Τίτλος Μαθήματος: Διαφορική Γεωμετρία

Ενότητα: Καμπυλότητα

Όνομα Καθηγητή: Ανδρέας Αρβανιτογεώργος

Τμήμα: Μαθηματικών

Άδειες Χρήσης

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Πατρών**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Κεφάλαιο 6

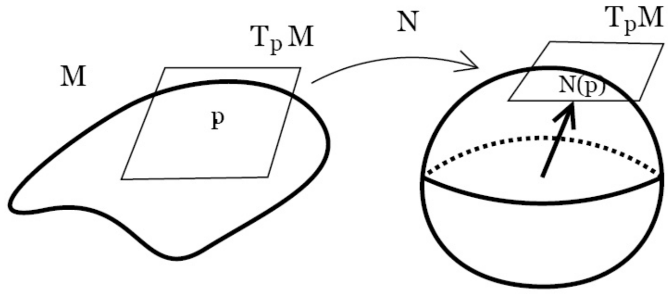
Καμπυλότητα

Ένας από τους κεντρικούς στόχους της διαφορικής γεωμετρίας είναι η εύρεση ενός φυσικού και αποτελεσματικού τρόπου προκειμένου να μετρηθεί η κύρτωση μη επίπεδων αντικειμένων (καμπύλες, επιφάνειες αλλά και άλλων). Υπάρχουν τουλάχιστον δύο τρόποι προκειμένου να οριστεί η καμπυλότητα μιας επιφάνειας. Εδώ θα ακολουθήσουμε τη διαδικασία μέσω της απεικόνισης Gauss, δηλαδή ουσιαστικά μιας απεικόνισης που σε κάθε σημείο μιας επιφάνειας αντιστοιχεί ένα μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα στον αντίστοιχο εφαπτόμενο χώρο.

Η προσέγγιση αυτή δεν είναι ο ιστορικός ορισμός που είχε δοθεί από τον Gauss, ο οποίος είναι λίγο πιο περίπλοκος. Όπως και να έχει, η καμπυλότητα Gauss μιας επιφάνειας θα οριστεί ως ένα μέγεθος η μέτρηση του οποίου απαιτεί να "βλέπουμε" την επιφάνεια ως υποσύνολο του $\mathbb{R}^3$. Το "Θαυμαστό Θεώρημα" (Theorema Egregium) του Gauss που θα δούμε όμως στη συνέχεια, αναφέρει ότι η καμπυλότητα είναι ένα μέγεθος το οποίο μπορεί να μετρηθεί (ή να αναγνωριστεί) από έναν παρατηρητή ο οποίος βρίσκεται επάνω στην επιφάνεια και όχι εκτός αυτής. Είναι δηλαδή ένα **εσωτερικό μέγεθος** της επιφάνειας. Με πιο απλοϊκό τρόπο ο καπετάνιος ενός πλοίου που ταξιδεύει σε μεγάλη απόσταση είναι δυνατόν να διαπιστώσει με δικές του μετρήσεις ότι η γη είναι σφαιρική και δεν χρειάζεται να επικοινωνήσει με πιλότο αεροπλάνου για το σκοπό αυτό!

Ορισμός 6.1. *Έστω M κανονική επιφάνεια. Μια λεία απεικόνιση $N : M \to \mathbb{S}^2$ ονομάζεται απεικόνιση Gauss της M εάν για κάθε $p \in M$ η εικόνα $N(p)$ είναι κάθετη στο εφαπτόμενο επίπεδο T_pM.*

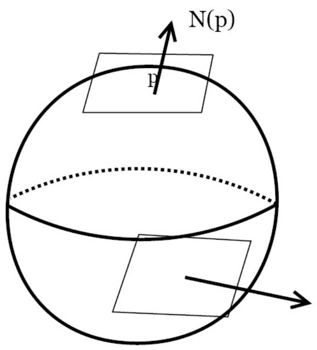
Εάν μια τέτοια απεικόνιση υπάρχει, τότε η επιφάνεια M ονομάζεται **προσανατολίσιμη (orientable)**. Η επιφάνεια M εφοδιασμένη με μια τέτοια απεικόνιση Gauss ονομάζεται **προσανατολισμένη (oriented)** επιφάνεια.



Παραδείγματα

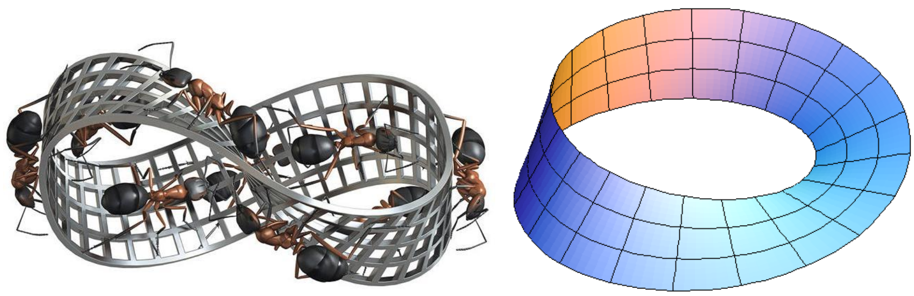
1. Έστω $M = \{(x, y, 0) \in \mathbb{R}^3 : x, y \in \mathbb{R}\}$ το επίπεδο xy. Τότε μια απεικόνιση Gauss είναι η $N(x, y, 0) = (0, 0, 1)$.

2. Έστω $M = \mathbb{S}^2$. Τότε $N = \mathrm{Id}_{\mathbb{S}^2}$, όπου $\mathrm{Id} : M \to M, \mathrm{Id}(x) = x$ η ταυτοτική απεικόνιση της M



3. Έστω $M = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$ ο ορθός μοναδιαίος κύλινδρος. Τότε $N(x, y, z) = (x, y, 0)$ είναι μια απεικόνιση Gauss.

4. Η <u>ταινία του Möbius</u> (αναζητήστε τοπική παραμέτρηση και περιγραφή στην βιβλιογραφια) δεν επιδέχεται απεικόνιση Gauss, δηλαδή είναι μια μη προσανατολίσιμη επιφάνεια.



Παρατηρήσεις

1. Κάθε κανονική επιφάνεια είναι τοπικά προσανατολισμένη. Πράγματι, αν $X : U \to X(U) \subset M$ είναι μια τοπική παραμέτρηση της M με $X(\overrightarrow{0}) = p$, τότε για κάθε $q = X(u,v) \in X(U)$ η απεικόνιση
$$N(q) = N(X(u,v)) = \frac{X_u(u,v) \times X_v(u,v)}{\|X_u(u,v) \times X_v(u,v)\|}$$
είναι μια (τοπική) απεικόνιση Gauss της M.

