - \int e^x dx$
$= xe^x - e^x + c.$

<u>π.χ.3</u> $\int x\,\sigma\upsilon\nu x\,dx = \int x\cdot(\eta\mu x)'dx = x\cdot\eta\mu x - \int (x)'\eta\mu x\,dx$
$= x\cdot\eta\mu x - \int \eta\mu x\,dx = x\,\eta\mu x - (-\sigma\upsilon\nu x) + c = x\,\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x + c$

<u>π.χ.4</u> $\int x\cdot 5^x dx = \int x\left(\frac{5^x}{\ln 5}\right)'dx = x\cdot\frac{5^x}{\ln 5} - \int (x)'\frac{5^x}{\ln 5}dx$
$= x\cdot\frac{5^x}{\ln 5} - \frac{1}{\ln 5}\int 5^x dx = x\cdot\frac{5^x}{\ln 5} - \frac{1}{\ln 5}\cdot\frac{5^x}{\ln 5} + c.$

$\boxed{\text{4η Μέθοδος}}$ Ολοκλήρωση Πολυωνυμικών συναρτήσεων

$$\int(\alpha_n x^n + \dots + \alpha_1 x + \alpha_0)dx = \alpha_n\int x^n dx + \dots + \alpha_1\int x\,dx + \alpha_0\int 1\,dx$$
$$= \alpha_n\frac{x^{n+1}}{n+1} + \dots + \alpha_1\frac{x^2}{2} + \alpha_0 x + c$$

<u>π.χ.1</u> $\int 5x^{10} + 3x^2 + 7\,dx = 5\int x^{10}dx + 3\int x^2 dx + 7\int 1\,dx$
$= 5\frac{x^{11}}{11} + 3\frac{x^3}{3} + 7x + c$

<u>π.χ.2</u> $\int (5x+2)^3 + (5x+2)^2 + 10\,dx \xrightarrow[dy=(5x+2)'dx=5dx]{y=5x+2} \int(y^3+y^2+10)\frac{1}{5}dy$
$= \int y^3\cdot\frac{1}{5}dy + \int y^2\cdot\frac{1}{5}dy + \int 10\cdot\frac{1}{5}dy = \frac{1}{5}\int y^3 dy + \frac{1}{5}\int y^2 dy + 2\int 1\,dy$
$= \frac{1}{5}\frac{y^4}{4} + \frac{1}{5}\frac{y^3}{3} + 2y + c = \frac{1}{20}(5x+2)^4 + \frac{1}{15}(5x+2)^3 + 2(5x+2) + c$

Ασκήσεις με υπόδειξη (ΠΡΟΣΠΑΘΩ ΜΟΝΟΣ)

① $\int \frac{x^2+3x-2}{\sqrt{x}}\,dx = \int \frac{x^2}{\sqrt{x}} + 3\frac{x}{\sqrt{x}} - 2\frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$

$= \int \frac{x^2}{x^{1/2}} + 3\cdot\frac{x}{x^{1/2}} - 2\int\frac{1}{x^{1/2}}\,dx = \dots$

② $\int\left(2e^x + \frac{6}{x} + \ln 2\right)dx = 2\int e^x dx + 6\int \frac{1}{x}dx + \ln 2\int 1\,dx$

$= \dots$

③ $\int x e^{x^2} dx \;\frac{y=x^2}{dy=2x\,dx}\; \int e^y\cdot\frac{1}{2}\,dy = \frac{1}{2}\int e^y\,dy = \dots$

④ $\int \frac{2x^4}{x^5+1}\,dx \;\frac{y=x^5+1}{dy=5x^4dx}\; \int \frac{2}{y}\cdot\frac{1}{5}\,dy = \frac{2}{5}\int\frac{1}{y}\,dy$

$= \dots$

⑤ $\int \frac{1}{x\ln x}\,dx \;\frac{y=\ln x}{dy=\frac{1}{x}dx}\; \int \frac{1}{y}\,dy = \dots$

⑥ $\int \frac{1}{5x+2}\,dx \;\frac{y=5x+2}{dy=5dx}\; \int\frac{1}{y}\cdot\frac{1}{5}\,dy = \frac{1}{5}\int\frac{1}{y}\,dy$

$= \dots$

⑦ $\int (x+1)(x-2)^9\,dx \;\frac{y=x-2}{dy=dx}\; \int (y+3)\cdot y^9\,dy$

$= \int y^{10} + 3y^9\,dy = \int y^{10}dy + 3\int y^9 dy$

⑧ $\int \eta\mu^5 x\cdot \sigma\upsilon\nu x\,dx \;\frac{y=\eta\mu x}{dy=\sigma\upsilon\nu x\,dx}\; \int y^5 dy = \dots$

Ασκήσεις για εξάσκηση (ΠΡΟΣΠΑΘΩ ΜΟΝΟΣ)

ΑΣΚΗΣΗ 1 Να υπολογισθούν τα ολοκληρώματα

α) $\int 2^{5x+8}\,dx$ β) $\int \eta\mu(3x+1)\,dx$

γ) $\int \ln(7x+3)\,dx$ δ) $\int \frac{1}{5x+3}\,dx$

Υπόδειξη Εφαρμογή της 2ης Μεθόδου

ΑΣΚΗΣΗ 2 Να υπολογισθούν τα ολοκληρώματα

α) $\int x^2 e^x\,dx$, β) $\int x\,\eta\mu x\,dx$ γ) $\int x\cdot 8^{5x}\,dx$

δ) $\int 5x^7+6x^3+2\,dx$ δ) $\int 4x^7+2x^3+5x+8\,dx$

Υπόδειξη α, β, γ εφαρμογή της 3ης μεθόδου.
δ, ε εφαρμογή της 4ης μεθόδου