Δημητρης Γεωργιου
Σταυρος Ηλιαδης
Θανασης Μεγαριτης

ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ

Ιστορική Ανασκόπηση και Βιβλιογραφία

ΠΑΤΡΑ

Εισαγωγή

Από αρχαιολογικά ευρήματα συμπεραίνεται ότι αρκετές χιλιάδες χρόνια π.Χ. οι άνθρωποι χρησιμοποιούσαν στην καθημερινότητά τους την πρόσθεση, την αφαίρεση και τη διαίρεση.

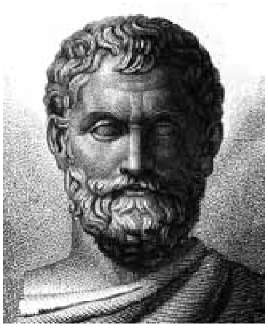
Στη Μεσοποταμία από το 4000 π.Χ. και έπειτα κυριάρχησαν πολλοί λαοί όπως για παράδειγμα οι Σουμέριοι και οι Ακκάδιοι που ανέπτυξαν σημαντικό πολιτισμό. Ο Χαμμουραμπί (1792-1750 π.Χ.) βασιλιάς της πόλης Βαβέλ κατάκτησε τους Σουμέριους και Ακκάδιους και ίδρυσε την πρώτη βαβυλωνιακή δυναστεία. Γενικά, τον πολιτισμό που αναπτύχθηκε στη Μεσοποταμία από το 2000 π.Χ. έως το 600 π.Χ. τον καλούμε βαβυλωνιακό πολιτισμό. Μεγάλη συμβολή στην ανάπτυξη του πολιτισμού αυτού έπαιξε και το γεγονός ότι αναπτύχθηκε σε μια εύφορη και πλούσια περιοχή, τη Μεσοποταμία, που βρισκόταν μεταξύ των ποταμών Τίγρη και Ευφράτη. Η επιτυχία των Βαβυλωνίων στην Άλγεβρα είναι αξιοθαύμαστη. Ασχολήθηκαν όμως και με πολλά γεωμετρικά προβλήματα και όπως φαίνεται από τα ευρήματα των ανασκαφών, γνώριζαν ακόμη και το γνωστό μας *Πυθαγόρειο Θεώρημα.*

Οι Αιγύπτιοι ασχολήθηκαν κυρίως με γεωμετρικές κατασκευές, υπολογισμούς εμβαδών και όγκων. Είναι επίσης γνωστό ότι χρησιμοποιούσαν σύστημα αρίθμησης με βάση το 10.

Η μεγάλη όμως ανάπτυξη των μαθηματικών και ειδικότερα της γεωμετρίας έγινε στην Αρχαία Ελλάδα. Αναφέρουμε εδώ μόνο μερικά γνωστά ονόματα όπως ο Θαλής (624-547 π.Χ.), ο Πυθαγόρας (569-475 π.Χ.), ο Ιπποκράτης (470-410 π.Χ.), ο Πλάτωνας (427-347 π.Χ.), ο Εύδοξος (408-355 π.Χ.), ο Αριστοτέλης (384-322 π.Χ.), ο Ευκλείδης (325-265 π.Χ.), ο Αρχιμήδης (287-212 π.Χ.), ο Απολλώνιος (262-190 π.Χ.), ο Ερατοσθένης (276-194 π.Χ.), ο Ήρωνας (10-75 μ.Χ.), ο Διόφαντος (200-284 μ.Χ.), ο Πτολεμαίος (85-165 μ.Χ.), ο Πάππος (290-350 μ.Χ.), η Υπατία (370-415 μ.Χ.) και άλλοι.

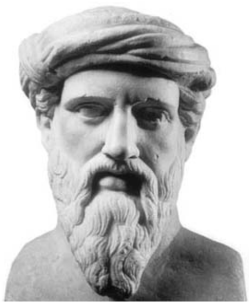
Ο **Θαλής ο Μιλήσιος** έχει αποδείξει πολλά θεωρήματα όπως για παράδειγμα: *Οι παρά τη βάση γωνίες ενός ισοσκελούς τριγώνου είναι ίσες.* Αν και τα θεωρήματα αυτά με τα σημερινά δεδομένα φαίνονται απλά, είναι η πρώτη φορά που έγινε προσπάθεια να γραφούν κάποιες λογικές προτάσεις και στη συνέχεια να αποδειχθεί η αλήθεια αυτών.