2. Αν $N : M \to \mathbb{S}^2$ είναι μια απεικόνιση Gauss της M, τότε το διάνυσμα $N(p)$ είναι κάθετο ταυτόχρονα στα εφαπτόμενα επίπεδα T_pM και $T_{N(p)}\mathbb{S}^2$. Συνεπώς, μπορούμε να ταυτίσουμε $T_pM \cong T_{N(p)}\mathbb{S}^2$ (ισομορφισμός διανυσματικών χώρων).

Ορισμός 6.2. *Έστω M μια κανονική προσανατολισμένη επιφάνεια με απεικόνιση Gauss $N : M \to \mathbb{S}^2, p \in M$. Ο τελεστής σχήματος (shape operator) της M στο p είναι η γραμμική απεικόνιση*
$$S_p : T_pM \to T_pM,\ S_p(Z) = -dN_p(Z),\ \text{για κάθε } Z \in T_pM.$$

Ο όρος τελεστής σχήματος δικαιολογείται από το παρακάτω θεώρημα:

Θεώρημα 6.1. *Έστω M μια συνεκτική, προσανατολισμένη επιφάνεια με απεικόνιση Gauss $N : M \to \mathbb{S}^2$. Τότε ο τελεστής σχήματος $S_p : T_pM \to T_pM$ είναι ο μηδενικός τελεστής για κάθε $p \in M$, εάν και μόνο εάν η M είναι τμήμα ενός επιπέδου.*

Παραδείγματα

1. Έστω $M = \mathbb{S}^2, N(p) = p$. Τότε $S_p = -\mathrm{Id} : T_p\mathbb{S}^2 \to T_p\mathbb{S}^2$.

2. Έστω M το επίπεδο xy, $N(x,y,z) = (0,0,1)$. Τότε $N =$ σταθερή, άρα $S_p = 0$ για κάθε $p \in M$.

3. Έστω $M = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$ ο ορθός μοναδιαίος κύλινδρος, $N(x,y,z) = (x,y,0)$. Θα υπολογίσουμε τον τελεστή σχήματος S_p της M στο τυχαίο $p = (x,y,z) \in M$, βρίσκοντας τον αντίστοιχο πίνακα $[S_p]$ της γραμμικής απεικόνισης S_p (ως προς κατάλληλη επιλογή της βάσης του T_pM). Παρατηρούμε κατ' αρχήν ότι $T_pM = \mathrm{span}\{(-y,x,0),(0,0,1)\}$. Τότε
$$\begin{aligned} S_p(0,0,1) &= -dN_p(0,0,1) = -\frac{d}{dt}N(x,y,z+t)\big|_{t=0} \\ &= -\frac{d}{dt}(x,y,0)\big|_{t=0} = (0,0,0). \end{aligned}$$

Θα υπολογίσουμε τώρα την τιμή $S_p(-y,x,0)$. Έστω $\gamma(t) = \big(\cos(t+t_0), \sin(t+t_0), z\big)$, όπου $t_0 \in \mathbb{R}$ είναι τέτοιο ώστε $(\cos t_0, \sin t_0) = (x,y)$. Τότε για την καμπύλη αυτή ισχύουν ότι

$$\begin{aligned}
\gamma(0) &= (\cos t_0, \sin t_0, z) = (x,y,z) = p\\
\gamma'(0) &= (-\sin t_0, \cos t_0, 0) = (-y,x,0).
\end{aligned}$$

Άρα

$$\begin{aligned}
S_p(-y,x,0) &= -dN_p(-y,x,0) = -\frac{d}{dt}N\big(\cos(t+t_0), \sin(t+t_0), z\big)\big|_{t=0}\\
&= -\frac{d}{dt}\big(\cos(t+t_0), \sin(t+t_0), 0\big)\big|_{t=0} = (\sin t_0, -\cos t_0, 0)\\
&= -(-y,x,0).
\end{aligned}$$

Συνεπώς, ο πίνακας του τελεστή σχήματος ως προς τη βάση $\{(-y,x,0),(0,0,1)\}$ είναι

$$[S_p] = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Πρόταση 6.1. *Έστω M μια κανονική, προσανατολισμένη επιφάνεια με απεικόνιση Gauss $N : M \to \mathbb{S}^2$ και $p \in M$. Τότε ο τελεστής σχήματος είναι αυτοσυζυγής τελεστής ως προς την πρώτη θεμελιώδη μορφή, δηλαδή ισχύει*

$$\langle S_p(Z), W\rangle = \langle Z, S_p(W)\rangle, \ \text{για κάθε } Z, W \in T_pM.$$

Σημείωση. Επειδή ο T_pM είναι πραγματικός διανυσματικός χώρος ο τελεστής S_p ονομάζεται και **συμμετρικός**. Από τη γραμμική άλγεβρα γνωρίζουμε ότι αν $T : V \to V$ είναι συμμετρικός τελεστής επί ενός πραγματικού διανυσματικού χώρου, τότε ο V περιέχει μια βάση από ιδιοδιανύσματα, άρα ο T είναι διαγωνιοποιήσιμος και μάλιστα με πραγματικές ιδιοτιμές. Συνεπώς έχουμε το εξής:

Πόρισμα 6.1. *Έστω M κανονική και προσανατολισμένη επιφάνεια με απεικόνιση Gauss $N : M \to \mathbb{S}^2, p \in M$. Τότε υπάρχει ορθοκανονική βάση $\{Z_1, Z_2\}$ του εφαπτόμενου χώρου T_pM τέτοια ώστε*

$$S_p(Z_1) = \lambda_1 Z_1, \ S_p(Z_2) = \lambda_2 Z_2$$

για κάποιους πραγματικούς αριθμούς λ_1, λ_2.

Ορισμός 6.3. *Έστω M κανονική και προσανατολισμένη επιφάνεια με απεικόνιση Gauss $N :\to \mathbb{S}^2, p \in M$. Η <u>δεύτερη θεμελιώδης μορφή</u> της M στο p είναι η συμμετρική, διγραμμική απεικόνιση*

$$\mathrm{II}_p : T_pM \times T_pM \to \mathbb{R}, \ II_p(Z,W) = \langle S_p(Z), W\rangle.$$

Όπως και στην περίπτωση της πρώτης θεμελιώδους μορφής, μας ενδιαφέρει να βρούμε τοπική έκφραση της δεύτερης θεμελιώδους μορφής (δηλαδή έκφραση αυτής χρησιμοποιώντας μια τοπική παραμέτρηση της επιφάνειας).

