Τίτλος Μαθήματος: Διαφορική Γεωμετρία

Ενότητα: Επιφάνειες στον Ευκλείδειο χώρο $\mathbb{R}^3$

Όνομα Καθηγητή: Ανδρέας Αρβανιτογεώργος

Τμήμα: Μαθηματικών

Άδειες Χρήσης

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Πατρών**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο

ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ

ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Κεφάλαιο 3

Επιφάνειες στον Ευκλείδειο χώρο $\mathbb{R}^3$

Προκειμένου να ορίσουμε την έννοια της επιφάνειας στον $\mathbb{R}^3$ έχουμε δύο δυνατές προσεγγίσεις. Με την πρώτη μπορούμε να ορίσουμε μια επιφάνεια ως ένα υποσύνολο του $\mathbb{R}^3$ που να ικανοποιεί κάποιες ιδιότητες και με τη δεύτερη ως εικόνα μιας απεικόνισης από ένα ανοικτό υποσύνολο του επιπέδου στον $\mathbb{R}^3$, η οποία και αυτή να ικανοποιεί συγκεκριμένες ιδιότητες.

Η δεύτερη προσέγγιση είναι γενίκευση της περιγραφής των καμπυλών στον $\mathbb{R}^3$, αλλά αν και είναι χρήσιμη στην περιγραφή τοπικών ιδιοτήτων μιας επιφάνειας, έχει περιορισμένη χρησιμότητα για πιο δύσκολα προβλήματα. Για τον λόγο αυτό, θα χρησιμοποιήσουμε και τον εναλλακτικό ορισμό μιας επιφάνειας ως ένα υποσύνολο του Ευκλείδειου χώρου $\mathbb{R}^3$ το οποίο τοπικά να "μοιάζει" με ένα ανοικτό υποσύνολο του επιπέδου.

Ορισμός 3.1. *Ένα μη κενό συνεκτικό υποσύνολο M του $\mathbb{R}^3$ ονομάζεται κανονική επιφάνεια (regular surface) (ή τοπικά εμφυτευμένη (embedded) επιφάνεια) εάν για κάθε $p \in M$ υπάρχουν ανοικτές περιοχές $V \subset \mathbb{R}^3$, $U \subset \mathbb{R}^2$ με $p \in V$ και μια $1-1$ απεικόνιση $X : U \subset \mathbb{R}^2 \to V \cap M \subset \mathbb{R}^3$ τέτοια ώστε*

1. *Η X είναι ομοιομορφισμός*
2. *Ισχύει $X_u(q) \times X_v(q) \neq 0$ για κάθε $q \in U$.*

Η απεικόνιση X ονομάζεται **τοπική περαμέτρηση** (local parametrization) της M και η αντίστροφη $X^{-1} : V \cap M \to U$ ονομάζεται **τοπικός χάρτης** (local chart) ή **τοπικό σύστημα συντεταγμένων** στο $p = X(q)$.

Παρατηρήσεις

1. Η απεικόνιση X έχει τη μορφή $X(u,v) = \big(x(u,v), y(u,v), z(u,v)\big)$, όπου $x, y, z : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ πραγματικές διαφορίσιμες απεικονίσεις, $u, v \in U$.
Κατόπιν αυτού η συνθήκη 2 ισοδυναμεί με τό ότι τα διανύσματα

$$\begin{aligned} X_u(q) &= \big(x_u(q), y_u(q), z_u(q)\big) \\ X_v(q) &= \big(x_v(q), y_v(q), z_v(q)\big) \end{aligned}$$