Ο **Πυθαγόρας ο Σάμιος** μαζί με τους πολλούς μαθητές που



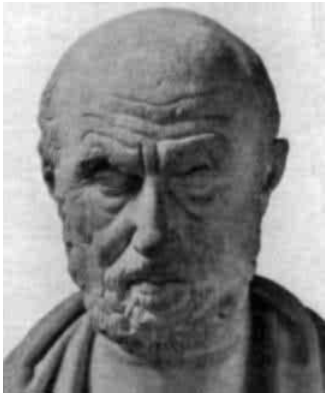
Θαλής (624-547 π.Χ.)

είχε πραγματοποίησε, εκτός των άλλων, σημαντικές μελέτες πάνω σε γεωμετρικά προβλήματα. Αυτό που χαρακτηρίζει τους Πυθαγόρειους είναι η σύνδεση της μελέτης της γεωμετρίας με αριθμούς. Αναφέρουμε για παράδειγμα το γνωστό θεώρημα του Πυθαγόρα: *Το τετράγωνο της υποτείνουσας ενός ορθογωνίου τριγώνου ισούται με το άθροισμα των τετραγώνων των δύο καθέτων πλευρών του τριγώνου.*



Πυθαγόρας (569-475 π.Χ.)

Ο **Ιπποκράτης ο Χίος** θεωρείται ότι είναι ο πρώτος μαθηματικός που έγραψε διδακτικό βιβλίο γεωμετρίας. Ασχολήθηκε με δύσκολα για την εποχή του προβλήματα. Γνωστοί είναι οι *μηνίσκοι του Ιπποκράτη*, όπως επίσης και η εργασία του πάνω στο πρόβλημα του διπλασιασμού του κύβου. Δηλαδή του προβλήματος να κατασκευαστεί ένας κύβος που να έχει διπλάσιο όγκο από δοσμένο κύβο. Αν και ο Ιπποκράτης δεν έλυσε το πρόβλημα αυτό, συνέβαλε όμως με τις μελέτες του στη λύση αυτού του προβλήματος, που έδωσε ο Μέναιχμος, δάσκαλος του Μεγάλου Αλεξάνδρου. Η λύση αυτή βασίστηκε σε καινούργιες έννοιες όπως της υπερβολής και παραβολής. Λύση στο πρόβλημα αυτό έδωσε αργότερα και ο Πλάτωνας. Οι δύο αυτές λύσεις δεν στηρίχθηκαν πάνω σε κανόνα και διαβήτη.



Ιπποκράτης (470-410 π.Χ.)

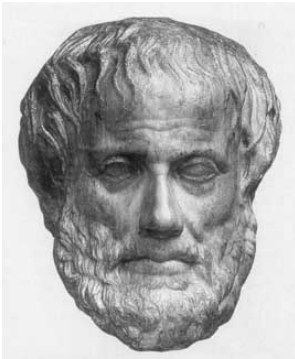
Ο **Πλάτωνας ο Αθηναίος** θεωρείται ότι με το λόγο του καθοδηγούσε και ενέπνεε την ανάπτυξη της μαθηματικής επιστήμης. Επάνω από τις πόρτες της σχολής του υπήρχε η επιγραφή:

«ΟΥΔΕΙΣ ΑΓΕΩΜΕΤΡΗΤΟΣ ΕΙΣΙΤΩ»

Πλάτωνας (427-347 π.Χ.)

Ο **Εύδοξος ο Κνίδιος**, σύμφωνα με τον Αρχιμήδη, παρουσίασε το λήμμα που φέρει σήμερα το όνομα του Αρχιμήδη (μερικές φορές ονομάζεται και **Αξίωμα της συνέχειας**).

Ο **Αριστοτέλης**, δάσκαλος και αυτός του Μεγάλου Αλεξάνδρου, απαιτούσε την απόδειξη ύπαρξης κάθε αντικειμένου που ορίζουμε. Ωστόσο, επειδή δεν είναι δυνατό να αποδειχθεί η ύπαρξη θεμελιωδών εννοιών όπως για παράδειγμα των σημείων, ο Αριστοτέλης θεωρούσε ότι πρέπει για κάθε έννοια να υπάρχουν αποφάνσεις που να εκφράζουν την ύπαρξη αυτής της έννοιας όπως για παράδειγμα *υπάρχουν σημεία* και *υπάρχουν ευθύγραμμα τμήματα.*



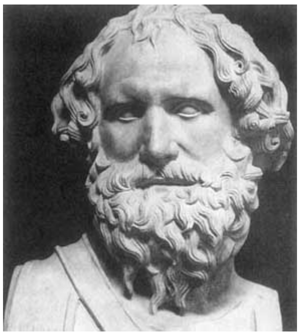
Αριστοτέλης (384-322 π.Χ.)

