Τίτλος Μαθήματος: Διαφορική Γεωμετρία

Ενότητα: Το Θαυμαστό Θεώρημα (Theorema Egregium)

Όνομα Καθηγητή: Ανδρέας Αρβανιτογεώργος

Τμήμα: Μαθηματικών

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Πατρών**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο

ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ

ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Κεφάλαιο 7

Το Θαυμαστό Θεώρημα (Theorema Egregium)

Στο Κεφάλαιο 6 είδαμε ότι η καμπυλότητα Gauss σε οποιοδήποτε σημείο μιας επιφάνειας M δίνεται από τη σχέση $K = \frac{eg-f^2}{EG-F^2}$, δηλαδή εξαρτάται και από την πρώτη και από την δεύτερη θεμελιώδη μορφή της επιφάνειας.

Αυτό το οποίο απέδειξε ο Gauss και το θεώρησε πραγματικά ως "θαυμαστό αποτέλεσμα" είναι ότι η ποσότητα $eg - f^2$ μπορεί να εκφραστεί συναρτήσει των E, F, G (αν και από μόνα τους τα e, f, g δεν εκφράζονται έτσι). Αυτό σημαίνει ότι η καμπυλότητα Gauss μιας επιφάνειας μπορεί να μετρηθεί από έναν παρατηρητή ο οποίος βρίσκεται **επάνω** στην επιφάνεια (άρα δεν χρειάζεται να βρίσκεται εκτός επιφάνειας).

Θεώρημα 7.1. *(Θαυμαστό Θεώρημα) Έστω M κανονική επιφάνεια του $\mathbb{R}^3$. Τότε η καμπυλότητα Gauss K της M καθορίζεται πλήρως από την πρώτη θεμελιώδη μορφή. Ισοδύναμα, η καμπυλότητα Gauss παραμένει αναλλοίωτη όταν η επιφάνεια παραμορφώνεται χωρίς τέντωμα.*

Πόρισμα 7.1. *Δεν υπάρχει τοπική παραμέτρηση της σφαίρας $\mathbb{S}^2$ η οποία να διατηρεί τις αποστάσεις. Ισοδύναμα, δεν είναι δυνατόν να γίνει ένα κομμάτι της σφαίρας επίπεδο, ώστε τα μήκη να διατηρούνται.*

Απόδειξη. Έστω ότι υπάρχει μια τοπική παραμέτρηση $X : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{S}^2$ η οποία να είναι ισομετρία. Τότε η καμπυλότητα Gauss του επιπέδου και της σφαίρας θα ήταν ίσες. Αλλά γνωρίζουμε ότι για τη σφαίρα η καμπυλότητα Gauss είναι σταθερή $K = 1 \neq 0$. □

Από την απόδειξη του θαυμαστού θεωρήματος (την οποία δεν παραθέτουμε εδώ) προκύπτει και η εξής (αναμενόμενη πλέον) έκφραση της K συναρτήσει των E, F, G

και των μερικών παραγώγων τους.

$$K = \frac{\det\begin{pmatrix} -\frac{1}{2}E_{vv} + F_{uv} - \frac{1}{2}G_{uu} & \frac{1}{2}E_u & F_u - \frac{1}{2}E_v \\ F_v - \frac{1}{2}G_u & E & F \\ \frac{1}{2}G_v & F & G \end{pmatrix} - \det\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2}E_v & \frac{1}{2}G_u \\ \frac{1}{2}E_v & E & F \\ \frac{1}{2}G_u & F & G \end{pmatrix}}{\left(EG - F^2\right)^2}$$

Το παρακάτω (δύσκολο) θεώρημα απαντά στο ερώτημα πώς σχετίζονται δύο επιφάνειες με ίδιες την πρώτη και δεύτερη θεμελιώδη μορφή.

Θεώρημα 7.2. *Έστω M_1, M_2 δύο κανονικές επιφάνειες του $\mathbb{R}^3$ και έστω $\phi : M_1 \to M_2$ μια αμφιδιαφόριση που διατηρεί την πρώτη και δεύτερη θεμελιώδη μορφή των M_1 και M_2 αντίστοιχα, δηλαδή ισχύει*

$$\begin{aligned} \mathrm{I}_p(X,Y) &= \mathrm{I}_{\phi(p)}\big(d\phi_p(X), d\phi_p(Y)\big) \\ \mathrm{II}_p(X,Y) &= \mathrm{II}_p\big(d\phi_p(X), d\phi_p(Y)\big) \end{aligned}$$

για κάθε $p \in M_1, X, Y \in T_pM_1$. Τότε η $\phi : M_1 \to M_2$ είναι ο περιορισμός $\phi = \Phi|_{M_1} : M_1 \to M_2$ μιας στερεάς κίνησης $\Phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ του $\mathbb{R}^3$ περιορισμένη στην επιφάνεια M_1.

Κλείνουμε με ένα σημαντικό θεώρημα χαρακτηρισμού επιφανειών με σταθερή καμπυλότητα Gauss.

Θεώρημα 7.3. *Έστω M μια επιφάνεια με σταθερή καμπυλότητα Gauss. Τότε κάθε σημείο της M περιέχεται σε έναν χάρτη (περιοχή) ο οποίος είναι ισομετρικός είτε με ένα επίπεδο, είτε με μια σφαίρα, είτε την ψευδοσφαίρα. Επιπλέον, εάν η M είναι συμπαγής, τότε η επιφάνεια είναι μια σφαίρα.*

7.1 Βιβλιογραφία

M. Abate - F. Torena: *Curves and Surfaces*, Springer 2012.

C. Bär: *Elementary Differential Geometry*, Cambridge Univ. Press 2010.

M. P. do Carmo: *Differential Geometry of Curves and Surface*, Prentice-Hall 1976.

J. Oprea: *Differential Geometry and Its Applications*, The Mathematical Assocation of America, 2007.

Β. Ι. Παπαντωνίου: *Διαφορική Γεωμετρία*, Εκδ. Πανεπιστ. Πατρών, Πάτρα, 2013.

A. Pressley: *Elementary Differential Geometry*, Second Edition, Springer 2010. Μετάφραση: *Στοιχειώδης Διαφορική Γεωμετρία*, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, Κρήτη 2012.