Τίτλος Μαθήματος: Διαφορική Γεωμετρία

Ενότητα: Καμπύλες στο επίπεδο $\mathbb{R}^2$

Όνομα Καθηγητή: Ανδρέας Αρβανιτογεώργος

Τμήμα: Μαθηματικών

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Πατρών**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Κεφάλαιο 1

Καμπύλες στο επίπεδο $\mathbb{R}^2$

Θεωρούμε τον n-διάστατο πραγματικό χώρο $\mathbb{R}^n = \{(x_1, \dots, x_n) \ : \ x_i \in \mathbb{R}\}$ εφοδιασμένον με το συνηθισμένο Ευκλείδειο εσωτερικό γινόμενο $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_0^+$

$$\langle x, y \rangle = x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n.$$

Αυτό ορίζει τη νόρμα (μήκος) $\| \cdot \| : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_0^+$ στον $\mathbb{R}^n$

$$\|x\| = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}.$$

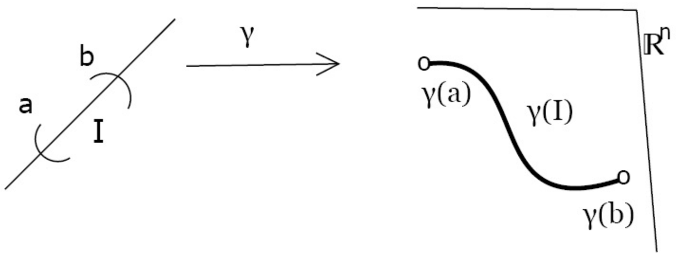
Ορισμός 1.1. *Μια παραμετρημένη καμπύλη (parametrized curve) στον $\mathbb{R}^n$ είναι μια διαφορίσιμη (λεία) απεικόνιση $\gamma : I \to \mathbb{R}^n$, όπου I οποιοδήποτε ανοικτό διάστημα της πραγματικής ευθείας $\mathbb{R}$. Η εικόνα $\gamma(I) \subset \mathbb{R}^n$ της απεικόνισης γ ονομάζεται ίχνος ή τροχιά της καμπύλης.*

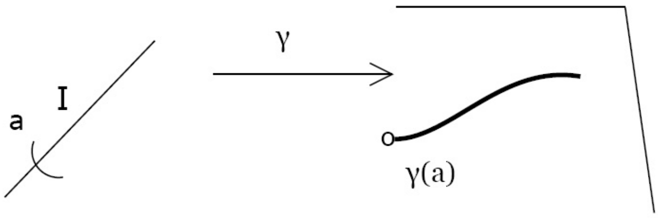
Παρατηρήσεις

1. Πολλές φορές χρησιμοποιούμε τον όρο "καμπύλη" τόσο για την απεικόνιση $\gamma : I \to \mathbb{R}^n$ όσο και για το ίχνος της.

2. Λέμε ότι η καμπύλη $\gamma : I \to \mathbb{R}^n$ αποτελεί μια παραμέτρηση (parametrization) του ίχνους $\gamma(I)$.

3. Επειδή $\gamma(t) \in \mathbb{R}^n$ θα είναι $\gamma(t) = (\gamma_1(t), \dots, \gamma_n(t))$, όπου $\gamma_i : I \to \mathbb{R}$ διαφορίσιμες συναρτήσεις.