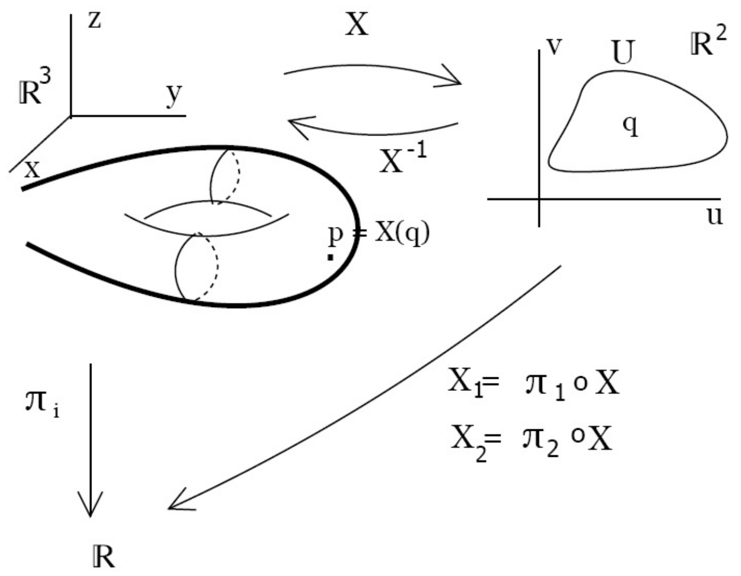
είναι γραμμικώς ανεξάρτητα. Ισοδύναμα, το διαφορικό $dX_q : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ είναι $1-1$ δηλαδή η τάξη του πίνακα

$$\begin{pmatrix} x_u(q) & y_u(q) & z_u(q) \\ x_v(q) & y_v(q) & z_v(q) \end{pmatrix}$$

είναι 2.
2. Η συλλογή $\mathcal{A} = \Big\{\big(V_\alpha \cap M, X_\alpha^{-1}\big) : \alpha \in I\Big\}$ ονομάζεται **άτλαντας** της M από τοπικούς χάρτες της M εάν

$$M = \bigcup_\alpha \big(V_\alpha \cap M\big)$$

Εάν $\pi_i : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R},\ (i = 1, 2)$ είναι οι κανονικές προβολές τότε προκύπτει το παρακάτω διάγραμμα:



Η συνθήκη 2 ισοδυναμεί με το ότι

$$\det \begin{pmatrix} \frac{\partial X_1}{\partial u}(q) & \frac{\partial X_1}{\partial v}(q) \\ \frac{\partial X_2}{\partial u}(q) & \frac{\partial X_2}{\partial v}(q) \end{pmatrix} \neq 0.$$

Παράδειγμα 3.1. Έστω U ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^2$ και $f : U \to \mathbb{R}$ διαφορίσιμη συνάρτηση. Τότε η απεικόνιση $X : U \to M$ με

$$X(u,v) = \big(u, v, f(u,v)\big)$$

αποτελεί μια τοπική παραμέτρηση του γραφήματος

$$M = \big\{(u, v, f(u,v)) : (u,v) \in U\big\}$$

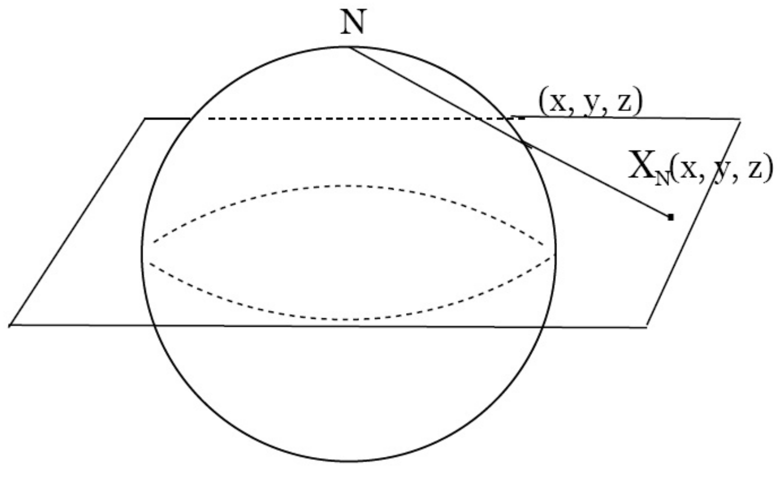
της f. Ο αντίστοιχος τοπικός χάρτης $X^{-1} : M \to U$ είναι $X^{-1}(x,y,z) = (x,y)$. Συνεπώς το σύνολο M είναι μια κανονική επιφάνεια.