Για τον **Ευκλείδη** λίγα είναι γνωστά. Ζούσε στην Αλεξάνδρεια την εποχή του Πτολεμαίου του 1ου και δίδασκε στο εκεί ονομαστό ίδρυμα που λεγόταν **Μουσείο**. Το πρωτότυπο έργο του δεν σώζεται. Το πιο γνωστό παλαιό αντιγραμμένο κείμενο **Τα Στοιχεία του Ευκλείδη** είναι του 1ου αιώνα μ.Χ. και αποτελείται από 13 βιβλία.

Ο **Αρχιμήδης ο Συρακούσιος** ασχολήθηκε, εκτός των άλλων, με τη μελέτη εμβαδών, όγκων και κέντρων βαρών. Μια ενδιαφέρουσα εργασία αυτού έχει τίτλο *τετραγωνισμός παραβολής*. Στην εργασία αυτή χρησιμοποιεί άπειρο άθροισμα προκειμένου να υπολογίσει το εμβαδόν που περικλείει μια παραβολή. Θεωρείται ότι η εργασία αυτή αποτελεί τον πρόδρομο για την ανάπτυξη του Ολοκληρωτικού Λογισμού.

Στον **Ερατοσθένη** αποδίδεται ο προσδιορισμός της περιφέρειας της γής. Το *κόσκινο του Ερατοσθένη* είναι μία απλή μέθοδος για την εύρεση πρώτων αριθμών.

Ευκλείδης (325-265 π.Χ.)



Αρχιμήδης (287-212 π.Χ.)

Ερατοσθένης (276-194 π.Χ.)

Ο **Πτολεμαίος** είναι γνωστός για τις επιδόσεις του στην αστρονομία.

Πτολεμαίος (85-165 μ.Χ.)

Ο **Ήρωνας ο Αλεξανδρινός** έδωσε τον τύπο υπολογισμού του εμβαδού ενός τριγώνου με βάση το μήκος των πλευρών του:

$$E = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)},$$

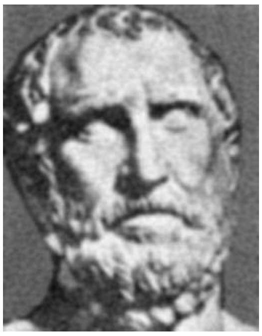
όπου a, b, c τα μήκη των πλευρών του τριγώνου και $s = \dfrac{a+b+c}{2}$.

Ήρωνας (10-75 μ.Χ.)

Ο **Απολλώνιος ο Περγαίος** ασχολήθηκε με τις κωνικές τομές. Ενώ ο **Πάππος ο Αλεξανδρινός** ασχολήθηκε με το πρόβλημα της τριχοτόμησης της γωνίας και τη μελέτη καμπύλων.

Απολλώνιος (262-190 π.Χ.)

Η έννοια του απείρου εμφανίζεται στην αρχαία Ελλάδα και απετέ- λεσε πηγή έμπνευσης για τα παράδοξα του **Ζήνωνα** (490-425 π.Χ.). Το πιο γνωστό από αυτά είναι του Αχιλλέα και της χελώνας. Σύμφωνα με αυτό *ο Αχιλλέας δεν μπορεί να φτάσει ποτέ μία χελώνα που προπορεύεται εμπρός του.* Όταν ο Αχιλλέας φτάσει στο σημείο από το οποίο ξεκίνησε η χελώνα, η χελώνα θα έχει προχωρήσει λίγο και θα έχει διανύσει απόσταση d_1. Διανύοντας ο Αχιλλέας την απόσταση d_1, η χελώνα θα έχει διανύσει την απόσταση d_2. Αυτό το σκεπτικό μπορεί να συνεχιστεί συνέχεια. Οπότε, ο Αχιλλέας δεν θα φτάσει τη χελώνα ποτέ.



Ζήνωνας (490-425 π.Χ.)

Η **Υπατία**, κόρη του μαθηματικού και αστρονόμου **Θέωνα**, υπήρξε νεοπλατωνική φιλόσοφος και ήταν η πρώτη γυναίκα που είχε μια ουσιαστική συμβολή στην ανάπτυξη των μαθηματικών. Δυστυχώς παρότι έγραψε πολλά έργα δεν σώθηκε τίποτα. Υπάρχουν μόνο αναφορές στο έργο της.

Υπατία (370-415 μ.Χ.)