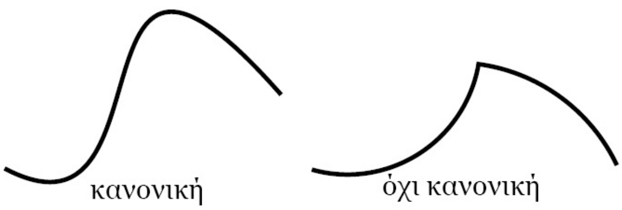


Ορισμός 1.2. 1. *Η <u>εφαπτομένη</u> (tangent) της καμπύλης $\gamma : I \to \mathbb{R}^n$ στο σημείο $\gamma(t)$ είναι η παράγωγος $\gamma'(t)$*

2. *Το <u>μήκος τόξου</u> (arclength) της καμπύλης γ ορίζεται ως*

$$L(\gamma) = \int_I \|\gamma'(t)\| dt \leqslant \infty.$$

3. *Μια καμπύλη ονομάζεται <u>κανονική</u> (ή ομαλή)(regular) εάν $\gamma'(t) \neq 0$ για κάθε $t \in I$.*

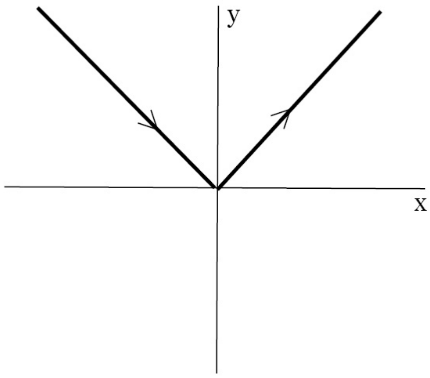


Από εδώ και στο εξής όταν γράφουμε "καμπύλη" θα εννοούμε "κανονική καμπύλη".

Παραδείγματα

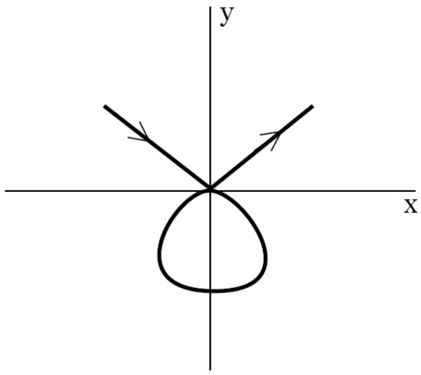
1. Έστω $p \neq q$ δύο σημεία του $\mathbb{R}^2$. Η απεικόνιση $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $\gamma(t) = (1-t)p + tq$ αποτελεί μια παραμέτρηση της <u>ευθείας</u> που διέρχεται απο τα σημεία $p = \gamma(0)$ και $q = \gamma(1)$.

2. Η απεικόνιση $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $\gamma(t) = (t, |t|)$ δεν είναι μια παραμετρημένη καμπύλη στο $\mathbb{R}^2$.



3. Η απεικόνιση $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2,\ \gamma(t) = (t^3 - 4t, t^2 - 4)$ ορίζει μια λεία καμπύλη στο επίπεδο.

Η απεικόνιση αυτή δεν είναι $1-1$ $(\gamma(2) = \gamma(-2) = 0)$ αλλά αυτό δεν μας δημιουργεί πρόβλημα.

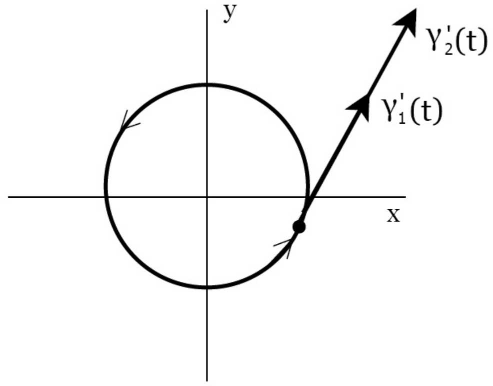


4. Η καμπύλη $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2,\ \gamma(t) = (t^3, t^2)$ δεν είναι κανονική, επειδή $\gamma'(0) = (0, 0)$.