Παράδειγμα 3.2. Έστω $\mathbb{S}^2 = \big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\big\}$ η μοναδιαία σφαίρα του $\mathbb{R}^3$. Έστω $N = (0,0,1)$, $S = (0,0,-1)$ ο βόρειος και ο νότιος πόλος αντίστοιχα. Θέτουμε $U_N = \mathbb{S}^2 \setminus \{N\}$, $U_S = \mathbb{S}^2 \setminus \{S\}$ και ορίζουμε τις απεικονίσεις $X_N : U_N \to \mathbb{R}^2$, $X_S : U_S \to \mathbb{R}^2$ (στερεογραφικές προβολές) ως

$$X_N(x,y,z) = \frac{1}{1-z}(x,y)$$
$$X_S(x,y,z) = \frac{1}{1+z}(x,y)$$

Τότε το σύνολο $\mathcal{A} = \big\{(U_N, X_N), (U_S, X_S)\big\}$ αποτελεί έναν άτλαντα της σφαίρας $\mathbb{S}^2$.

Άσκηση Να γίνει αναλυτικός έλεγχος ότι ικανοποιείται ο παραπάνω ορισμός.



Ο παραπάνω ορισμός μιας επιφάνειας παρουσιάζει τεχνικές δυσκολίες στην εφαρμογή του. Θα δούμε τώρα έναν εναλλακτικό τρόπο κατασκευής επιφανειών στον $\mathbb{R}^3$ μέσω του θεωρήματος πεπλεγμένης συνάρτησης. Χρειαζόμαστε κατ' αρχήν να υπενθυμίσουμε τα εξής:

Έστω $F = (F_1, \ldots, F_n) : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ μια διαφορίσιμη απεικόνιση στο ανοικτό υποσύνολο U του $\mathbb{R}^n$ και $p \in U$. Τότε το διαφορικό $DF(p) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ στο p είναι μια γραμμαική απεικόνιση της οποίας ο $m \times n$ πίνακας (ως προς τις κανονικές βάσεις των $\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m$) είναι ο

$$[DF(p)] = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1}(p) & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial x_v}(p) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial F_m}{\partial x_1}(p) & \cdots & \frac{\partial F_m}{\partial x_n}(p) \end{pmatrix}.$$

Συχνά θα γράφουμε τον παραπάνω πίνακα απλά ως $DF(p)$.

Έστω τώρα $\gamma : \mathbb{R} \to U \subset \mathbb{R}^n$ μια διαφορίσιμη καμπύλη με $\gamma(0) = p, \gamma'(0) = Z \in \mathbb{R}$. Τότε η σύνθεση $F \circ \gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$ είναι μια καμπύλη στον $\mathbb{R}^m$ και από τον κανόνα της αλυσίδας προκύπτει ότι το εφαπτόμενο διάνυσμά της στο σημείο $F(p) \in \mathbb{R}^m$ είναι

$$\frac{d}{dt}\big(F \circ \gamma(t)\big)\Big|_{t=0} = DF(\gamma(0))\gamma'(0) = DF(p)Z.$$

Σημειώνουμε ότι η τελευταία ισότητα είναι ένα διάνυσμα του $\mathbb{R}^m$ που προκύπτει ως το γινόμενο ενός $m \times n$ και ενός $n \times 1$ πίνακα. Συνεπώς, το διαφορικό $DF(p)$ μιας απεικόνισης $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ μπορεί να θεωρηθεί ως μια γραμμική απεικόνιση, η οποία απεικονίζει εφαπτόμενα διανύσματα στο $p \in U \subset \mathbb{R}^n$ σε εφαπτόμενα διανύσματα στο $F(p) \in \mathbb{R}^m$.

Το παρακάτω θεώρημα είναι ίσως το πιο κεντρικό της θεώρημα της κλασικής ανάλυσης.