Έστω M προσανατολισμένη κανονική επιφάνεια με απεικόνιση Gauss $N :\to \mathbb{S}^2$. Έστω $X : U \subset \mathbb{R}^2 \to M$ μια τοπική παραμέτρηση της M τέτοια ώστε $X(\overrightarrow{0}) = p \in M$ (είναι πάντα δυνατό να επιλέγουμε την απεικόνιση X με την ιδιότητα αυτή).

Ως γνωστόν, ο εφαπτόμενος χώρος $T_pM \cong T_{N(p)}\mathbb{S}^2$ παράγεται από τα διανύσματα X_u, X_v. Έστω

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \in M_{2\times 2}(\mathbb{R})$$

ο πίνακας του γραμμικού τελεστή $S_p : T_pM \to T_pM$ ως προς τη βάση $\{X_u, X_v\}$ (γνωστός και ως <u>πίνακας του Weingarten</u>). Τότε ισχύει

$$\begin{aligned} S_p(X_u) &= a_{11}X_u + a_{21}X_v \\ S_p(X_v) &= a_{12}X_u + a_{22}X_v. \end{aligned} \tag{6.1}$$

Επίσης, από τον ορισμό του τελεστή σχήματος είναι $S_p = -dN_p$, όπου $dN_p : T_pM \to T_{N(p)}\mathbb{S}^2$. Τότε ισχυριζόμαστε ότι ισχύει

$$dN_p(X_u) = N_u,\ dN_p(X_v) = N_v. \tag{6.2}$$

(Πράγματι, έστω $\overline{\alpha} : I \to U$ η καμπύλη $\overline{\alpha} = (t, 0)$ (δηλαδή ο άξονας x) του $U \subset \mathbb{R}^2$ με $\overline{\alpha}(0) = (0, 0)$ και $\overline{\alpha}'(0) = (1, 0) \equiv e_1$. Τότε η $\alpha = X \circ \overline{\alpha} : I \to M$ είναι μια καμπύλη στην επιφάνεια M, η οποία ικανοποιεί $\alpha(0) = X\big(\overline{\alpha}(0)\big) = X(0, 0) = p$ και $\alpha'(0) = X\big(\overline{\alpha}(0)\big)\cdot\overline{\alpha}'(0) = X(0, 0)e_1 = X_u$. Συνεπώς, από τον ορισμό του διαφορικού απεικόνισης μεταξύ επιφανειών έχουμε ότι

$$\begin{aligned} dN_p(X_u) &= \frac{d}{dt}\big(N \circ \alpha\big)\big|_{t=0} = \frac{d}{dt}\big(N \circ X \circ \overline{\alpha}\big)\big|_{t=0} \\ &= D(N \circ X)(0, 0)\overline{\alpha}'(0) = \frac{\partial}{\partial u}(N \circ X)\big|_{(0,0)} = N_u. \end{aligned}$$

Παρόμοια προκύπτει και η άλλη ισότητα).

Συνεπώς από τις (6.1) και (6.2) προκύπτει το σύστημα

$$\begin{aligned} a_{11}X_u + a_{21}X_v &= -N_u \\ a_{12}X_u + a_{22}X_v &= -N_v, \end{aligned}$$

το οποίο σε μορφή πινάκων εκφράζεται ως

$$A[dX] = -[dN]$$

όπου

$$[dX] = (X_u, X_v)^t, \quad [dN] = (N_u, N_v)^t.$$

Ορίζουμε τώρα τις συναρτήσεις $e, f, g : U \to \mathbb{R}$ από την ισότητα πινάκων

$$\begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix} = -[dN][dX]^t = A[dX][dX]^t = A \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}. \tag{6.3}$$

Ορισμός 6.4. *Οι παραπάνω συναρτήσεις $e, f, g : U \to \mathbb{R}$ ονομάζονται* <u>*θεμελιώδη ποσά δεύτερης τάξης*</u>.

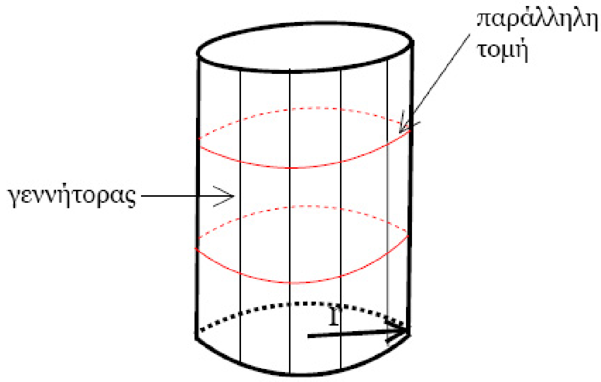
Παραδοσιακά η δεύτερη θεμελιώδης μορφή γράφεται και

$$\mathrm{II} = edu^2 + 2fdudv + gdv^2$$

αλλά δεν δίνουμε περισσότερες εξηγήσεις για την έκφραση αυτή. Λαμβάνοντας υπόψη την ισότητα (6.3) και το γεγονός ότι $N \perp \mathrm{span}\{X_u, X_v\}$ προκύπτουν οι χρήσιμες σχέσεις:

$$\begin{aligned} e &= -\langle N_u, X_u \rangle = \langle N, X_{uu} \rangle \\ f &= -\langle N_u, X_v \rangle = \langle N, X_{vu} \rangle \\ g &= -\langle N_v, X_v \rangle = \langle N, X_{vv} \rangle.. \end{aligned}$$

Ένα από τα θεμελιώδη ερωτήματα της διαφορικής γεωμετρίας είναι με ποιόν τρόπο μπορούμε να μετρήσουμε την καμπυλότητα μιας επιφάνειας. Μια σημαντική παρατήρηση είναι ότι η καμπυλότητα μιας επιφάνειας (με όποιον τρόπο και αν αυτή οριστεί) δεν είναι σταθερή προς όλες τις διευθύνσεις. Για παράδειγμα, ο κυκλικός κύλινδρος ακτίνας r δεν καμπυλώνεται κατά τη διεύθυνση ενός γεννήτορα, αλλά καμπυλώνεται κατά τη διεύθυνση των εφαπτομένων στις παράλληλες τομές του. Συνεπώς, είναι λογικό να πούμε ότι η καμπυλότητα του κυλίνδρου είναι μηδέν κατά τη διεύθυνση των γεντήτορων του, ενώ στη διεύθυνση των παραλλήλων τομών η καμπυλότητα ισούται με αυτή των ίδιων των τομών, δηλαδή $1/r$.

