Τίτλος Μαθήματος: Διαφορική Γεωμετρία

Ενότητα: Καμπύλες στον χώρο $\mathbb{R}^3$

Όνομα Καθηγητή: Ανδρέας Αρβανιτογεώργος

Τμήμα: Μαθηματικών

Άδειες Χρήσης

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Πατρών**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Κεφάλαιο 2

Καμπύλες στον χώρο $\mathbb{R}^3$

Στο κεφάλαιο αυτό θα μελετήσουμε καμπύλες $\gamma : I \to \mathbb{R}^3$ στον τρισδιάστατο χώρο $\mathbb{R}^3$. Θα ορίσουμε την καμπυλότητα και τη στρέψη τέτοιων καμπυλών και θα δείξουμε ότι οι ποσότητες αυτές καθορίζουν τις καμπύλες αυτές ως προς στερεές κινήσεις του χώρου που διατηρούν τον προσανατολισμό.

Θυμίζουμε το εξωτερικό γινόμενο $\times : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ στον $\mathbb{R}^3$

$$(x_1, y_1, z_1) \times (x_2, y_2, z_2) = (y_1 z_2 - y_2 z_1, z_1 x_2 - z_2 x_1, x_1 y_2 - x_2 y_1).$$

Αρχίζουμε με μερικά παραδείγματα καμπυλών στον $\mathbb{R}^3$.

Παραδείγματα

1. Έστω $p \neq q$ δύο σημεία στον $\mathbb{R}^3$. Τότε η απεικόνιση $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$, $\gamma(t) = (1-t)p + tq$ είναι μια παραμέτρηση της ευθείας που διέρχεται από τα σημεία $p = \gamma(0)$ και $q = \gamma(1)$.

2. Έστω $\{Z, W\}$ μια ορθοκανονική βάση ενός επιπέδου V του $\mathbb{R}^3$, $r > 0$ και $p \in \mathbb{R}^3$. Τότε η απεικόνιση $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$, $\gamma(t) = p + r\big((\cos t)Z + (\sin t)W\big)$ αποτελεί μια παραμέτρηση του κύκλου ο οποίος βρίσκεται στο (υπερ)επίπεδο $p + V$ και έχει κέντρο το p και ακτίνα r.

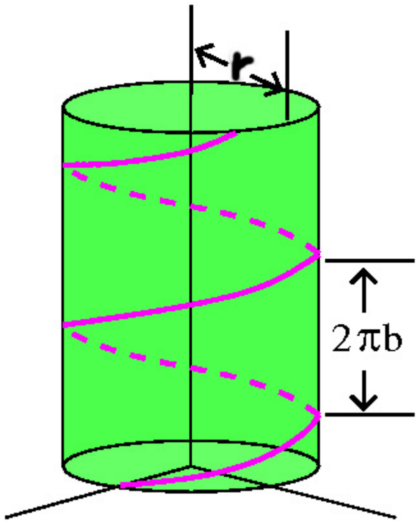
3. Έστω $r, a, b > 0$. Η απεικόνιση

$$\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3, \ \gamma(t) = (r\cos(at), r\sin(at), bt)$$

αποτελεί παραμέτρηση της **έλικας**. Επειδή $\gamma_1(t)^2 + \gamma_2(t)^2 = x^2 + y^2 = r^2$, η εικόνα $\gamma(\mathbb{R})$ της έλικας βρίσκεται επάνω στην επιφάνεια του κυλίνδρου

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = r^2\}$$

ακτίνας r, γι΄ αυτό και η έλικα αυτή ονομάζεται **κυκλική έλικα**. Ο αριθμός $2\pi b$ ονομάζεται βήμα της έλικας (και αντιστοιχεί στην απόσταση επί του άξονα z όταν γίνει μια πλήρης διαγραφή της καμπύλης στο διάστημα $[0, 2\pi)$).



Ορισμός 2.1. *Έστω $\gamma : I \to \mathbb{R}^3$ καμπύλη με παραμέτρηση κατά μήκος τόξου. Η καμπυλότητα της γ είναι η συνάρτηση $\kappa : I \to \mathbb{R}_0^+$ με τύπο*

$$\kappa(s) = \|\ddot{\gamma}(s)\|.$$

Θεώρημα 2.1. *Έστω $\gamma : I \to \mathbb{R}^3$ καμπύλη με παραμέτρηση κατά μήκος τόξου. Τότε η καμπυλότητα $\kappa : I \to \mathbb{R}_0^+$ της γ είναι ταυτοτικά μηδέν εάν και μόνο εάν το ίχνος $\gamma(I)$ της καμπύλης είναι τμήμα ευθείας (ή ολόκληρη ευθεία).*