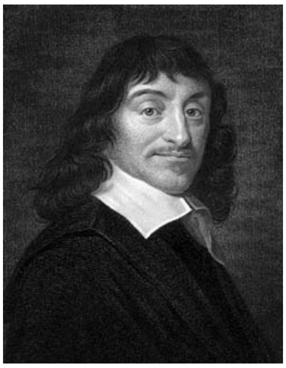
Οι βασικότερες έννοιες της Πραγματικής Ανάλυσης των συναρτήσεων μιας πραγματικής μεταβλητής είναι αυτές της συνάρτησης, της ακολουθίας, του ορίου, της συνέχειας, της παραγώγου και του ολοκληρώματος. Οι επιστήμονες που αναφέρονται παρακάτω συνέβαλαν με τις ιδέες τους και το έργο τους στη μελέτη του τομέα των μαθηματικών που ονομάζουμε σήμερα **Διαφορικό και Ολοκληρωτικό Λογισμό**: Johannes Kepler (1571-1630), Rene Descartes (1596-1650), Pierre Fermat (1601-1665), Sir Isaac Newton (1643-1727), Gottfried Wilhelm von Leibniz (1646-1716), Guillaume de L'Hopital (1661-1704), Johann Bernoulli (1667-1748), Leonhard Euler (1707-1783), Maria Gaetana Agnesi (1718-1799), Joseph-Louis Lagrange (1736-1813), Jean Baptiste Joseph Fourier (1768-1830), Johann Carl Friedrich Gauss (1777-1855), Augustin Louis Cauchy (1789-1857), Karl Theodor Wilhelm Weierstrass (1815-1897), Georg Friedrich Bernhard Riemann (1826-1866), Julius Wilhelm Richard Dedekind (1831-1916), Georg Ferdinand Ludwig Philipp Cantor (1845-1918), Henri Leon Lebesgue (1875-1941) και άλλοι.

Ο **Johannes Kepler** γεννήθηκε στο Weil της Γερμανίας και η συμβολή του στην επιστήμη έχει να κάνει με τους τρεις περίφημους νόμους για την κίνηση των πλανητών. Σημαντική θεωρείται επίσης η προσφορά του στην Οπτική και τη Γεωμετρία.

Ο **Rene Descartes** γεννήθηκε στην πόλη Touraine και εκπαιδεύτηκε σε Κολέγιο Ιησουϊτών στη σχολαστική φιλοσοφία και τις φυσικές επιστήμες. Θεωρείται ο θεμελιωτής της Αναλυτικής Γεωμετρίας, αν και

Johannes Kepler (1571-1630)

οι βασικές έννοιες της Αναλυτικής Γεωμετρίας ήταν γνωστές κα σε άλλους μαθηματικούς της εποχής εκείνης όπως π.χ. στον **Pierre de Fermat**. Μεταξύ των συστημάτων συντεταγμένων, ιδιαίτερη θέση κατέχει το ονομαζόμενο Καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων ή σύστημα συντεταγμένων του Descartes. Το σύστημα αυτό, όπως επίσης και τα θεμέλια της Αναλυτικής Γεωμετρίας έχουν συστηματικά μελετηθεί στο έργο του Γεωμετρία (1637).



René Descartes (1596-1650)

Ο **Pierre de Fermat** γεννήθηκε στη Γαλλία και μελετούσε μόνος του μαθηματικά. Η συμβολή του είναι μεγάλη στην Αναλυτική Γεωμετρία, τον Απειροστικό Λογισμό και τη Θεωρία Αριθμών.

Ο **Isaac Newton**, από τους μεγαλύτερους επιστήμονες και όχι μόνο της Αγγλίας, θεωρείται θεμελιωτής του Απειροστικού και Ολοκληρωτι-

Pierre de Fermat (1601-1665)

κού Λογισμού. Τεράστια είναι η συμβολή του στις φυσικές επιστήμες.

Isaac Newton (1643-1727)

Ο **Gottfried Wilhelm von Leibniz** δημοσίευσε το 1684 το έργο του με τίτλο *Αρχές του Διαφορικού Λογισμού*. Το 1693 όρισε την έννοια της ορίζουσας και ανέπτυξε το δυαδικό σύστημα με τα ψηφία 0 και 1. Θεωρείται μαζί με τον Newton θεμελιωτής του Απειροστικού και Ολοκληρωτικού Λογισμού.