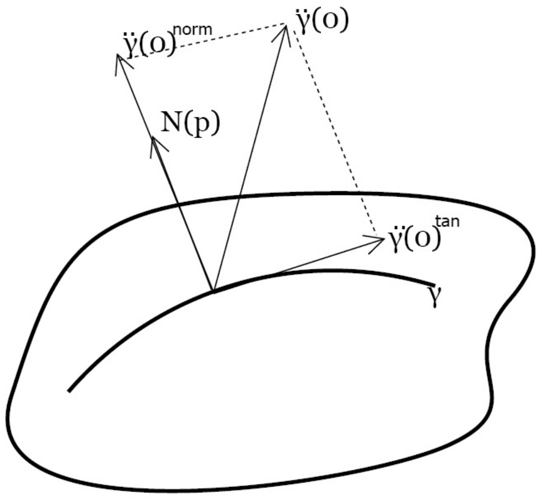


Άρα λοιπόν, ένας τρόπος μέτρησης της καμπυλότητας μιας επιφάνειας, είναι μελετώντας κατάλληλες καμπύλες επί της επιφάνειας. Θα προσπαθήσουμε να κάνουμε την παραπάνω ιδέα πιο συγκεκριμένη.

Έστω M μια προσανατολισμένη κανονική επιφάνεια με απεικόνιση Gauss $N : M \to \mathbb{S}^2$ και έστω $\gamma : I \to M$ μια καμπύλη με παραμέτρηση κατά μήκος τόξου τέτοια ώστε $\gamma(0) = p, \gamma'(0) = Z$. Αναλύουμε τη δεύτερη παράγωγο $\ddot{\gamma}(0)$ στο p ως εξής

$$\ddot{\gamma}(0) = \ddot{\gamma}(0)^{\tan} + \ddot{\gamma}(0)^{\text{norm}},$$

όπου $\ddot{\gamma}(0)^{\tan} \in T_pM$ είναι η **εφαπτομενική συνιστώσα** και $\ddot{\gamma}(0)^{\text{norm}} \in \big(T_pM\big)^{\perp}$ η **κάθετη συνιστώσα** .



Το κάθετο διάνυσμα $N(\gamma(s))$ κατά μήκος της καμπύλης γ είναι κάθετο στην εφαπτομένη $\dot{\gamma}(s)$, συνεπώς για την κάθετη συνιστώσα του διανύσματος $\ddot{\gamma}(0)$ ισχύει ότι

$$\begin{aligned}\ddot{\gamma}(0)^{\text{norm}} &= \langle \ddot{\gamma}(0), N(p)\rangle N(p)\\ &= -\langle \dot{\gamma}(0), dN(p)\dot{\gamma}(0)\rangle N(p) = -\langle Z, dN(p)Z\rangle N(p),\end{aligned}$$

το οποίο σημαίνει ότι η κάθετη συνοστώσα $\ddot{\gamma}(0)^{\text{norm}}$ του διανύσματος $\ddot{\gamma}(0)$ καθορίζεται πλήρως από την τιμή $\dot{\gamma}(0)$ και τις τιμές της απεικόνισης Gauss κατά μήκος οποιασδήποτε καμπύλης που διέρχεται από το σημείο p και με εφαπτόμενο διάνυσμα $\dot{\gamma}(0) = Z \in T_pM$. Άρα ο ορισμός που δίνουμε στη συνέχεια είναι καλός.

Ορισμός 6.5. *Έστω M προσανατολισμένη κανονική επιφάνεια με απεικόνιση Gauss $N : M \to \mathbb{S}^2, p \in M$ και $Z \in T_pM$. Η κάθετη καμπυλότητα (normal curvature) $\kappa_p(Z)$ της M στο p στη διεύθυνση του διανύσματος Z είναι ο αριθμός*

$$\kappa_p(Z) = \langle \ddot{\gamma}(0), N(p)\rangle,$$

όπου $\gamma : I \to M$ οποιδήποτε λεία καμπύλη με παραμέτρηση κατά μήκος τόξου με $\gamma(0) = p, \gamma'(0) = Z$.

Προκειμένου να δώσουμε μια γεωμετρική περιγραφή της κάθετης καμπυλότητας εργαζόμαστε ως εξής: Ως καμπύλη στον $\mathbb{R}^3$ η γ έχει καμπυλότητα $\kappa(s)$ και κάθετο διάνυσμα $\tilde{N}(s) = \dfrac{\ddot{\gamma}(s)}{\kappa(s)}$, συνεπώς $\ddot{\gamma}(0) = \kappa(0)\tilde{N}(0)$. Το διάνυσμα $\tilde{N}(0)$ αναλύεται ως

$$\begin{aligned}\tilde{N}(0) &= \tilde{N}(0)^{\tan} + \tilde{N}(0)^{\text{norm}}\\ &= \tilde{N}(0)^{\tan} + \langle \tilde{N}(0), N(p)\rangle N(p),\end{aligned}$$

άρα

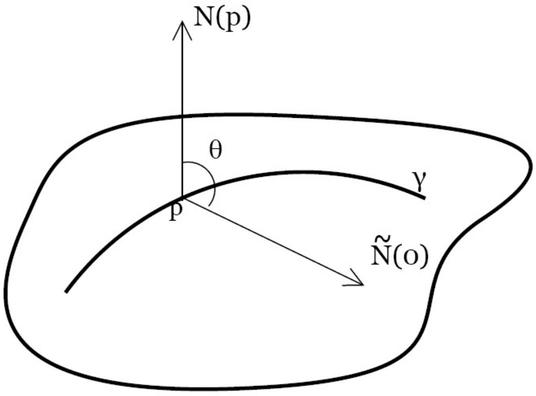
$$\ddot{\gamma}(0) = \kappa(0)\tilde{N}(0) = \kappa(0)\tilde{N}(0)^{\tan} + \kappa(0)\langle \tilde{N}(0), N(p)\rangle N(p).$$

Ο πρώτος όρος στο παραπάνω δεξί μέλος σχετίζεται με την **γεωδαισιακή καμπυλότητα** της καμπύλης γ, ενώ για τον δεύτερο όρο ισχύει

$$\kappa_p(Z) = \langle \ddot{\gamma}(0), N(p)\rangle = \kappa(0)\langle \tilde{N}(0), N(p)\rangle.$$