5. Έστω $p \in \mathbb{R}^2$ και $r > 0$. Τότε η απεικόνιση $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2,\ \gamma(t) = p + r(\cos t, \sin t)$ αποτελεί μια παραμέτρηση του κύκλου με κέντρο το σημείο p και ακτίνα r. Το μήκος της γ στο διάστημα $[0, 2\pi)$ είναι

$$L(\gamma|_{[0,2\pi)}) = \int_0^{2\pi} \|\gamma'(t)\| dt = r \int_0^{2\pi} dt = 2\pi r.$$

6. Οι απεικονίσεις $\gamma_1, \gamma_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2,\ \gamma_1(t) = (\cos t, \sin t),\ \gamma_2(t) = (\cos(2t), \sin(2t))$ αποτελούν δύο παραμετρήσεις του κύκλου με κέντρο $(0, 0)$ και ακτίνα 1, αλλά το διάνυσμα ταχύτητας της γ_2 έχει διπλάσιο μήκος από αυτό της γ_1.



Έστω $\gamma : I \to \mathbb{R}^n$ μια κανονική καμπύλη, $t_0 \in I$. Για δοθέν $t \in I$ θεωρούμε το μήκος τόξου

$$s(t) = L(\gamma|_{(t_0,t)}) = \int_{t_0}^{t} \|\gamma'(u)\| du \tag{1}$$

Ας υποθέσουμε ότι έχουμε την (βολική) περίπτωση όπου η παράμετρος t της καμπύλης είναι η ίδια το μήκος τόξου από το σταθερό σημείο t_0, δηλαδή να ισχύει $s(t) = t - t_0$. Τότε λόγω της (1) προκύπτει ότι

$$1 = \frac{ds}{dt} = \|\gamma'(t)\|,$$

δηλαδή η ταχύτητα της γ έχει μοναδιαίο μέτρο. Αντίστροφα, εάν υποθέσουμε ότι για μια καμπύλη $\gamma : I \to \mathbb{R}^n$ ισχύει $\|\gamma'(t)\| = 1$, τότε πάλι λόγω της (1) έχουμε ότι $s(t) = \int_{t_0}^{t} 1du = t - t_0$, δηλαδή η παράμετρος t είναι το μήκος της γ από κάποιο αρχικό σημείο t_0.

Λόγω της ιδιαίτερης αυτής περίπτωσης οδηγούμαστε στον παρακάτω ορισμό.

Ορισμός 1.3. *Μια λεία καμπύλη $\gamma : I \to \mathbb{R}^n$ έχει (ή επιδέχεται) παραμέτρηση κατά μήκος τόξου εάν $\|\dot{\gamma}(s)\| = 1$, για κάθε $s \in I$.*

Παρατηρήσεις

1. Όταν η γ έχει παραμέτρηση κατά μήκος τόξου θα γράφουμε $\dot{\gamma}(s)$ αντί $\gamma'(s)$. Στην περιπτωση αυτή θα συμβολίζουμε την παράμετρο της γ με s αντί με t.

2. Το μέτρο $\|\gamma'(t)\|$ ονομάζεται **ταχύτητα** της γ, οπότε μια καμπύλη με παραμέτρηση κατά μήκος τόξου έχει μοναδιαία ταχύτητα.

3. Αν $\mathbb{S}^{n-1} = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_1^2 + \cdots + x_n^2 = 1\}$ είναι η μοναδιαία σφαίρα στον $\mathbb{R}^n$, τότε για μια καμπύλη γ με παραμέτρηση κατά μήκος τόξου ισχύει ότι οι εφαπτόμενες $\dot{\gamma}(s)$ είναι στοιχεία της $\mathbb{S}^{n-1}$ (αντί απλώς του $\mathbb{R}^n$).

Ισχύει η εξής πρόταση από την διανυσματική ανάλυση.

Πρόταση 1.1. *Έστω $f : I \to \mathbb{R}^n$ τέτοια ώστε $\|f(t)\| = 1$. Τότε ισχύει $\langle f'(t), f(t)\rangle = 0$, δηλαδή είτε $f'(t) = 0$ είτε το διάνυσμα $f'(t)$ είναι κάθετο στο $f(t)$ για κάθε $t \in I$.*

Συμπέρασμα:
Αν μια καμπύλη $\gamma : I \to \mathbb{R}^n$ έχει παραμέτρηση κατά μήκος τόξου, τότε είτε $\gamma''(t) = 0$ είτε το διάνυσμα $\gamma''(t)$ είναι κάθετο στο $\gamma'(t)$.