Ο **Guillaume de L'Hopital**, μαθητής του Johannes Bernoulli, θεωρείται ότι είναι ο πρώτος που έγραψε βιβλίο Ανάλυσης. Έγινε γνωστός χάρη του κανόνα για τον υπολογισμό ορίων απροσδιόριστων μορφών: $\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, \cdots$

Η οικογένεια **Bernoulli** είχε μεγάλη παράδοση και προσφορά στα μαθηματικά. Από την οικογένεια αυτή ξεχωρίζει ο **Johann Bernoulli** ο

Gottfried Wilhelm von Leibniz (1646-1716)

Guillaume de L'Hopital (1661-1704)

οποίος έπαιξε σημαντικό ρόλο στην διάδοση του Λογισμού στην Ευρώπη.

Johann Bernoulli (1667-1748)

Ο **Leonhard Euler** γεννήθηκε στην Ελβετία και σπούδασε Μαθηματικά με τον Johann Bernoulli. Μεγάλη θεωρείται η προσφορά του στη Θεωρία Αριθμών, Θεωρία Άπειρων Σειρών και στη Θεωρία Διαφορικών Εξισώσεων. Εισήγαγε τα κυριότερα αλγεβρικά σύμβολα που χρησιμοποιούμε σήμερα και θεωρείται ως ο πιο παραγωγικός ερευνητής στην ιστορία των Μαθηματικών.

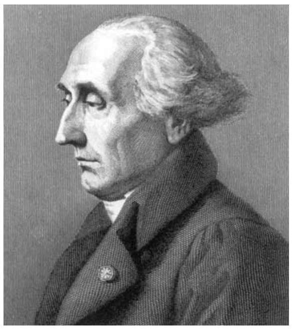
Leonhard Euler (1707-1783)

Η **Maria Gaëtana Agnesi** γεννήθηκε στην Ιταλία και χαρακτηριζόταν ως παιδί θαύμα. Μεγάλη είναι η προσφορά της στην Άλγεβρα και τον Απειροστικό Λογισμό.

Ο **Joseph-Louis Lagrange** γεννήθηκε στο Τορίνο της Ιταλίας. Θεωρείται απο τους πολύ σπουδαίους μαθηματικούς του 18ου αιώνα.

Maria Gaëtana Agnesi (1718-1799)

Μεγάλη είναι η συμβολή του στη Μαθηματική Ανάλυση, Θεωρία Αριθμών και Άλγεβρα. Πολύ γνωστό είναι το έργο του με τίτλο *Αναλυτική Μηχανική* που αποτελεί μεγάλη προσφορά στη Μηχανική.



Joseph-Louis Lagrange (1736-1813)

Ο **Jean Baptiste Joseph Fourier** γεννήθηκε στη Γαλλία. Έγινε γνωστός με την εργασία του *Αναλυτική θεωρία της Θερμότητας*. Στην εργασία αυτή διατύπωσε την ιδέα να χρησιμοποιηθούν τριγωνομετρικές σειρές, τις οποίες μεταγενέστεροι μαθηματικοί ανέπτυξαν στη μαθηματική μεθοδολογία που ονομάζεται σήμερα *σειρές Fourier*. Θεωρείται ιδρυτής του κλάδου της Θεωρητικής και Μαθηματικής Φυσικής.

Ο **Johann Carl Friedrich Gauss** γεννήθηκε στη Γερμανία. Ασχολήθηκε με θέματα Φυσικής, Αστρονομίας, Θεωρίας Δυναμικών Πεδίων και Γεωμετρικής Οπτικής. Σε όλους τους τομείς έδωσε εντυπωσιακά αποτελέσματα. Ασχολήθηκε επίσης με τη Θεωρία Αριθμών, τη Διαφο-

Jean Baptiste Joseph Fourier (1768-1830)

ρική Γεωμετρία, τη Θεωρία Άπειρων Σειρών, τις Διαφορικές Εξισώσεις, τη Θεωρία Μιγαδικών Συναρτήσεων καθώς επίσης και με μη Ευκλείδειες Γεωμετρίες.

Johann Carl Friedrich Gauss (1777-1855)

Ο **Augustin Louis Cauchy** ήταν Γάλλος μαθηματικός με τεράστια συμβολή στην Ανάλυση. Η παραγωγικότητά του ήταν τόσο εντυπωσιακή που δημιούργησε δικό του περιοδικό για να δημοσιεύει τα αποτελέσματά του. Ο τίτλος του περιοδικού αυτού ήταν Exercices de Mathematiques. Σε αυτόν οφείλεται η αυστηρότητα των ορισμών της Ανάλυσης. Ακόμη και σήμερα προκαλεί θαυμασμό η αυστηρότητα και η ακρίβεια των ορισμών του Cauchy για το όριο και τη συνέχεια όπως και αρκετά θέματα τα οποία ανέπτυξε για τις σειρές. Μεγάλη επίσης θεωρείται η προσφορά του στη Συνδυαστική, τη Θεωρία Μεταθέσεων, στις Ορίζουσες, στις Διαφορικές Εξισώσεις, τις Πιθανότητες και τη Μαθηματική Φυσική.