(Αν $\kappa(0) = 0$, τότε $\kappa_p(Z) = 0$). Αν θ είναι η γωνία των διανυσμάτων $N(p)$ και $\tilde{N}(0)$ τότε

$$\kappa_p(Z) = \kappa(0)\cos\theta.$$



Επιπλέον, ισχύει $|\kappa_p(Z)| \leq \kappa(0)$. Είναι λοιπόν σαφές ότι η κάθετη καμπυλότητα καθορίζει την "κύρτωση" της επιφάνειας, οπότε αναμένεται να σχετίζεται με τον τελεστή σχήματος όπως φαίνεται στην παρακάτω πρόταση:

Πρόταση 6.2. *(Θεώρημα Meusnier)*
Έστω M προσανατολισμένη κανονική επιφάνεια με απεικόνιση Gauss $N : M \to \mathbb{S}^2, p \in M$ και $Z \in T_pM$. Τότε η κάθετη καμπυλότητα της M στο p στη διεύθυνση του διανύσματος Z ικανοποιεί τη σχέση

$$\kappa_p(Z) = \langle S_p(Z), Z \rangle = \mathrm{II}_p(Z, Z).$$

Θεωρούμε τώρα μια κανονική, προσανατολισμένη επιφάνεια M με απεικόνιση Gauss $N : M \to \mathbb{S}^2$ και έστω

$$T_p^1 M = \left\{ Z \in T_pM : \|Z\| = 1 \right\}$$

ο μοναδιαίος κύκλος στον εφαπτόμενο χώρο T_pM. Επειδή ο κύκλος T_p^1M είναι συμπαγής η συνεχής συνάρτηση

$$\tilde{\kappa}_p : T_p^1 M \to \mathbb{R}, \ \tilde{\kappa}_p(Z) = \kappa_p(Z)$$

παίρνει μέγιστη και ελάχιστη τιμή. Άρα υπάρχουν δύο διευθύνσεις $Z_1, Z_2 \in T_p^1M$ τέτοιες ώστε

$$\begin{aligned} \kappa_1(p) &\equiv \tilde{\kappa}_p(Z_1) = \max_{Z \in T_p^1 M} \tilde{\kappa}_p(Z) \\ &\equiv \tilde{\kappa}_p(Z_2) = \min_{Z \in T_p^1 M} \tilde{\kappa}_p(Z). \end{aligned}$$

Οι διευθύνσεις Z_1, Z_2 ονομάζονται **κύριες διευθύνσεις** (principal directions) στο p και οι τιμές $\kappa_1(p), \kappa_2(p)$ **κύριες καμπυλότητες** (principal curvatures) της M στο p. Εάν $\kappa_1(p) = \kappa_2(p)$ το σημείο p ονομάζεται **ομφαλικό** (umbilic). Το παρακάτω θεώρημα δίνει έναν ιδιαιτέρως χρήσιμο αλγεβρικό χαρακτηρισμό των κύριων διευθύνσεων.

Θεώρημα 6.2. *Έστω M μια προσανατολισμένη κανονική επιφάνεια με απεικόνιση Gauss $N : M \to \mathbb{S}^2$ και έστω $p \in M$. Τότε το διάνυσμα $Z \in T_p^1 M$ είναι μια κύρια διεύθυνση στο p εάν και μόνο εάν το Z είναι ένα ιδιοδιάνυσμα του τελεστή σχήματος $S_p : T_pM \to T_pM$.*

Απόδειξη. (**Σκιαγράφηση**)
Έστω $\{Z_1, Z_2\}$ μια ορθοκανονική βάση του T_pM από ιδιοδιανύσματα του S_p, δηλαδή

$$S_p(Z_1) = \lambda_1 Z_1,\ S_p(Z_2) = \lambda_2 Z_2, \quad (\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}).$$

Κάθε μοναδιαίο διάνυσμα $Z \in T_p^1 M$ γράφεται ως $Z(\theta) = (\cos\theta)Z_1 + (\sin\theta)Z_2$ και από υπολογισμό προκύπτει ότι

$$\kappa_p\big(Z(\theta)\big) = \langle S_p(Z), Z\rangle = \lambda_1 \cos^2\theta + \lambda_2 \sin^2\theta.$$

Από την παραπάνω έκφραση φαίνεται ότι οι αριθμοί λ_1, λ_2 αποτελούν τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της συνάρτησης $\kappa_p\big(Z(\theta)\big) = \mathrm{II}_p\big(Z(\theta), Z(\theta)\big)$. Συνεπώς θα είναι $\lambda_1 = \kappa_1, \lambda_2 = \kappa_2$, άρα τελικά

$$\kappa_p(Z) = \kappa_1 \cos^2\theta + \kappa_2 \sin^2\theta,$$

όπου κ_1, κ_2 οι κύριες καμπυλότητες της M στο p. Από την παραπάνω σχέση, γνωστή και ως **τύπος του Euler** προκύπτει ουσιαστικά το αποτέλεσμα. □

Οι κύριες καμπυλότητες λοιπόν κ_1, κ_2 της M στο p είναι οι ιδιοτιμές του τελεστή σχήματος $S_p : T_pM \to T_pM$, άρα ο επόμενος σημαντικός ορισμός προκύπτει φυσιολογικά από τα προηγούμενα.

Ορισμός 6.6. *Έστω M προσανατολισμένη κανονική επιφάνεια του $\mathbb{R}^3$ με απεικόνιση Gauss $N : M \to \mathbb{S}^2$. Η καμπυλότητα Gauss (Gauss curvature) και η μέση καμπυλότητα (mean curvature) της M είναι οι συναρτήσεις*

$$\begin{aligned} K : M \to \mathbb{R}, &\qquad H : M \to \mathbb{R} \\ K(p) = \det S_p, &\qquad H(p) = \frac{1}{2}\mathrm{tr} S_p. \end{aligned}$$

Μια επιφάνεια M ονομάζεται **επίπεδη** (flat) εάν $K(p) = 0$ για κάθε $p \in M$ και **ελαχιστική** (ή ελάχιστης έκτασης) (minimal) εάν $H(p) = 0$ για κάθε $p \in M$. (Υπάρχει εξήγηση για το όρο ελάχιστης έκτασης αλλά δεν θα μας απασχολήσει σε αυτή την παρουσίαση).