Απόδειξη. (Σκιαγράφηση)
Η καμπυλότητα $\kappa(s) = \|\ddot{\gamma}(s)\|$ είναι ταυτοτικά μηδέν εάν και μόνο εάν υπάρχει μοναδιαίο διάνυσμα $Z \in S^2$ και σημείο $p \in \mathbb{R}^3$ τέτοια ώστε

$$\gamma(s) = p + sZ,$$

δηλαδή το ίχνος $\gamma(I)$ είναι τμήμα ευθείας. Το αντίστροφο είναι άμεσο. □

Ορισμός 2.2. *Μια καμπύλη $\gamma : I \to \mathbb{R}^3$ με παραμέτρηση κατά μήκος τόξου ονομάζεται καμπύλη Frenet (καμμιά φορά και ομαλή ή κανονική) εάν η καμπυλότητα κ είναι παντού μη μηδενική, δηλαδή $\kappa(s) \neq 0$ για κάθε $s \in I$.*

Έστω $\gamma : I \to \mathbb{R}^3$ μια καμπύλη Frenet. Ορίζουμε τις παρακάτω σημαντικές συναρτήσεις.
Η **εφαπτομένη** (tangent) κατά μήκος της γ είναι η

$$T : I \to S^2, \;\; T(s) = \dot{\gamma}(s).$$

Η **κύρια κάθετος** (principal normal) κατά μήκος της γ είναι η

$$N : I \to S^2, \;\; N(s)\frac{\ddot{\gamma}(s)}{\|\ddot{\gamma}(s)\|} = \frac{\ddot{\gamma}(s)}{\kappa(s)}.$$

Η **δεύτερη κάθετος** (binormal) κατά μήκος της γ είναι η

$$B : I \to S^2, \quad B(s) = T(s) \times N(s).$$

Για κάθε $s \in I$ το σύνολο $\{T(s), N(s), B(s)\}$ αποτελεί μια ορθοκανονική βάση του $\mathbb{R}^3$ στο σημείο $\gamma(s)$. Πράγματι, επειδή η $\gamma : I \to \mathbb{R}^3$ έχει παραμέτρηση κατά μήκος τόξου είναι

$$0 = \frac{d}{ds}\big(\langle\dot{\gamma}(s), \dot{\gamma}(s)\rangle\big) = 2\langle\ddot{\gamma}(s), \dot{\gamma}(s)\rangle = 2\kappa(s)\langle N(s), T(s)\rangle.$$

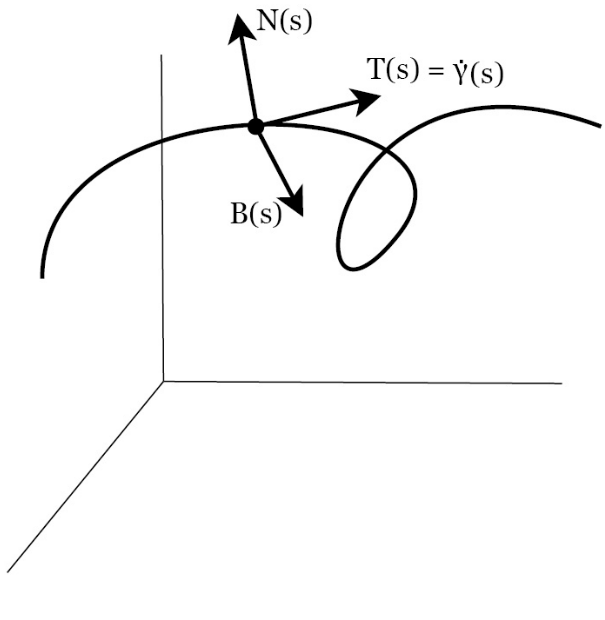
Η βάση αυτή ονομάζεται **συνοδεύον τρίεδρο (ή πλαίσιο) του Frenet** κατά μήκος της γ.

Ορισμός 2.3. *Έστω $\gamma : I \to \mathbb{R}^3$ καμπύλη Frenet. Ορίζουμε την στρέψη (torsion) της γ ως τη συνάρτηση*

$$\tau : I \to \mathbb{R}, \quad \tau(s) = \left\langle \dot{N}(s), B(s) \right\rangle.$$

Παρατήρηση

Η στρέψη αποτελεί ένα μέτρο του κάτα πόσο γρήγορα η κύρια κάθετος $N(s) = \dfrac{\ddot{\gamma}(s)}{\|\ddot{\gamma}(s)\|}$ στρέφεται προς την διεύθυνση της δεύτερης καθέτου $B(s)$ ή ισοδύναμα απομακρύνεται από το επίπεδο που ορίζεται από τα διανύσματα $T(s)$ και $N(s)$.