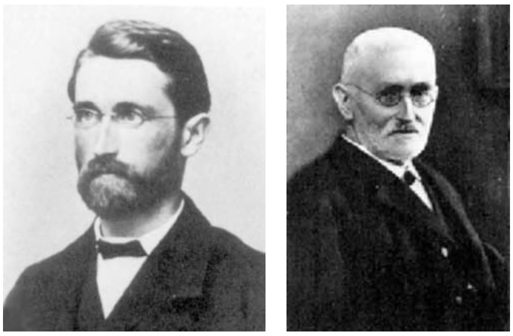
Ο **Georg Friedrich Bernhard Riemann** είχε δάσκαλο τον Gauss

Augustin Louis Cauchy (1789-1857)

και δυστυχώς έζησε μόνο 39 χρόνια. Διατύπωσε τις αρχές που αποτέλεσαν τη βάση για μια νέα γεωμετρία που φέρει το όνομά του, τη *Γεωμετρία Riemann*. Ο Riemann διαπίστωσε ότι μη Ευκλείδεια γεωμετρία με άθροισμα γωνιών τριγώνου μεγαλύτερο απο 180^o πραγματώνεται στην επιφάνεια μιας σφαίρας. Μοντέλο για αυτή τη γεωμετρία είναι η ερμηνεία του επιπέδου ως την επιφάνεια μιας σφαίρας και της ευθείας ως ένα μέγιστο κύκλο της σφαίρας. Η συμβολή του στο Διαφορικό Λογισμό είναι μεγάλη. Σήμερα ένα από τα είδη ολοκληρωμάτων φέρει το όνομά του, το *ολοκλήρωμα Riemann*.

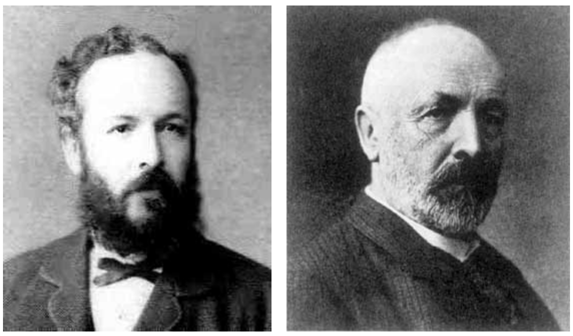
Georg Friedrich Bernhard Riemann (1826-1866)

Ο **Julius Wilhelm Richard Dedekind** ασχολήθηκε με τη θεμελίωση των φυσικών αριθμών και το 1888 επέλεξε πέντε αξιώματα για τη θεμελίωση αυτή. Τα αξιώματα αυτά, τα οποία αργότερα ο **G. Peano** (1858-1932) τα εξέφρασε σε συμβολική γλώσσα, έγιναν γνωστά ως τα «Αξιώματα Peano». Ο Dedekind ασχολήθηκε επίσης με τη θεμελίωση των πραγματικών αριθμών. Όρισε το σύνολο των πραγματικών αριθμών ως το σύνολο των τομών ρητών αριθμών (γνωστές ως τομές Dedekind). Η θεμελίωση αυτή διαφέρει από αυτή του Cantor ο οποίος χρησιμοποίησε τις ακολουθίες Cauchy των ρητών αριθμών αντί για τις τομές των ρητών αριθμών.



Julius Wilhelm Richard Dedekind (1831-1916)

O **Georg Ferdinand Ludwig Philipp Cantor** γεννήθηκε στην Αγία Πετρούπολη της Ρωσίας. Από το 1874 με μία σειρά δημοσιεύσεων έθεσε τις βάσεις της Θεωρίας Συνόλων.



Georg Ferdinand Ludwig Philipp Cantor (1845-1918)

O **Henri Léon Lebesgue** θεωρείται απο τους μεγαλύτερους Γάλλους μαθηματικούς. Σημαντική είναι η προσφορά του στον Διαφορικό και Ολοκληρωτικό Λογισμό. Ειδικότερα ασχολήθηκε με την πολλαπλή ολοκλήρωση και επέκτεινε το ολοκλήρωμα του Riemann το οποίο έγινε γνωστό ως ολοκλήρωμα του Lebesgue.