Η καμπυλότητα Gauss, η πιο σημαντική έννοια του παρόντος μαθήματος, δεν είχε οριστεί ιστορικά από τον Gauss με τον τρόπο που δώσαμε (ο οποίος είναι ιδιαιτέρως λειτουργικός). Η πραγματική γεωμετρική ερμηνεία της καμπυλότητας από τον Gauss περιγράφεται από την παρακάτω πρόταση:

Πρόταση 6.3. *Έστω M προσανατολισμένη κανονική επιφάνεια του $\mathbb{R}^3$ με καμπυλότητα Gauss $K(p) \neq 0$ σε ένα σημείο της $p \in M$. Έστω V η συνεκτική περιοχή του σημείου p όπου η καμπυλότητα K δεν αλλάζει πρόσημο. Τότε*

$$|K(p)| = \lim_{A \to 0} \frac{A'}{A}$$

όπου A είναι το εμβαδόν μιας περιοχής $B \subset V$ με $p \in B$, και A' το εμβαδόν της εικόνας της B μέσω της απεικόνισης Gauss $N : M \to \mathbb{S}^2$.
Το όριο λαμβάνεται για μια ακολουθία περιοχών $\{B_n\}$ η οποία συγκλίνει στο p υπό την έννοια ότι για μεγάλο n κάθε σφαίρα με κέντρο το p περιέχει όλα τα B_n.

Θα εκφράσουμε τώρα την καμπυλότητα Gauss και τη μέση καμπυλότητα συναρτήσει των θεμελιωδών ποσών πρώτης και δεύτερης τάξης, δηλαδή χρησιμοποιώντας μια τοπική παραμέτρηση $X : U \to M$ της επιφάνειας M.

Θυμίζουμε ότι τα παραπάνω συνδέονται με τη σχέση

$$\begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}$$

όπου A είναι ο πίνακας του τελεστή σχήματος $S_p : T_pM \to T_pM$ ως προς τη βάση $\{X_u, X_v\}$. Από την παραπάνω σχέση προκύπτει ότι

$$A = \begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{EG - F^2} \begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -G & -F \\ -F & E \end{pmatrix}.$$

Επειδή η καμπυλότητα Gauss και η μέση καμπυλότητα ισούνται με την ορίζουσα και το ίχνος αντίστοιχα του πίνακα A προκύπτουν οι εκφράσεις:

$$K = \frac{eg - f^2}{EG - F^2}, \quad H = \frac{eG - 2fF + gE}{EG - F^2}.$$

Επιπλέον, οι κύριες καμπυλότητες κ_1, κ_2 προκύπτουν ως οι ρίζες της εξίσωσης

$$\det(A - \kappa I) = 0.$$

Παράδειγμα 6.1. Έστω $\gamma = (r, 0, z) : I \to \mathbb{R}^3$ μια λεία καμπύλη (με παράμετρο το μήκος τόξου) στο επίπεδο xz με $r(s) > 0$ και $\dot{r}(s)^2 + \dot{z}(s)^2 = 1$ για κάθε $s \in I$. Τότε η απεικόνιση $X : I \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ με

$$X(u, v) = \begin{pmatrix} \cos v & -\sin v & 0 \\ \sin v & \cos v & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r(u) \\ 0 \\ z(u) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r(u)\cos v \\ r(u)\sin v \\ z(u) \end{pmatrix}$$

είναι μια παραμέτρηση μιας κανονικής επιφάνειας εκ περιστροφής (surface of revolution) M (περί τον άξονα z). Τα γραμμικώς ανεξάρτητα διανύσματα

$$X_u = \begin{pmatrix} \dot{r}(u)\cos v \\ \dot{r}(u)\sin v \\ \dot{z}(u) \end{pmatrix}, \quad X_v = \begin{pmatrix} -r(u)\sin v \\ r(u)\cos v \\ 0 \end{pmatrix}$$

καθορίζουν μια (τοπική) απεικόνιση Gauss

$$N(u,v) = \begin{pmatrix} \cos v & -\sin v & 0 \\ \sin v & \cos v & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{z}(u) \\ 0 \\ \dot{r}(u) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\dot{z}(u)\cos v \\ -\dot{z}(u)\sin v \\ \dot{r}(u) \end{pmatrix}.$$

Ελέξτε ότι $\langle X_u, N\rangle = \langle X_v, N\rangle = 0$. Επιπλέον, έχουμε ότι

$$[dX] = (X_u, X_v)^t = \begin{pmatrix} \dot{r}(u)\cos v & \dot{r}(u)\sin v & \dot{z}(u) \\ -r(u)\sin v & r(u)\cos v & 0 \end{pmatrix},$$

άρα

$$\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} = [dX][dX]^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r(u)^2 \end{pmatrix}$$

και ότι

$$\begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix} = -[dN][dX]^t = \begin{pmatrix} -\ddot{r}(u)\dot{z}(u) + \ddot{z}(u)\dot{r}(u) & 0 \\ 0 & \dot{z}(u)r(u) \end{pmatrix}.$$

Επειδή η καμπύλη $\gamma = (r, 0, z)$ έχει παραμέτρηση κατά μήκος τόξου λαμβάνουμε ότι (μετά από προσεκτικές πράξεις)

$$K = \frac{eg - f^2}{EG - F^2} = -\frac{\ddot{r}(u)}{r(u)}. \qquad (\star)$$

Θα κάνουμε μια διερεύνηση της παραπάνω έκφρασης της καμπυλότητας. Ας πάρουμε την περίπτωση όπου η επιφάνεια M είναι η μοναδιαία σφαίρα $\mathbb{S}^2$, άρα $r(u) = \cos u, z(u) = \sin u$ και έστω ότι $-\pi/2 < u < \pi/2$. Τότε $E = 1, F = 0, G = \cos^2 u$ και $e = 1, f = 0, g = \cos^2 u$, άρα

$$\begin{aligned} K &= \frac{\cos^2 u}{\cos^2 u} = 1 = \kappa_1\kappa_2, \\ H &= \frac{1}{2}\frac{\cos^2 u + \cos^2 u}{\cos^2 u} = 1 = \frac{1}{2}\big(\kappa_1 + \kappa_2\big) \end{aligned}$$

άρα για τις κύριες καμπυλότητες ισχύει $\kappa_1 = \kappa_2 = 1$. Αν η επιφάνεια είναι ο μοναδιαίος κύλινδρος $r(u) = 1, z(u) = u$, τότε $E = 1, F = 0G = 1$ και $e = f = 0, g = 1$, συνεπώς $K = 0$ και $H = \frac{1}{2}$.