Το ενδιαφέρον είναι ότι κάθε κανονική καμπύλη επιδέχεται μια παραμέτρηση κατά μήκος τόξου.

Θεώρημα 1.1. *Έστω $\gamma : (\alpha, \beta) \to \mathbb{R}^n$ μια κανονική καμπύλη του $\mathbb{R}^n$. Τότε το ίχνος $\gamma((\alpha, \beta))$ της γ είναι δυνατόν να παραμετροποιηθεί κατά μήκος τόξου.*

Συμβολίζουμε με $M_{n\times n}(\mathbb{R})$ το σύνολο όλων των πραγματικών $n \times n$ πινάκων.

Ορισμός 1.4. *Μια απεικόνιση $\Phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ονομάζεται Ευκλείδεια (ή στερεά) κίνηση (rigit motion) εάν έχει τη μορφή*

$$\Phi(x) = Ax + b, \text{ όπου } b \in \mathbb{R}^n \text{ και } A \in O(n) = \{X \in M_{n\times n}(\mathbb{R}) : XX^t = I_n\}^1$$

Μια Ευκλείδεια κίνηση Φ διατηρεί τον προσανατολισμό εάν

$$A \in SO(n) = \{X \in O(n) : \det X = 1\}.$$

Τα σύνολα $O(n)$ και $SO(n)$ έχουν δομή ομάδας και ονομάζονται ορθογώνια και ειδική ορθογώνια ομάδα αντίστοιχα.

Άσκηση: Γράψτε αναλυτικά τα στοιχεία των ομάδων $O(2)$ και $SO(2)$.

Περιοριζόμαστε τώρα σε καμπύλες του επιπέδου $\mathbb{R}^2$. Έστω $\gamma : I \to \mathbb{R}^2$ μια κανονική καμπύλη *με παραμέτρηση κατά μήκος τόξου*. Ορίζουμε το **εφαπτόμενο διάνυσμα** (ή εφαπτομένη) κατά μήκος της γ ως

$$T : I \to S^1, \quad T(s) = \dot{\gamma}(s)$$

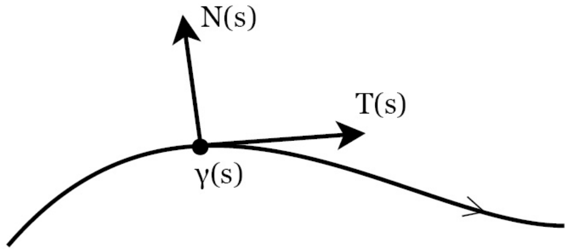
και το **κάθετο διάνυσμα** κατά μήκος της γ ως

$$N : I \to S^1, \quad N(s) = R \circ T(s),$$

όπου $R : \mathbb{R}^2 \to S^2$ η (γραμμική) απεικόνιση στροφής κατά γωνία $\frac{\pi}{2}$ που δίνεται ως

$$R\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2.$$

Αποδεικνύεται εύκολα ότι για κάθε $s \in I$ το σύνολο $\{T(s), N(s)\}$ αποτελεί μια ορθοκανονική βάση του $\mathbb{R}^2$, η οποία ονομάζεται **πλαίσιο του Frenet** κατά μήκος της



καμπύλης γ.

Θα ορίσουμε τώρα ένα σημαντικό μέτρο της κύρτωσης μιας επίπεδης καμπύλης.