Θεώρημα 3.1. *(**Θεώρημα Αντίστροφης Απεικόνισης**)*
Έστω $U \subset \mathbb{R}^n$ ανοικτό και $F : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ διαφορίσιμη. Υποθέτουμε ότι στο $p \in U$ το διαφορικό $DF(p) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ της F στο p είναι αντιστρέψιμη (ως γραμμική απεικόνιση). Τότε υπάρχουν ανοικτές περιοχές $U_p \ni p$, $V_q \ni q = F(p)$ έτσι ώστε η $f = F|_{U_p} : U_p \to V_q$ να είναι $1-1$, επί και η αντίστροφή της $f^{-1} : V_q \to U_p$ να είναι διαφορίσιμη. Επιπλέον, για το διαφορικό της f^{-1} ισχύει:

$$Df^{-1}(q) = \big(DF(p)\big)^{-1}.$$

Ορισμός 3.2. *Έστω $U \subset \mathbb{R}^n$ ανοικτό και $F : U \to \mathbb{R}^m$ διαφορίσιμη.*

1. *Ένα σημείο $p \in U$ ονομάζεται <u>κρίσιμο σημείο</u> (critical point) της F εάν το διαφορικό*

$$DF(p) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$$

δεν είναι επί. Διαφορετικά, το p ονομάζεται <u>κανονικό σημείο</u> (regular point).

2. *Ένα σημείο $q \in F(U)$ ονομάζεται <u>κανονική τιμή</u> (regular value) της F εάν κάθε σημείο της αντίστροφης εικόνας $F^{-1}(\{q\})$ του q είναι κανονικό. Διαφορετικά, το q ονομάζεται <u>κρίσιμη τιμή</u> (critical value) της F.*

Χρησιμοποιώντας τώρα το παραπάνω θεώρημα αντίστροφης απεικόνισης μπορούμε να αποδείξουμε το επόμενο θεώρημα κατασκευής επιφανειών στον $\mathbb{R}^3$. Καμμιά φορά το θεώρημα αυτό αναφέρετια και ως και Θεώρημα Πεπλεγμένης Συνάρτησης (για τη θεωρία επιθανειών).

Θεώρημα 3.2. *Έστω $U \subset \mathbb{R}^3$ ανοικτό, $f : U \to \mathbb{R}$ διαφορίσιμη απεικόνιση και q μια κανονική τιμή της f, δηλαδή ισχύει*

$$\big(\nabla f\big)(p) = \Big(\frac{\partial f}{\partial x}(p), \frac{\partial f}{\partial y}(p), \frac{\partial f}{\partial z}(p)\Big) \neq 0$$

για κάθε $p \in M = f^{-1}\big(\{q\}\big)$. Τότε το σύνολο M είναι μια κανονική επιφάνεια του $\mathbb{R}^3$.

Παράδειγμα 3.3. Έστω $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ η διαφορίσιμη απεικόνιση

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$$

και $p \in \mathbb{R}^3$. Η κλίση $\nabla f(p)$ ικανοποιεί $\nabla f(p) = \big(2x, 2y, 2z\big)|_p = 2p$, συνεπώς κάθε θετικός πραγματικός αριθμός r είναι μια κανονική τιμή της f. Άρα η σφαίρα

$$\mathbb{S}^2_r = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = r\} = f^{-1}\big(\{r^2\}\big)$$

ακτίνας r είναι μια κανονική επιφάνεια του $\mathbb{R}^3$.

Παράδειγμα 3.4. Έστω $r, R \in \mathbb{R}$ με $0 < r < R$. Έστω η διαφορίσιμη συνάρτηση

$$f : U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \neq 0\} \to \mathbb{R}$$

με

$$f(x, y, z) = z^2 + \big(\sqrt{x^2 + y^2} - R\big)^2.$$

Θεωρούμε την αντίστροφη εικόνα

$$\mathbb{T}^2 = f^{-1}\big(\{r^2\}\big) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z^2 + \big(\sqrt{x^2 + y^2} - R\big)^2 = r^2\}.$$

