Τίτλος Μαθήματος: Διαφορική Γεωμετρία

Ενότητα: Η πρώτη θεμελιώδης μορφή

Όνομα Καθηγητή: Ανδρέας Αρβανιτογεώργος

Τμήμα: Μαθηματικών

Άδειες Χρήσης

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Πατρών**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Κεφάλαιο 5

Η πρώτη θεμελιώδης μορφή

Ένας από τους κεντρικούς στόχους της διαφορικής γεωμετρίας είναι η ανάπτυξη ε-νός αποτελεσματικού τρόπου μέτρησης της καμπυλότητας γεωμετρικών αντικειμένων τα οποία δεν είναι επίπεδα (π.χ. επιφάνειες στο χώρο $\mathbb{R}^3$). Για το σκοπό αυτό θα χρειαστούμε νέα εργαλεία και ένα από αυτά είναι η εισαγωγή μιας θετικά ορισμένης τετραγωνικής μορφής σε κάθε εφαπτόμενο επίπεδο μιας επιφάνειας. Με τον τρόπο αυτό θα είμαστε σε θέση να ορίσουμε μήκη καμπυλών στην επιφάνεια, μήκη και γωνίες διανυσμάτων στον εφαπτόμενο χώρο καθώς και εμβαδών επάνω στην επιφάνεια. Οι ποσότητες αυτές αποτελούν **εσωτερικές** (instrinsic) ποσότητες μιας επιφάνειας, δηλαδή ο υπολογισμός τους προκύπτει από μετρήσεις **επάνω** στην επιφάνεια και όχι θεωρώντας την επιφάνεια ως υποσύνολο του $\mathbb{R}^3$.

Ορισμός 5.1. *Έστω M μια κανονική επιφάνεια του $\mathbb{R}^3, p \in M$ και έστω $\langle \cdot, \cdot \rangle_p$ το εσωτερικό γινόμενο στον εφαπτόμενο χώρο T_pM το οποίο επαγεται από το κανονικό εσωτερικό γινόμενο $\langle \cdot, \cdot \rangle$ του $\mathbb{R}^3$. Η πρώτη θεμελιώδης μορφή (first fundmental form) είναι η (θετικά ορισμένη) τετραγωνική μορφή*

$$\mathrm{I}_p : T_pM \to \mathbb{R}, \quad I_p(Z) = \langle Z, Z \rangle_p.$$

Παρατηρήσεις

1. Από εδώ και στο εξής θα γράφουμε για το επαγόμενο εσωτερικό γινόμενο του $\mathbb{R}^3$ στον $T_pM, \langle \cdot, \cdot \rangle$ αντί $\langle \cdot, \cdot \rangle_p$.

2. Η πρώτη θεμελιώδης μορφή καθορίζει πλήρως το εσωτερικό γινόμενο $\langle \cdot, \cdot \rangle_p$ στον T_pM, μέσω της ταυτότητας πολικότητας:

$$\langle Z, W \rangle_p = \frac{1}{2}\Big(\mathrm{I}_p(Z+W) - \mathrm{I}_p(Z) - \mathrm{I}_p(W)\Big), \text{ για κάθε } Z, W \in T_pM.$$

3. Οι ιδιότητες μιας επιφάνειας οι οποίες εξαρτώνται μόνο από την πρώτη θεμελιώδη μορφή ονομάζονται **εσωτερικές** ιδιότητες της επιφάνειας.

Η πρώτη θεμελιώδης μόρφη μας επιτρέπει να ορίσουμε το μήκος μιας καμπύλης σε μια επιφάνεια.

Ορισμός 5.2. *Έστω M κανονική επιφάνεια και $\gamma : I \to M$ μια καμπύλη κλάσης C^1. Το μήκος της γ ορίζεται ως*

$$L(\gamma) = \int_I \sqrt{\langle \gamma'(t), \gamma'(t) \rangle} dt.$$

Επιπλέον, μπορούμε να ορίσουμε μια συνάρτηση απόστασης d στην M, ώστε το ζεύγος (M, d) να είναι ένας **μετρικός χώρος** (metric space).

Πρόταση 5.1. *Έστω M κανονική επιφάνεια, p, q δύο σημεία της M. Θεωρούμε το σύνολο C_{pq} όλων των καμπυλών $\gamma : [0,1] \to M$ κλάσης C^1 με την ιδιότητα $\gamma(0) = p, \gamma(1) = q$. Ορίζουμε τη συνάρτηση*

$$d : M \times M \to \mathbb{R}_0^+, \ d(p,q) = \inf\big\{L(\gamma) : \gamma \in C_{pq}\big\}.$$

Τότε το σύνολο (M, d) είναι ένας μετρικός χώρος, δηλαδή για κάθε $p, q, r \in M$ ισχύουν τα εξής:

i. $d(p,q) \geq 0$

ii. $d(p,q) = 0 \Leftrightarrow p = q$

iii. $d(p,q) = d(q,p)$

iv. $d(p,q) \leq d(p,r) + d(r,q)$.