Henri Léon Lebesgue (1875-1941)

Βιβλιογραφία

[1] A. D. Aleksandrov, A. N. Kolmogorov, M. A. Lavrent'ev, Mathematics: Its Content, Methods, and Meaning, Volume I, II, III, The M.I.T. press, Massachusetts Institute of Technology, Cambridge, 1963.

[2] Tom M. Apostol, Calculus, Vol. 1: One-Variable Calculus with an Introduction to Linear Algebra, 1975.

[3] Tom M. Apostol, Calculus, Mathematical Analysis, Addison-Wesley Publishing Company, 1974.

[4] G.I. Arkhipov, V.A. Sadovnichii, V.N.Chubarikov, Lectures in mathematical analysis, parts 1-4, Moscow, MGU, 1995-1997 (in Russian).

[5] Jason Socrates Bardi, The calculus wars: Newton, Leibniz, and the greatest mathematical clash of all time, Thunder's Mouth Press, New York, 2006.

[6] Robert G. Bartle, The elements of real analysis, John Wiley & Sons, New York-London-Sydney, 1976.

[7] Richard Beals, Analysis. An introduction. Cambridge University Press, Cambridge, 2004.

[8] Sterling K. Berberian, Fundamentals of real analysis, Universitext, Springer-Verlag, New York, 1999.

[9] Daniel D. Bonar and Michael J. Khoury, Real Infinite Series, Mathematical Association of America, Washington, DC, 2006.

[10] Carl B. Boyer, The history of the calculus and its conceptual development, Dover Publications, Inc., New York 1959.

[11] David M. Bressoud, A radical approach to real analysis, Mathematical Association of America, Washington, DC, 2007.

[12] Mark Bridger, Real analysis: A constructive approach, Wiley-Interscience [John Wiley & Sons], Hoboken, NJ, 2007.

[13] R. P. Burn, Numbers and functions: Steps into analysis, Cambridge University Press, Cambridge, 2000.

[14] R. Courant, Differential and Integral Calculus, Volume II, Interscience, Publishers Inc., N. York, 1947.

[15] Kenneth R. Davidson and Allan P. Donsig, Real analysis and applications. Theory in practice. Undergraduate Texts in Mathematics.

Springer, New York, 2010.

[16] Jewgeni H. Dshalalow, Real Analysis: An Introduction to the Theory of Real Functions and Integration, Chapman & Hall/CRC, Boca Raton, FL, 2001.

[17] Donald Estep, Practical Analysis in One Variable, Springer-Verlag, New York, 2002.

[18] George R. Exner, Inside calculus, Springer-Verlag, New York, 2000.

[19] G.M. Fichtengol'c, Course of differential and integral calculus, v. I-III, 7 edition, Moscow, Nauka, 1969-1970 (in Russian).

[20] Gerald B. Folland, Real Analysis: Modern Techniques and Their Applications, A Wiley-Interscience Publication. John Wiley & Sons, Inc., New York, 1999.

[21] Janos Galambos, Representations of Real Numbers by Infinite Series, Springer-Verlag, Berlin-New York, 1976.

[22] Edward D. Gaughan, Introduction to Analysis, Brooks/Cole Publishing Co., Pacific Grove, CA, 1993.

[23] S. R. Ghorpade, B. V. Limaye, A course in calculus and real analysis, Springer, New York, 2006.

[24] Judith V. Grabiner, The origins of Cauchy's rigorous calculus, MIT Press, Cambridge, Mass.-London, 1981.

[25] J. A. Green, Sequences and series, The Free Press, Glencoe, Illinois, Routledge and Kegan Paul Ltd., London 1958.

[26] E. Hairer and G. Wanner, Analysis by Its History, Springer, New York, 2008.

[27] G.H. Hardy, J.E. Littlewood, and G. Polya, Inequalities, Cambridge University Press, Cambridge, 1988.

[28] Felix Hausdorff, Set theory, Chelsea Publishing Co., New York 1962.

[29] Omar Hijab, Introduction to calculus and classical analysis. Undergraduate Texts in Mathematics. Springer-Verlag, New York, 1997.

[30] Sze-Tsen Hu, Elements of real analysis, Holden-Day, Inc., San Francisco, Calif.-Cambridge-Amsterdam 1967.

[31] W. J. Kaczor and M. T. Nowak, Problems in Mathematical Analy-

sis I: Real Numbers, Sequences and Series, American Mathematical Society, Providence, RI, 2000.

[32] W. J. Kaczor and M. T. Nowak, Problems in Mathematical Analysis II: Continuity and Differentiation, American Mathematical Society, Providence, RI, 2001.