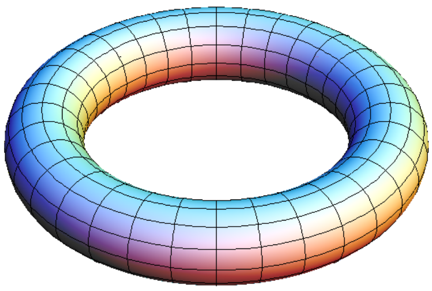
Τότε η κλίση της f στο $p = (x, y, z)$ είναι

$$\nabla f(p) = \frac{2}{\sqrt{x^2 + y^2}}\Big(x(\sqrt{x^2 + y^2} - R), y(\sqrt{x^2 + y^2} - R), z\sqrt{x^2 + y^2}\Big).$$

Ισχυριζόμαστε ότι το r^2 είναι μια κανονική τιμή της f. Πράγματι, αν το $p \in \mathbb{T}^2$ ήταν τέτοιο ώστε $\nabla f(p) = 0$, τότε $z = 0$, άρα θα ήταν

$$\nabla f(p) = \frac{2r}{\sqrt{x^2+y^2}}(x, y, 0) \neq 0,$$

άτοπο. Συνεπώς, το σύνολο $\mathbb{T}^2$ είναι μια κανονική επιφάνεια του $\mathbb{R}^3$, η οποία ονομάζεται δακτύλιος ή τόρος (torus)



Ερχόμαστε τώρα σε μια εναλλακτική περιγραφή μιας επιφάνειας (ή καλύτερα τμήματος επιφάνειας). Η διαδικασία αυτή αποτελεί γενίκευση της περιγραφής μιας καμπύλης μέσω απεικονίσεων παραμέτρησης.

Ορισμός 3.3. *Μια κανονική παραμετρημένη επιφάνεια (regular parametrized surface) είναι μια απεικόνιση $X : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ από ένα ανοικτό υποσύνολο U του $\mathbb{R}^2$ τέτοια ώστε για κάθε $q \in U$ να ισχύει*

$$X_u(q) \times X_v(q) \neq 0. \qquad (*)$$

Παρατηρήσεις

1. Η εικόνα $X(U)$ ονομάζεται και **τμήμα επιφάνειας**.

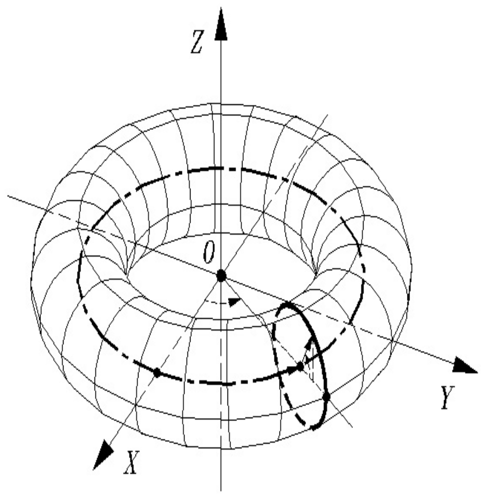
2. Η συνθήκη $(*)$ είναι ισοδύναμη με το ότι το διαφορικό $DX(q) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ είναι $1-1$.

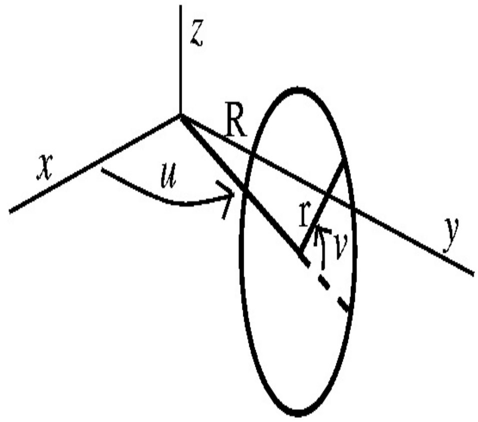
3. Μια κανονική παραμετρημένη επιφάνεια ονομάζεται και **εμβαπτισμένη (immersed)** επιφάνεια του $\mathbb{R}^3$.