Ορισμός 1.5. *Έστω $\gamma : I \to \mathbb{R}^2$ μια κανονική καμπύλη με παραμέτρηση κατά μήκος τόξου. Η καμπυλότητα (curvature) της γ ορίζεται ως η συνάρτηση $\kappa : I \to \mathbb{R}_0^+$*

$$\kappa(s) = \langle \dot{T}(s), N(s) \rangle = \langle \ddot{\gamma}(s), N(s) \rangle$$

Παρατηρήσεις

1. Η καμπυλότητα όπως ορίστηκε παραπάνω αποτελεί ένα μέτρο του πόσο γρήγορα το μοναδιαίο εφαπτόμενο διάνυσμα $T(s) = \dot{\gamma}(s)$ στρέφεται προς τη διεύθυνση του κάθετου διανύσματος $N(s)$ ή ισοδύναμα απομακρύνεται από τον φορέα του $T(s)$.

2. Για $\kappa(s) \neq 0$ η **ακτίνα καμπυλότητας** της γ στο σημείο $\gamma(s)$ ορίζεται ως

$$\rho(s) = \frac{1}{\kappa(s)}.$$

Θεώρημα 1.2. *Έστω $\gamma : I \to \mathbb{R}^2$ καμπύλη με παραμέτρηση κατά μήκος τόξου. Τότε το πλαίσιο Frenet ικανοποιεί το παρακάτω σύστημα συνήθων διαφορικών εξισώσεων.*

$$\begin{pmatrix} \dot{T}(s) \\ \dot{N}(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \kappa(s) \\ -\kappa(s) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T(s) \\ N(s) \end{pmatrix}. \tag{1.1}$$

Θεώρημα 1.3. *Έστω $\gamma : I \to \mathbb{R}^2$ καμπύλη με παραμέτρηση κατά μήκος τόξου. Τότε η καμπυλότητα $\kappa : I \to \mathbb{R}$ είναι ταυτοτικά μηδέν εάν και μόνο εάν το ίχνος $\gamma(I)$ της καμπύλης είναι τμήμα ευθείας (ή και ολόκληρη ευθεία).*

Κάθε επίπεδη καμπύλη καθορίζεται πλήρως (μη λαμβάνοντας υπόψη προσανατολισμένες στερεές κινήσεις του επιπέδου) από την καμπυλότητά της, όπως αναφέρεται στο παρακάτω θεώρημα.

[1]Εδώ με I_n συμβολίζουμε τον $n \times n$ ταυτοτικό πίνακα

Θεώρημα 1.4. *Έστω $\kappa : I \to \mathbb{R}$ μια διαφορίσιμη απεικόνιση. Τότε υπάρχει κανονική καμπύλη $\gamma : I \to \mathbb{R}^2$ με παραμέτρηση κατά μήκος τόξου η οποία να έχει καμπυλότητα κ. Επιπλέον, εάν $\tilde{\gamma} : I \to \mathbb{R}^2$ είναι μια άλλη τέτοια καμπύλη, τότε υπάρχει πίνακας $A \in SO(2)$ και διάνυσμα $b \in \mathbb{R}^2$ τέτοια ώστε*

$$\gamma(s) = A\tilde{\gamma}(s) + b.$$

Στη διαφορική γεωμετρία το ενδιαφέρον μας εστιάζεται σε εκείνες τις ιδιότητες γεωμετρικών αντικειμένων, οι οποίες εξαρτώνται από την παραμέτρηση. Συνεπώς, η καμπυλότητα μιας καμπύλης δεν θα πρέπει να εξαρτάται από την επιλογή της παραμέτρησης.

Ορισμός 1.6. *Έστω $\gamma : I \to \mathbb{R}^2$ μια κανονική καμπύλη (όχι απαραίτητα με παραμέτρηση κατά μήκος τόξου). Έστω $t : J \to I$ μια γνησίως αύξουσα συνάρτηση κλάσης C^2 τέτοια ώστε η σύνθεση $\alpha = \gamma \circ t : J \to \mathbb{R}^2$ να είναι μια καμπύλη με παραμέτρηση κατά μήκος τόξου. Ορίζουμε την καμπυλότητα $\kappa : I \to \mathbb{R}$ της $\gamma : I \to \mathbb{R}^2$ ως*

$$\kappa(t(s)) = \tilde{\kappa}(s),$$

όπου $\tilde{\kappa} : J \to \mathbb{R}$ η καμπυλότητα της α.