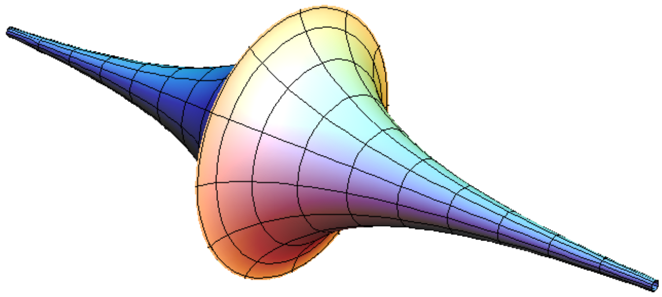
Ερχόμαστε πάλι στην γενική εξίσωση ($\star$) και την γράφουμε ισοδύναμα ως τη διαφορική εξίσωση

$$\ddot{r}(s) + K(s)r(s) = 0.$$

Λύνοντας την εξίσωση αυτή για $K = -1$ (σταθερά αρνητική καμπυλότητα Gauss) προκύπτει η γενική λύση

$$r(s) = \alpha e^{s} + be^{-s}, (\alpha, b \in \mathbb{R}).$$

Για $\alpha = 0, b = 1$ παίρνουμε $r(s) = e^{-s}$ και $z(s) = \int_0^s \sqrt{1 - e^{-2t}}dt$. Για τις επιλογες αυτές των συναρτήσεων $r, z : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ παίρνουμε την παραμέτρηση $\tilde{X} : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \to M$ της **ψευδοσφαίρας** (είναι μια συμπαγής επιφάνεια με σταθερή καμπυλότητα Gauss $K = -1$).



Η αντίστοιχη πρώτη θεμελιώδης μορφή είναι

$$\begin{pmatrix} \tilde{E} & \tilde{F} \\ \tilde{F} & \tilde{G} \end{pmatrix} = [d\tilde{X}][d\tilde{X}]^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{2s} \end{pmatrix}.$$

Εισάγουμε μια νέα μεταβλητή $u > 0$ μέσω της $s(u) = -\ln u$ οπότε λαμβάνουμε μια νέα παραμέτρηση $X : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \to M$ της ψευδοσφαίρας όπου $X(u, v) = \tilde{X}\big(s(u), v\big)$. Από τον κανόνα αλυσίδας είναι $X_u = s_u \tilde{X}_s = -\frac{1}{u}\tilde{X}_s$, οπότε παίρνουμε την πρώτη θεμελιώδη μορφή της παραμέτρησης X

$$\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} = [dX][dX]^t = \frac{1}{u^2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Με τον τρόπο αυτό επάγεται η μετρική (τοπική ισομετρία)

$$ds^2 = \frac{1}{u^2}\big(dv^2 + du^2\big)$$

στο άνω ημιεπίπεδο $\mathbb{H}^2 = \{(v, u) \in \mathbb{R}^2 : u > 0\}$. Το ζεύγος $(\mathbb{H}^2, ds^2)$ ονομάζεται **υπερβολικός χώρος** (hyperbolic space) και η μετρική ds^2 υπερβολική μετρική. Ο υπερβολικός χώρος αποτελεί ένα μοντέλο **μη Ευκλείδειας γεωμετρίας** (δηλαδή μιας γεωμετρίας όπου δεν ισχύει το 5ο αίτημα του Ευκλείδη).

Κλείνουμε το κεφάλαιο αυτό με δύο ενδιαφέροντα αποτελέσματα "ολικού" χαρακτήρα για μια επιφάνεια M.

Θεώρημα 6.3. *Έστω M μια συνεκτική προσανατολισμένη κανονική επιφάνεια με απεικόνιση Gauss $N : M \to \mathbb{S}^2$. Εάν κάθε σημείο $p \in M$ είναι ομφαλικό, τότε η M είναι τμήμα είτε ενός επιπέδου είτε μιας σφαίρας.*

Θεώρημα 6.4. *Έστω M συμπαγής κανονική επιφάνεια. Τότε υπάρχει τουλάχιστον ένα σημείο $p \in M$ με θετική καμπυλότητα Gauss $K(p)$.*

6.1 Ασκήσεις

1. Υπολογίστε την καμπυλότητα Gauss και τη μέση καμπυλότητα της επιφάνειας $X(u, v) = (u + v, u - v, uv)$ στο σημείο $(2, 0, 1.)$

2. Έστω U ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^3$ και $q \in \mathbb{R}$ μια κανονική τιμή της διαφορίσιμης συνάρτησης $f : U \to \mathbb{R}$. Αποδείξτε ότι η κανονική επιφάνεια $M = f^{-1}(\{q\})$ του $\mathbb{R}^3$ είναι προσανατολίσιμη.

3. Υπολογίστε την καμπυλότητα Gauss και τη μέση καμπυλότητα της σφαίρας $S_r^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = r^2\}$.

4. Δίνεται η <u>επιφάνεια του Enneper</u> με παραμέτρηση $X : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^3$

$$X(u, v) = (u - \frac{u^3}{3} + uv^2, v - \frac{v^3}{3} + vu^2, u^2 - v^2).$$

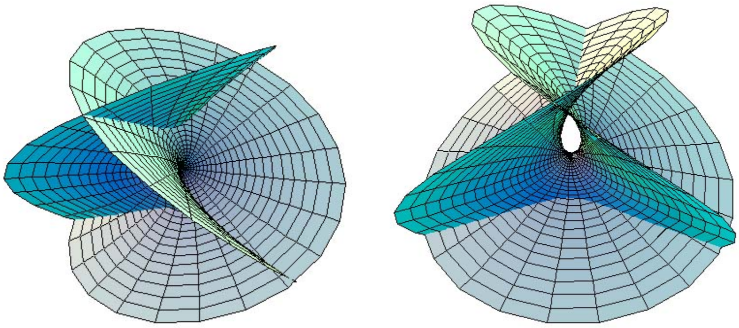
Υπολογίστε:

(α) την πρώτη θεμελιώδη μορφή

(β) την δεύτερη θεμελιώδη μορφή

(γ) τις κύριες καμπυλότητες

(δ) την καμπυλότητα Gauss και τη μέση καμπυλότητα.