Ορισμός 3.4. *Έστω M μια κανονική επιφάνεια του $\mathbb{R}^3$. Μια διαφορίσιμη απεικόνιση $X : U \subset \mathbb{R}^2 \to M$ (U ανοικτό) αποτελεί μια παραμέτρηση (parametrization) της M εάν:*

1. *η X είναι επί.*
2. *Για κάθε $p \in U$ υπάρχει ανοικτή περιοχή $U_p \ni p$ τέτοια ώστε η απεικόνιση $X|_{U_p} : U_p \to X(U_p)$ να είναι μια τοπική παραμέτρηση της M.*

Παράδειγμα 3.5. Ο δακτύλιος $\mathbb{T}^2$ του Παραδείγματος 3.4 … προκύπτει με περιστροφή του κύκλου $\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : z^2+(x-R)^2=r^2\}$ του επιπέδου (x,z) περί τον άξονα z.





Συνεπώς, μπορούμε να παραμετρήσουμε τοπικά τον δακτύλιο μέσω της απεικόνισης (τοπική παραμέτρηση)

$$\begin{aligned} X &: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{T}^2 \\ X(u,v) &= \begin{pmatrix} \cos v & -\sin v & 0 \\ \sin v & \cos v & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R + r\cos u \\ 0 \\ r\sin u \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

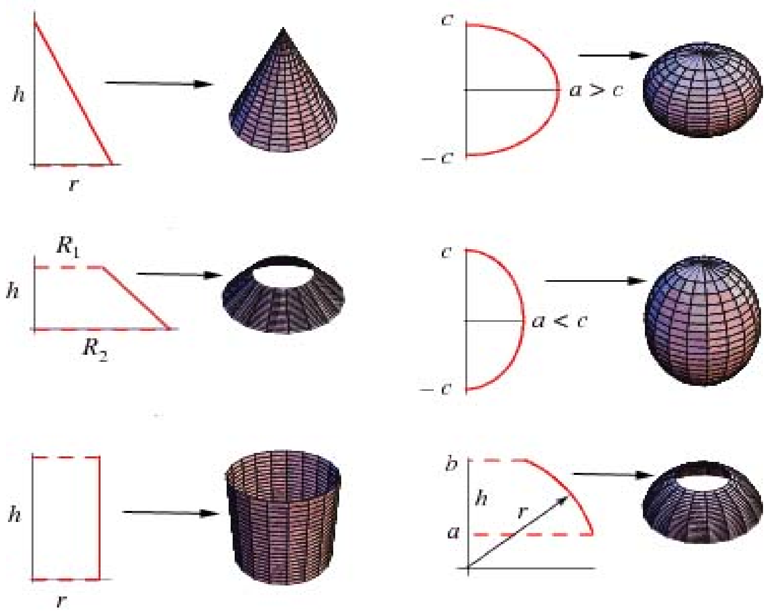
Παράδειγμα 3.6. Θεωρούμε τη μοναδιαία σφαίρα $\mathbb{S}^2$ του $\mathbb{R}^3$. Μια τοπική παραμέτρηση της σφαίρας $\mathbb{S}^2$ με γεωγραφικές συντεταγμένες είναι η απεικόνιση

$$\begin{aligned} X &: U = \{(\theta,\phi) : -\pi/2 < \theta < \pi/2, 0 < \phi < 2\pi\} \to \mathbb{S}^2 \\ X(\theta,\phi) &= \big(\cos\theta\cos\phi, \cos\theta\sin\phi, \sin\theta\big). \end{aligned}$$

Σημειώστε ότι $X(U) = \mathbb{S}^2 \setminus C$, όπου $C = \{(x,0,z) \in \mathbb{S}^2 : x \geq 0\}$ ένα μέγιστος κύκλος της $\mathbb{S}^2$.