Ορισμός 5.3. *Μια αμφιδιαφόριση $\phi : M_1 \to M_2$ μεταξύ δύο κανονικών επιφανειών του $\mathbb{R}^3$ ονομάζεται ισομετρία (isometry) εάν για κάθε $p \in M_1$ το διαφορικό $d\phi_p : T_pM_1 \to T_{\phi(p)}M_2$ διατηρεί τις πρώτες θεμελιώδεις μορφές των αντίστοιχων επιφανειών, δηλαδή*

$$\langle d\phi_p(Z), d\phi_p(W) \rangle = \langle Z, W \rangle \text{ για κάθε } Z, W \in T_pM_1.$$

Στην περίπτωση αυτή οι επιφάνειες M_1, M_2 ονομάζονται ισομετρικές (isometric).

Για κάθε λοιπόν επιφάνεια M έχουμε ορίσει σε κάθε εφαπτόμενο χώρο T_pM ($p \in M$) ένα εσωτερικό γινόμενο, το οποίο επάγεται από το συνηθισμένο εσωτερικό γινόμενο του $\mathbb{R}^3$. Το εσωτερικό αυτό γινόμενο μεταβάλλεται με την επιλογή του σημείου p (άρα και την επιλογή του εφαπτόμενου χώρου T_pM). Προκειμένου να ποσοτικοποιήσουμε αυτή τη μεταβολή, θα χρησιμοποιήσουμε μια τοπική παραμέτρηση της επιφάνειας και θα ορίσουμε κάποιες σημαντικές συναρτήσεις, τα θεμελιώδη ποσά πρώτης τάξης.

Έστω M μια κανονική επιφάνεια και $X : U \subset \mathbb{R}^2 \to M \subset \mathbb{R}^3$ μια τοπική παραμέτρηση της M. Τότε σε κάθε σημείο $X(u,v) \in X(U)$ ο εφαπτόμενος χώρος $T_pM \cong T_{(u,v)}X(U)$ παράγεται από τα διανύσματα $X_u(u,v), X_v(u,v)$.

Ορισμός 5.4. *Οι πραγματικές (διαφορίσιμες) συναρτήσεις $E, F, G : U \to \mathbb{R}$*

$$E(u,v) = \langle X_u, X_u \rangle,\ F(u,v) = \langle X_u, X_v \rangle,\ G(u,v) = \langle X_v, X_v \rangle$$

ονομάζονται θεμελιώδη ποσά πρώτης τάξης της επιφάνειας M για την παραμέτρηση

$$X : U \to M.$$

Παρατηρήσεις

1. Είναι χρήσιμο και θα το κάνουμε τακτικά, να εκφράζουμε τα θεμελιώδη ποσά πρώτης τάξης ως εξής: Θεωρούμε το διαφορικό $dX(u,v) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ και τον πίνακά του ως την συνάρτηση

$$[dX] : U \subset \mathbb{R}^2 \to M_{2\times 3}(\mathbb{R}),\ [dX](u,v) = \big(X_u, X_v\big)^t,$$

όπου A^t συμβολίζουμε τον ανάστροφο του πίνακα A. Τα διανύσματα X_u, X_v τα θεωρούμε ως διανύσματα-στήλη, συνεπώς το δεξί μέλος παραπάνω είναι ένας πραγματικός 2×3 πίνακας. Τότε τα θεμελιώδη ποσά πρώτης τάξης περιγράφονται μέσω της ισότητας πινάκων

$$\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} = [dX][dX]^t.$$

Εναλλακτικά, ο παραπάνω πίνακας στο δεξί μέλος συμβολίζεται και ως

$$\big(g_{ij}\big)(u,v) = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}.$$

2. Το επαγόμενο εσωτερικό γινόμενο $\langle \cdot, \cdot \rangle_p$ στον T_pM μπορεί πλέον να εκφραστεί με χρήση των συναρτήσεων E, F, G ως εξής: Έστω $Z = aX_u + bX_v, W = cX_u + dX_v \in T_pM$. Τότε

$$\begin{aligned} \langle Z, W \rangle_p &= \langle aX_u + bX_v, cX_u + dX_v \rangle_p \\ &= ac\langle X_u, X_u \rangle_p + (ad + bc)\langle X_u, X_v \rangle_p + bd\langle X_v, X_v \rangle_p \\ &= abE + (ad + bc)F + bdG. \end{aligned}$$