[33] W. J. Kaczor and M. T. Nowak, Problems in Mathematical Analysis III: Integration, American Mathematical Society, Providence, RI, 2003.

[34] H. Jerome Keisler, Elementary Calculus: An infinitesimal Approach, 2000.

[35] A. B. Kharazishvili, Strange Functions in Real Analysis, Chapman & Hall/CRC, Boca Raton, FL, 2006.

[36] Anthony W. Knapp, Basic real analysis, Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 2005.

[37] Konrad Knopp, Infinite sequences and series, Dover Publications, Inc., New York, 1956.

[38] Konrad Knopp, Elements of the theory of functions, Dover Publications, Inc., New York, 1953.

[39] A. N. Kolmogorov, S. V. Fomin, Introductory real analysis, Dover Publications, Inc., New York, 1975.

[40] L.D. Kudriavcev, Course of mathematical analysis, v. 1-3, Moscow, Drofa, 2003-2004 (in Russian).

[41] Kazimierz Kuratowski, Introduction to calculus, Polish Scientific Publishers, Warsaw, 1969.

[42] B.K. Lahiri and K.C. Roy, Real analysis, World Press Private Ltd., Calcutta, 2008.

[43] Serge A. Lang, Real analysis, Addison-Wesley Publishing Company, Advanced Book Program, Reading, MA, 1983.

[44] B. M. Makarov, M. G. Goluzina, A.A. Lodkin, and A. N. Podkorytov, Selected Problems in Real Analysis, American Mathematical Society, Providence, RI, 1992.

[45] George A. Obsorne, Differential and integral calculus with examples and applications, Boston, MA: Heath, 1908.

[46] William F. Osgood, Introduction to infinite series, Harvard Uni-

versity, 1897.

[47] George Polya and Gabor Szego, Problems and Theorems in Analysis I, Springer-Verlag, Berlin, 1998.

[48] Murray H. Protter, Basic elements of real analysis, Springer-Verlag, New York, 1998.

[49] Teodora-Liliana T. Radulescu, Vicentiu D. Radulescu, Titu Andreescu, Problems in real analysis: Advanced calculus on the real axis, Springer, New York, 2009.

[50] Walter Rudin, Principles of mathematical analysis, McGraw-Hill Book Co., New York-Auckland-Düsseldorf, 1976.

[51] Joel L. Schiff, The Laplace Transform: Theory and Applications, Springer-Verlag, New York, 1999.

[52] Rami Shakarchi, Problems and solutions for undergraduate analysis, Springer-Verlag, New York, 1998.

[53] Michael Spivak, Calculus, Cambridge University Press, 2006.

[54] S. Stahl, Real analysis: a historical approach, John Wiley & Sons, Inc., New York, 1999.

[55] Angus E. Taylor, W. Robert Mann, Advanced calculus, John Wiley & Sons, Inc., New York, 1983.

[56] Otto Toeplitz, The calculus: A genetic approach, University of Chicago Press, Chicago, IL, 2007.

[57] Zorich V.A., Mathematical analysis I, II, Translated from the 2002 forth Russian edition by Roger Cooke. Universitext. Springer-Verlag, Berlin 2004.

[58] Δ. Γεωργίου και Σ. Ηλιάδης, Αναλυτική Γεωμετρία, Πάτρα, 2008.

[59] Δ. Γεωργίου και Σ. Ηλιάδης, Γενική Τοπολογία, Πάτρα, 2008.

[60] Δ. Γεωργίου και Σ. Ηλιάδης, Θεωρία Συνόλων, Πάτρα, 2008.

[61] Ε. Γιαννακούλιας, Σ. Γιωτόπουλος και Σ. Νεγρεπόντης, Απειροστικός Λογισμός Ι, Συμμετρία, 1999.

[62] Ε. Γιαννακούλιας, Σ. Γιωτόπουλος και Σ. Νεγρεπόντης, Απειροστικός Λογισμός ΙΙα, Συμμετρία, 1999.

[63] Ε. Γιαννακούλιας, Σ. Γιωτόπουλος και Σ. Νεγρεπόντης, Απειροστικός Λογισμός ΙΙβ, Συμμετρία, 1999.

[64] Κάππος, Α. Δημήτριος, Μαθήματα Αναλύσεως, Απειροστικός Λογισμός. Τεύχος Α, Αθήνα 1962.

[65] Κάππος, Α. Δημήτριος, Ασκήσεις αναλύσεως, Απειροστικός Λογισμός. Τεύχος Β, Αθήνα 1965.