Πρόταση 1.2. *Έστω $\gamma : I \to \mathbb{R}^2$ κανονική καμπύλη. Τότε η καμπυλότητα δίνεται από τη σχέση*

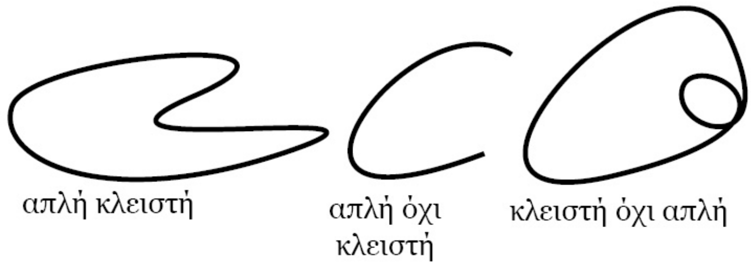
$$\kappa(t) = \frac{\det(\gamma'(t), \gamma''(t))}{\|\gamma'(t)\|^3}.$$ [2]

Πόρισμα 1.1. *Έστω $\gamma : I \to \mathbb{R}^2$ κανονική καμπύλη. Τότε το ίχνος $\gamma(I)$ της γ είναι τμήμα ευθείας εάν και μόνο εάν τα διανύσματα $\gamma'(t)$ και $\gamma''(t)$ είναι γραμμικώς εξαρτημένα για κάθε $t \in I$.*

Μια ενδιαφέρουσα εφαρμογή της θεωρίας των επίπεδων καμπυλών αποτελεί η ισοπεριμετρική ανισότητα. Η ανισότητα αυτή απαντά στο εξής απλό πρόβλημα, το οποίο είχε διατυπωθεί στην αρχαιότητα και η λύση του ήταν γνωστή στους αρχαίους Έλληνες: "ποιό είναι το σχήμα που πρέπει να λάβει ένα κλειστό σχοινί στο επίπεδο, ώστε το εμβαδό που περικλείει να είναι μέγιστο δυνατό;". Η πρώτη αυστηρή απόδειξη της ισοπεριμετρικής ανισότητας δόθηκε τον 19ο αιώνα. Αυτή έχει πολλές σύγχρονες διατυπώσεις και εξακολουθεί να ελκύει το ενδιαφέρον των μαθηματικών από διάφορες σκοπιές. Προκειμένου να την διατυπώσουμε χρειαζόμαστε τα εξής εισαγωγικά.

[2] Για δύο διανύσματα $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$, $\beta = (\beta_1, \beta_2)$ συμβολίζουμε $\det(\alpha, \beta) = \det \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \beta_1 & \beta_2 \end{pmatrix}$.

Ορισμός 1.7. *Μια συνεχής απεικόνιση $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ αποτελεί παραμέτρηση μιας απλής κλειστής καμπύλης εάν η γ είναι περιοδική με περίοδο $L > 0$ και ο περιορισμός $\gamma|_{[0,L)} \to \mathbb{R}$ είναι απεικόνιση $1-1$. (Ισοδύναμα $\gamma(t) = \gamma(t')$ εάν και μόνο εάν $t' - t = kL$ για $k \in \mathbb{Z}$).*



Το παρακάτω θεώρημα είναι απλό στη διατύπωσή του, αλλά δύσκολο στην απόδειξη.