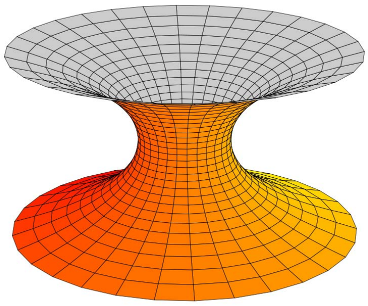


Σχήμα 6.1: Επιφάνεια του Enneper

5. Υπολογίστε την καμπυλότητα Gauss και την μέση καμπυλότητα της <u>αλυσοειδούς</u> επιφάνειας (catenoid) M με παραμέτρηση $X : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^3$

$$X(\theta, r) = \left(\frac{1+r^2}{2r} \cos\theta, \frac{1+r^2}{2r} \sin\theta, \log r \right).$$

Βρείτε μια εξίσωση της μορφής $f(x, y, z) = 0$ που να περιγράφει την M.



Σχήμα 6.2: Αλυσοειδής επιφάνεια

6. Έστω $X, Y : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ με $X(u, v) = (\cosh u \cos v, \cosh u \sin v, u)$ $Y(u, v) = (\sinh u \cos v, \sinh u \sin v, v)$ οι παραμετρήσεις της αλυσοειδούς και ελικοειδούς επιφάνειας αντίστοιχα. Υπολογίστε τις κύριες καμπυλότητες κ_1, κ_2 των X, Y.

7. Αποδείξτε ότι η δεύτερη θεμελιώδης μορφή μιας κανονικής επιφάνειας M του $\mathbb{R}^3$ παραμένει αναλλοίωτη κάτω από στερεές κινήσεις.

8. Έστω M μια συμπαγής κανονική επιφάνεια του $\mathbb{R}^3$. Τότε υπάρχει τουλάχιστον ένα σημείο $p \in M$ τέτοιο ώστε η καμπυλότητα Gauss $K(p)$ να είναι θετική.

9. Έστω $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ μια κανονική καμπύλη με παραμέτρηση κατά μήκος τόξου και με καμπυλότητα μη μηδενική. Έστω $\vec{n}, \vec{b}$ τα διανύσματα της καθέτου και της δεύτερης καθέτου της γ αντίστοιχα. Για $r > 0$ υποθέτουμε ότι ο <u>σωλήνας</u> (tube) M ακτίνας r περί την γ με παραμέτριση $X : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $X(s, \theta) = \gamma(s) + r\left(\cos\theta \cdot \vec{n}(s) + \sin\theta \cdot \vec{b}(s)\right)$

είναι μια κανονική επιφάνεια του $\mathbb{R}^3$. Υπολογίστε την καμπυλότητα Gauss K της επιφάνειας M ως προς $s, \theta, r, k(s)$ και $\tau(s)$.

10. Έστω $X : U \to \mathbb{R}^3$ παραμέτρηση μιας επιφάνειας M του $\mathbb{R}^3$ με απεικόνιση Gauss $N : M \to S^2$ και με κύριες καμπυλότητες $k_1 = \frac{1}{r_1}, k_2 = \frac{1}{r_2}$. Έστω $r \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε η $X_r : U \to \mathbb{R}^3$ με $X_r(u,v) = X(u,v) + rN(u,v)$ να είναι παραμέτρηση μιας επιφάνειας του $\mathbb{R}^3$. Αποδείξτε ότι οι κύριες καμπυλότητες της X_r ικανοποιούν $k_1(r) = \frac{1}{r_1 - r}$ και $k_2(r) = \frac{1}{r_2 - r}$.

11. Υπολογίστε την καμπυλότητα Gauss της επιφάνειας με παραμέτρηση $X : \mathbb{R}\times\mathbb{R} \to M$, $X_a(r,\theta) = \left(r \sin a \cos(\frac{\theta}{\sin a}), r \sin a \sin(\frac{\theta}{\sin a}), r \cos a\right)$.

12. Εφοδιάζουμε τους $\mathbb{R}^2$ και $\mathbb{R}^4$ με τα κανονικά εσωτερικά γινόμενα. Αποδείξτε ότι η παραμέτριση $X : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4$ με $X(u,v) = (\cos u, \sin u, \cos v, \sin v)$ του συμπαγούς δακτυλίου (torus) M στον $\mathbb{R}^4$ είναι ισομετρική. Τί μας λέει αυτό για την καμπυλότητα Gauss του M;

13. Έστω M μια κανονική επιφάνεια του $\mathbb{R}^3$ και $X : U \to M$ μια *ορθογώνια παραμέτρηση*, δηλαδή $F = 0$. Αποδείξτε ότι η καμπυλότητα Gauss ικανοποιεί τη σχέση

$$K = -\frac{1}{2\sqrt{EG}}\left(\left(\frac{E_v}{\sqrt{EG}}\right)_v + \left(\frac{G_u}{\sqrt{EG}}\right)_u\right).$$

14. Έστω M μια κανονική επιφάνεια του $\mathbb{R}^3$ και $X : U \to M$ μια *ισοθερμική παραμέτρηση*, δηλαδή $F = 0$ και $E = G$. Αποδείξτε ότι η καμπυλότητα Gauss ικανοποιεί τη σχέση

$$K = -\frac{1}{2E}\left((\log E)_{uu} + (\log E)_{vv}\right)$$

ή

$$K = -\frac{1}{2E}\Delta(\log E),$$

όπου $\Delta\varphi = \frac{\partial^2\varphi}{\partial u^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial v^2}$ ο τελεστής Laplace. Υπολογίστε την καμπυλότητα Gauss K για τις περιπτώσεις $E = \frac{4}{(1+u^2+v^2)^2}$, $E = \frac{4}{(1-u^2-v^2)^2}$ και $E = \frac{1}{u^2}$.

6.2 Βιβλιογραφία

M. Abate - F. Torena: *Curves and Surfaces*, Springer 2012.

C. Bär: *Elementary Differential Geometry*, Cambridge Univ. Press 2010.

Δ. Δεριζιώτης, Δ. Βάρσος, Ι. Εμμανουήλ, Μ. Μαλιάκας Α. Μελάς Ο. Ταλέλλη *Μια Εισαγωγή στην Γραμμική Άλγεβρα*, Εκδ. Σοφία, 2012

M. P. do Carmo: *Differential Geometry of Curves and Surface*, Prentice-Hall 1976.

J. Oprea: *Differential Geometry and Its Applications*, The Mathematical Assocation of America, 2007.

Β. Ι. Παπαντωνίου: *Διαφορική Γεωμετρία*, Εκδ. Πανεπιστ. Πατρών, Πάτρα, 2013.

A. Pressley: *Elementary Differential Geometry*, Second Edition, Springer 2010. Μετάφραση: *Στοιχειώδης Διαφορική Γεωμετρία*, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, Κρήτη 2012.