Παράδειγμα 3.7. Έστω $\gamma = (r,0,z) : I \to \mathbb{R}^2$ μια κανονική καμπύλη στο επίπεδο (x,z) τέτοια ώστε $r(s) > 0$ και $\dot r(s)^2 + \dot z(s)^2 = 1$ για κάθε $s \in I$. Περιστρέφοντας την καμπύλη αυτή περί τον άξονα z προκύπτει μια κανονική επιφάνεια εκ περιστροφής (surface of revolution), η οποία παραμετροποιείται μέσω της απεικόνισης

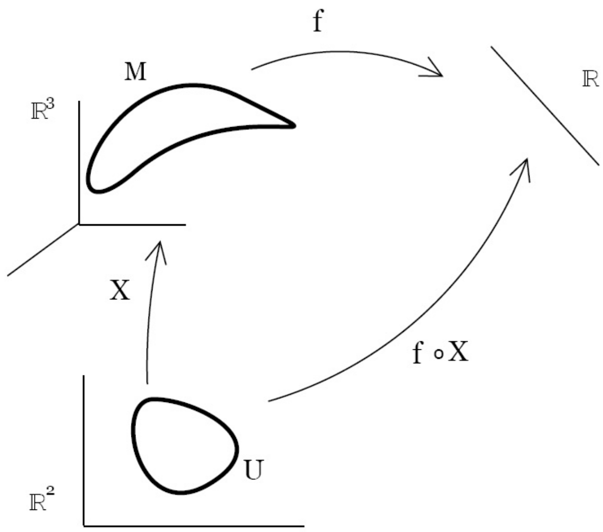
$$X : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$$
$$X(u,v) = \begin{pmatrix} \cos v & -\sin v & 0 \\ \sin v & \cos v & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r(u) \\ 0 \\ z(u) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r(u)\cos v \\ r(u)\sin v \\ z(u) \end{pmatrix}.$$



Ορισμός 3.5. *Έστω M μια κανονική επιφάνεια του $\mathbb{R}^3$. Μια συνεχής απεικόνιση $\gamma : I \to M$ ($I \subset \mathbb{R}$ ανοικτό) ονομάζεται λεία (ή διαφορίσιμη) καμπύλη στην M εάν η γ είναι διαφορίσιμη ως απεικόνιση με τιμές στο $\mathbb{R}^3$.*

Θα κλείσουμε το κεφάλαιο αυτό ορίζοντας την έννοια της διαφορίσιμης απεικόνισης μεταξύ επιφανειών. Αρχίζουμε με μια ειδική περίπτωση.

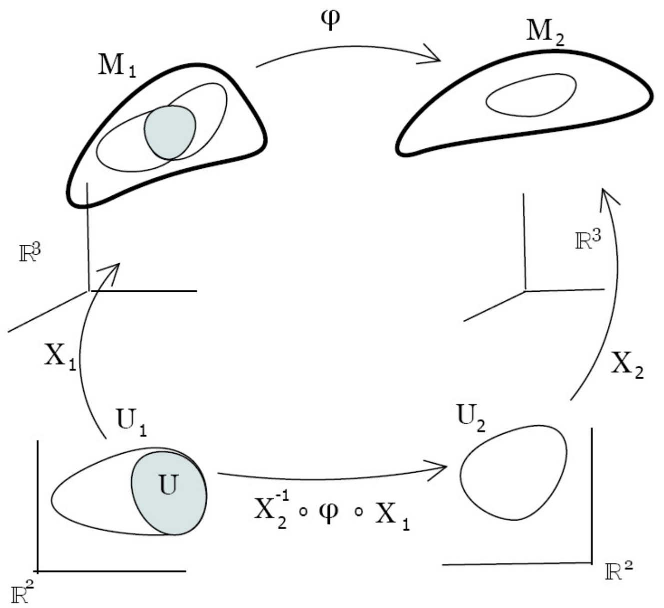
Ορισμός 3.6. *Έστω M κανονική επιφάνεια του $\mathbb{R}^3$. Μια πραγματική συνάρτηση $f : M \to \mathbb{R}$ ονομάζεται λεία ή διαφορίσιμη (smooth or differentiable) εάν για κάθε τοπική αναπαράσταση $X : U \to M$ της M, η σύνθεση $f \circ X \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ είναι διαφορίσιμη.*