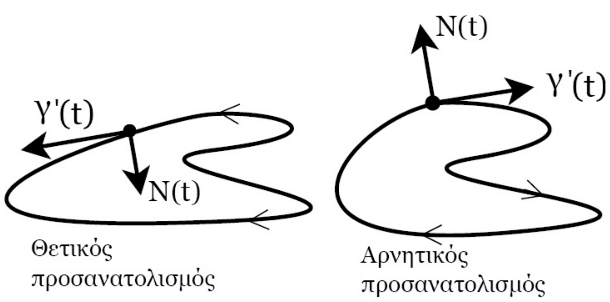
Θεώρημα 1.5. *(**Κλειστής καμπύλης του Jordan**)*
Έστω ότι η συνεχής απεικόνιση $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ αποτελεί παραμέτρηση μιας απλής, κλειστής καμπύλης. Τότε το υποσύνολο $\mathbb{R}^2 \setminus \gamma(\mathbb{R})$ του επιπέδου αποτελείται από ακριβώς δύο συνεκτικές συνιστώσες.

Η μια συνιστώσα είναι φραγμένη και ονομάζεται **εσωτερικό** $\mathrm{Int}(\gamma)$ της γ και η άλλα δεν είναι φραγμένη και ονομάζεται **εξωτερικό** $\mathrm{Ext}(\gamma)$ της γ.

Ορισμός 1.8. *Μια συνεχής απεικόνιση $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ η οποία αποτελεί παραμέτρηση μιας απλής κλειστής καμπύλης έχει θετικό προσανατολισμό εάν το κάθετο διάνυσμα*

$$N(t) = R \circ \gamma'(t) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \gamma'(t)$$

έχει φορά προς το εσωτερικό $\mathrm{Int}(\gamma)$ της γ για κάθε $t \in \mathbb{R}$. Διαφορετικά η γ έχει αρνητικό προσανατολισμό.



Θεώρημα 1.6. *(Ισοπεριμετρική Ανισότητα)*
Έστω C μια κανονική, απλή και κλειστή καμπύλη του επιπέδου με μήκος L. Έστω A το εμβαδό της περιοχής που περικλείεται από την C. Τότε ισχύει η σχέση

$$4\pi A \leq L^2.$$

Η ισότητα ισχύει εάν και μόνο εάν η καμπύλη C είναι κύκλος.

1.1 Ασκήσεις

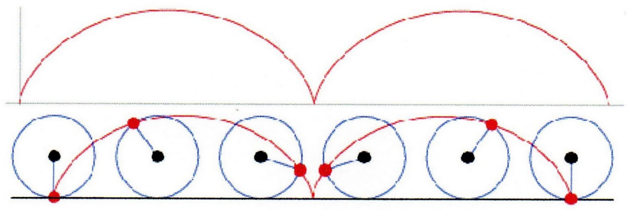
1. Η κυκλοειδής καμπύλη είναι η καμπύλη του επιπέδου με παραμέτρηση

$$\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2 \quad \gamma(t) = \alpha(t, 1) + \alpha(-\sin t, -\cos t), \; \alpha > 0.$$

a. Περιγράψτε την καμπύλη γεωμετρικά

b. Υπολογίστε το μήκος τόξου $\sigma(t) = \int_0^t \left\|\gamma'(u)\right\| du$

c. Είναι η καμπύλη κανονική;



Σχήμα 1.1: κυκλοειδής καμπύλη

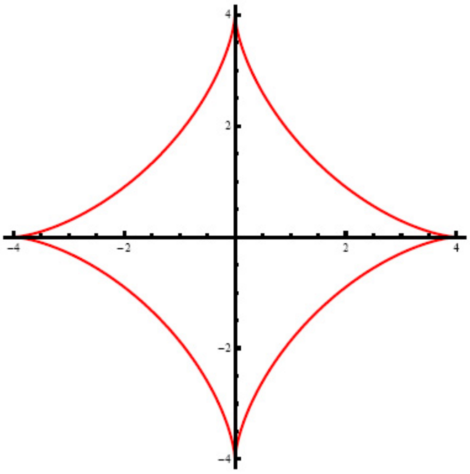
2. Η αστεροειδής καμπύλη είναι η καμπύλη του επιπέδου με παραμέτριση $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ $\gamma(t) = (4\alpha \cos^3 t, 4\alpha \sin^3 t) = 3\alpha(\cos t, \sin t) + \alpha(\cos(3t), -\sin(3t))$, $\alpha > 0$.