Συνεπώς, η πρώτη θεμελιώδης μορφή δίνεται ως

$$\begin{aligned} \mathrm{I}_p(Z) &= E(u,v)a^2 + 2F(u,v)ab + G(u,v)b^2 \\ &= (a,b)\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{5.1}$$

Η παραπάνω έκφραση γράφεται σε σύγχρονη γλώσσα

$$ds^2 = Edu^2 + 2fdudv + Gdv^2. \tag{$**$}$$

Η έκφραση $(**)$ ορίζει μια **μετρική** στην περιοχή παραμέτρησης U ως εξής: Για $q \in U$ ορίζουμε το εσωτερικό γινόμενο $ds_q^2 : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$ds_q^2\big(Z,W\big) = Z^t \begin{pmatrix} E(q) & F(q) \\ F(q) & G(q) \end{pmatrix} W.$$

Αποδεικνύεται ότι η αμφιδιαφόριση $X : U \to X(U) \subset M$ διατηρεί τα εσωτερικά γινόμενα ds_q^2 και $\langle \cdot, \cdot \rangle_{p=X(q)}$, συνεπώς είναι μια **(τοπική) ισομετρία**.

Συμπέρασμα

Η πρώτη θεμελιώδης μορφή στο (τμήμα) της επιφάνειας $X(U) \subset M$ επάγει μια μετρική στο $U \subset \mathbb{R}^2$. Κατόπιν αυτού, όπως θα φανεί εργότερα, η κύρτωση της M επάγει τοπικά μια γεωμετρία στον $\mathbb{R}^2$ (ενδεχομένως μη Ευκλείδεια).

Ορισμός 5.5. *Έστω M μια κανονική επιφάνεια, $X : U \to X(U) \subset M$ τοπική παραμέτρηση και έστω ότι το U είναι "μετρήσιμο" (measurable) υποσύνολο του $\mathbb{R}^2$. Το εμβαδό (area) του τμήματος επιφάνειας $X(U)$ ορίζεται ως*

$$\begin{aligned} A\big(X(U)\big) &= \int_U \sqrt{EG - F^2}dudv \\ &= \Big(\int_U \sqrt{\|X_u \times X_v\|}dudv\Big). \end{aligned}$$

Αποδεικνύεται ότι το εμβαδό δεν εξαρτάται από την επιλογή της παραμέτρησης του τμήματος $X(U)$ της επιφάνειας M.

Παράδειγμα 5.1. Έστω $M \subset \mathbb{R}^3$ το επίπεδο του $\mathbb{R}^3$ που διέρχεται από το σημείο $p_0 \in \mathbb{R}^3$ και είναι παράλληλο με τα γραμμικώς αναξάρτητα διανύσματα $\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2} \in \mathbb{R}^3$. Μια τοπική παραμέτρηση του M δίνεται ως

$$X(u,v) = p_0 + u\overrightarrow{v_1} + v\overrightarrow{v_2}.$$

Για κάθε $p \in M$ μια βάση του T_pM είναι η $\big\{X_u = \overrightarrow{v_1}, X_v = \overrightarrow{v_2}\big\}$, συνεπώς τα θεμελιώδη ποσά πρώτης τάξης είναι

$$E = \langle \overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_1} \rangle,\ F = \langle \overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2} \rangle,\ G = \langle \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_2} \rangle.$$

Αν $\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}$ επιλεγούν ως ορθοκανονικά διανύσματα, τότε $E = G = 1, F = 0$.

Παράδειγμα 5.2. Έστω M ο ορθός κυκλικός κύλινδρος ακτίνας 1 και με διαμήκη άξονα τον άξονα z. Μια τοπική παραμέτρηση του M δίνεται ως

$$X : (0, 2\pi) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3,\ X(u, v) = (\cos u, \sin u, v),$$

από όπου προκύπτει ότι $E = G = 1, F = 0$.

Παρατηρήστε ότι τα θεμελιώδη ποσά πρώτης τάξης είναι τα ίδια με αυτά του επιπέδου, συμβάν όχι τυχαίο.