Ορισμός 3.7. *Μια απεικόνιση $\phi : M_1 \to M_2$ μεταξύ δύο κανονικών επιφανειών του $\mathbb{R}^3$ ονομάζεται λεία ή διαφορίσιμη εάν για κάθε δύο τοπικές παραμετρήσεις (U_1, X_1) της M_1 και (U_2, X_2) της M_2, η απεικόνιση*

$$X_2^{-1} \circ \phi \circ X_1\big|_U : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$$

που ορίζεται στο ανοικτό $U = X_1^{-1}\Big(X_1(U_1) \cap \phi^{-1}\big(X_2(U_2)\big)\Big) \subset \mathbb{R}^2$ είναι διαφορίσιμη.



Πρόταση 3.1. *Έστω M_1, M_2 κανονικές επιφάνειες του $\mathbb{R}^3$ και $\phi : U \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ διαφορίσιμη απεικόνιση στο ανοικτό U, τέτοια ώστε $M_1 \subset U$ και $\phi(M_1) \subset M_2$. Τότε ο περιορισμός $\phi|_{M_1} : M_1 \to M_2$ είναι λεία απεικόνιση μεταξύ των δύο επιφανειών.*

Ορισμός 3.8. *Μια διαφορίσιμη απεικόνιση $\phi : M_1 \to M_2$ μεταξύ δύο κανονικών επιφανειών του $\mathbb{R}^3$ ονομάζεται αμφιδιαφόριση (diffeomorphism) εάν είναι $1-1$, επί και η αντίστροφη $\phi^{-1} : M_2 \to M_1$ είναι διαφορίσιμη. Τότε οι M_1, M_2 ονομάζονται αμφιδιαφορικές.*

3.1 Ασκήσεις

1. Ποιό από τα παρακάτω υποσύνολα του $\mathbb{R}^3$ αποτελεί μια κανονική επιφάνεια;

$$\begin{aligned}
M_1 &= \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2 = z\right\} \\
M_2 &= \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2 = z^2\right\} \\
M_3 &= \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2-z^2 = 1\right\} \\
M_4 &= \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x\sin z = y\cos z\right\}.
\end{aligned}$$

Για τα σύνολα τα οποία αποτελούν μια κανονική επιφάνεια του $\mathbb{R}^3$, βρείτε μια παραμέτρηση.

2. Βρήτε μια παραμέτρηση του επιπέδου $ax+by+cz=d$ του $\mathbb{R}^3$.

3. Κατασκευάστε μια αμφιδιαφόριση $\varphi : S^2 \to M$ μεταξύ της σφαίρας S^2 και του ελλειψοειδούς $M = M_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+2y^2+3z^2 = 1\}$.

4. Έστω $U = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 : -\pi < u < \pi\ ,\ 0 < v < 1\}$ και ορίζουμε $X : U \to \mathbb{R}^3$ με $X(u,v) = (\sin u, \sin(2u), v)$. Έστω $M = X(U)$. Σχεδιάστε το γράφημα του συνόλου M και δείξτε ότι η X είναι διαφορίσιμη, $1-1$ και ότι είναι μια κανονική παραμέτρηση, αλλά ότι η X^{-1} δεν είναι συνεχής. Είναι η M μια κανονική επιφάνεια του $\mathbb{R}^3$;

3.2 Βιβλιογραφία

M. Abate - F. Torena: *Curves and Surfaces*, Springer 2012.

C. Bär: *Elementary Differential Geometry*, Cambridge Univ. Press 2010.

M. P. do Carmo: *Differential Geometry of Curves and Surface*, Prentice-Hall 1976.

J. Oprea: *Differential Geometry and Its Applications*, The Mathematical Assocation of America, 2007.

Β. Ι. Παπαντωνίου: *Διαφορική Γεωμετρία*, Εκδ. Πανεπιστ. Πατρών, Πάτρα, 2013.

A. Pressley: *Elementary Differential Geometry*, Second Edition, Springer 2010. Μετάφραση: *Στοιχειώδης Διαφορική Γεωμετρία*, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, Κρήτη 2012.