a. Περιγράψτε την καμπύλη γεωμετρικά

b. Υπολογίστε το μήκος τόξου $\sigma(t) = \int_0^t \left\|\gamma'(u)\right\| du$

c. Είναι η καμπύλη κανονική;

3. Δίνονται οι καμπύλες $\gamma_1, \gamma_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ με $\gamma_1 = r(\cos(\alpha t), \sin(\alpha t))$, $\gamma_2 = r(\cos(-\alpha t), \sin(-\alpha t))$. Υπολογίστε τις καμπυλότητες κ_1, κ_2 των γ_1, γ_2 αντίστοιχα. Βρείτε μια στερεά κίνηση $\Phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ τέτοια ώστε $\gamma_2 = \Phi \circ \gamma_1$. Διατηρεί η Φ τον προσανατολισμό;



Σχήμα 1.2: αστεροειδής καμπύλη

4. Έστω $\gamma : I \to \mathbb{R}^2$ κανονική καμπύλη με παραμέτρηση κατά μήκος τόξου και με πλαίσιο Frenet $\{T(s), N(s)\}$. Για $\lambda \in \mathbb{R}$ ορίζουμε την <u>παράλληλη καμπύλη</u>

$$\gamma_\lambda(t) = \gamma(t) + \lambda N(t).$$

Υποθέτουμε ότι ισχύει $|\lambda\kappa| < 1$. Εκφράστε την καμπυλότητα κ_λ των καμπυλών γ_λ συναρτήσει της καμπυλότητας κ της καμπύλης γ.

5. Έστω $\gamma : I \to \mathbb{R}^2$ κανονική καμπύλη του $\mathbb{R}^2$. Αποδείξτε ότι η καμπυλότητα ικανοποιεί την σχέση

$$\kappa(t) = \frac{\det\left(\gamma'(t), \gamma''(t)\right)}{\|\gamma'(t)\|^3}.$$

6. Έστω $\gamma : I \to \mathbb{R}^2$ η καμπύλη του $\mathbb{R}^2$ με $\gamma(t) = (\sin t, \sin(2t))$. Είναι η γ κανονική, απλή και κλειστή;

7. Έστω ότι η απεικόνιση $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ είναι μια παραμέτρηση κατά μήκος τόξου μιας θετικά προσανατολισμένης, απλής και κλειστής καμπύλης. Δείξτε ότι αν η περίοδος της γ είναι $L > 0$, τότε η καμπυλότητα $\kappa(s)$ της γ ικανοποιεί τη σχέση

$$\int_0^L \kappa(s)ds = 2\pi.$$

Το ολοκλήρωμα στο αριστερό μέλος ονομάζεται <u>ολική καμπυλότητα</u> της γ.

1.2 Βιβλιογραφία

M. Abate - F. Torena: *Curves and Surfaces*, Springer 2012.

C. Bär: *Elementary Differential Geometry*, Cambridge Univ. Press 2010.

M. P. do Carmo: *Differential Geometry of Curves and Surface*, Prentice-Hall 1976.

J. Oprea: *Differential Geometry and Its Applications*, The Mathematical Assocation of America, 2007.

Β. Ι. Παπαντωνίου: *Διαφορική Γεωμετρία*, Εκδ. Πανεπιστ. Πατρών, Πάτρα, 2013.

A. Pressley: *Elementary Differential Geometry*, Second Edition, Springer 2010. Μετάφραση: *Στοιχειώδης Διαφορική Γεωμετρία*, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, Κρήτη 2012.