Παράδειγμα 5.3. Έστω $X : U \to \mathbb{R}^3$ η τοπική παραμέτρηση $X(u, v) = (u, v, \sqrt{1 - u^2 - v^2})$ της σφαίρας $\mathbb{S}^2$ και $p = \big(u, v, X(u, v)\big) \in \mathbb{S}^2$. Τότε μια βάση του εφαπτόμενου χώρου $T_p\mathbb{S}^2$ είναι η

$$\big\{X_u(u, v), X_v(u, v)\big\} = \Big\{\big(1, 0, \frac{-u}{\sqrt{1 - u^2 - v^2}}\big), \big(0, 1, \frac{-v}{\sqrt{1 - u^2 - v^2}}\big)\Big\},$$

από όπου προκύπτει ότι

$$E = \frac{1 - v^2}{1 - u^2 - v^2},\ F = \frac{uv}{1 - u^2 - v^2},\ G = \frac{1 - u^2}{1 - u^2 - v^2}.$$

Ας χρησιμοποιήσουμε τώρα την εξής τοπική παραμέτρηση της σφαίρας $\mathbb{S}^2$. Έστω $U = \{(\theta, \phi) \in \mathbb{R}^2 : 0 < \theta < \pi, 0 < \phi < 2\pi\}$ και $Y : U \to \mathbb{R}^3$ με

$$Y(\theta, \phi) = \big(\sin\theta\cos\phi, \sin\theta\sin\phi, \cos\theta\big).$$

Τότε μια βάση του εφαπτόμενου χώρου $T_p\mathbb{S}^2$ στο σημείο $p = (\theta, \phi, Y(\theta, \phi))$ είναι η

$$\big\{Y_\theta, Y_\phi\big\} = \big\{(\cos\theta\cos\phi, \cos\theta\sin\phi, -\sin\theta), (-\sin\theta\sin\phi, \sin\theta\cos\phi, 0)\big\},$$

απ′ όπου προκύπτουν τα πιο χρηστικά θεμελιώδη ποσά πρώτης τάξης $E = 1, F = 0, G = \sin^2\theta$.

5.1 Ασκήσεις

1. Υπολογίστε την πρώτη θεμελιώδη μορφή της επιφάνειας M με παραμέτρηση $X : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \to$M, $X_a(r, \theta) = (r\sin a\cos(\frac{\theta}{\sin a}), r\sin a\sin(\frac{\theta}{\sin a}), r\cos a)$. Βρείτε μια εξίσωση της μορφής $f(x, y, z) = 0$ που να περιγράφει την επιφάνεια αυτή.

2. Βρείτε μια ισομετρική παραμέτρηση $X : \mathbb{R}^2 \to M$ του ορθού κυλίνδρου

$$M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}.$$

3. Αποδείξτε ότι η παραμέτρηση $X : \mathbb{R}^2 \to S^2$ του Mercator της σφαίρας $\mathbb{S}^2$ με

$$X(u,v) = (\frac{\cos v}{\cosh u}, \frac{\sin v}{\cosh u}, \frac{\sinh u}{\cosh u})$$

είναι σύμμορφη.

4. Αποδείξτε ότι η πρώτη θεμελιώδης μορφή μιας κανονικής επιφάνειας M του $\mathbb{R}^3$ παραμένει αναλλοίωτη κάτω απο στερεές κινήσεις

5. Έστω $X, Y : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ παραμετρήσεις δύο κανονικών επιφανειών που δίνονται ως $X(u,v) = (\cosh u \cos v, \cosh u \sin v, u)$, $Y(u,v) = (\sinh u \cos v, \sinh u \sin v, v)$. Υπολογίστε την πρώτη θεμελιώδη μορφή των X και Y. Στη συνέχεια βρείτε εξισώσεις της μορφής $f(x,y,z) = 0$ που να περιγράφουν τις επιφάνειες αυτές.

6. Υπολογίστε το εμβαδό του τμήματος του παραβολοειδούς εκ περιστροφής $z = x^2 + y^2$ με $z \leq 1$ και να το συγκρίνετε με το εμβαδό του ημισφαιρίου $x^2 + y^2 + z^2 = 1, z \leq 0$.

5.2 Βιβλιογραφία

M. Abate - F. Torena: *Curves and Surfaces*, Springer 2012.

C. Bär: *Elementary Differential Geometry*, Cambridge Univ. Press 2010.

M. P. do Carmo: *Differential Geometry of Curves and Surface*, Prentice-Hall 1976.

J. Oprea: *Differential Geometry and Its Applications*, The Mathematical Assocation of America, 2007.

Β. Ι. Παπαντωνίου: *Διαφορική Γεωμετρία*, Εκδ. Πανεπιστ. Πατρών, Πάτρα, 2013.

A. Pressley: *Elementary Differential Geometry*, Second Edition, Springer 2010. Μετάφραση: *Στοιχειώδης Διαφορική Γεωμετρία*, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, Κρήτη 2012.