Θεώρημα 2.2. *Έστω $\gamma : I \to \mathbb{R}^3$ καμπύλη Frenet. Τότε το τρίεδρο Frenet ικανοποιεί το παρακάτω σύστημα συνήθων διαφορικών εξισώσεων:*

$$\begin{pmatrix} \dot{T}(s) \\ \dot{N}s \\ \dot{B}(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \kappa(s) & 0 \\ -\kappa(s) & 0 & \tau(s) \\ 0 & -\tau(s) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T(s) \\ N(s) \\ B(s) \end{pmatrix}.$$

Θεώρημα 2.3. *Έστω $\gamma : I \to \mathbb{R}^3$ καμπύλη Frenet. Τότε η στρέψη $\tau : I \to \mathbb{R}$ είναι ταυτοτικά μηδέν εάν και μόνο εάν το ίχνος $\gamma(I)$ της γ περιέχεται σε ένα επίπεδο.*

Θα δούμε τώρα ότι μια καμπύλη Frenet στον χώρο $\mathbb{R}^3$ καθορίζεται από την καμπυλότητά της και την στρέψη της (μη λαμβάνοντας υπόψη στερεές κινήσεις του $\mathbb{R}^3$ που διατηρούν τον προσανατολισμό). Χρειαζόμαστε πρώτα τον εξής ορισμό:

Ορισμός 2.4. *Μια απεικόνιση $\Phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ ονομάζεται <u>Ευκλείδεια</u> (ή <u>στερεά) κίνηση</u> του $\mathbb{R}^3$ (rigin motion) εάν έχει τη μορφή $\Phi(X) = AX + b$, όπου $b \in \mathbb{R}^3$ και*

$$A \in O(3) = \{X \in M_{3\times 3}(\mathbb{R}) : XX^t = I_3\}.$$

Η Φ διατηρεί τον προσανατολισμό εάν $A \in SO(3) = \{X \in O(3) : \det X = 1\}$.

Θεώρημα 2.4. *(**Θεμελιώδες Θεώρημα της Θεωρίας καμπυλών**)*
Έστω $\kappa : I \to \mathbb{R}^+$ και $\tau : I \to \mathbb{R}$ διαφορίσιμες συναρτήσεις. Τότε υπάρχει μια καμπύλη Frenet $\gamma : I \to \mathbb{R}^3$ η οποία να έχει καμπυλότητα κ και στρέψη τ. Επιπλέον, εάν $\tilde{\gamma} : I \to \mathbb{R}^3$ είναι μια άλλη τέτοια καμπύλη, τότε υπάρχει πίνακας $A \in SO(3)$ και διάνυσμα $b \in \mathbb{R}^3$ τέτοια ώστε

$$\gamma(s) = A\tilde{\gamma}(s) + b.$$

Η απόδειξη ουσιαστικά στηρίζεται στο θεμελιώδες θεώρημα ύπαρξης και μοναδικότητας λύσης συνήθων διαφορικών εξισώσεων με αρχική συνθήκη.

Ορισμός 2.5. *Έστω $\gamma : I \to \mathbb{R}^3$ κανονική καμπύλη του $\mathbb{R}^3$ (όχι απαραίτητα με παραμέτρηση κατά μήκος τόξου). Έστω $t : J \to I$ μια γνησίως αύξουσα συνάρτηση κλάσεις C^3, τέτοια ώστε η σύνθεση $\alpha = \gamma \circ t : J \to \mathbb{R}^3$ να είναι μια καμπύλη με παραμέτρηση κατά μήκος τόξου. Ορίζουμε την καμπυλότητα $\kappa : I \to \mathbb{R}^+$ της $\gamma : I \to \mathbb{R}^3$ ως*

$$\kappa\big(t(s)\big) = \tilde{\kappa}(s),$$

όπου $\tilde{\kappa} : J \to \mathbb{R}^+$ η καμπυλότητα της α.

Παρόμοια, ορίζουμε τη στρέψη $\tau : I \to \mathbb{R}$ της γ ως

$$\tau\big(t(s)\big) = \tilde{\tau}(s),$$

όπου $\tilde{\tau} : J \to \mathbb{R}$ η στρέψη της α.

Χρησιμοποιώντας τους παραπάνω ορισμούς, είναι δυνατόν να προκύψουν τύποι για την καμπυλότητα και στρέψη τύχαιας καμπύλης.

Πρόταση 2.1. *Έστω $\gamma : I \to \mathbb{R}^3$ κανονική καμπύλη του $\mathbb{R}^3$ με καμπυλότητα κ και στρέψη τ. Τότε*

$$\begin{aligned}\kappa(t) &= \frac{\|\gamma'(t) \times \gamma''(t)\|}{\|\gamma'(t)\|^3} \\ \tau(t) &= \frac{\det\big(\gamma'(t), \gamma''(t), \gamma'''(t)\big)}{\|\gamma'(t) \times \gamma''(t)\|^2}.\end{aligned}$$

Πόρισμα 2.1. *Έστω $\gamma : I \to \mathbb{R}^3$ κανονική καμπύλη του $\mathbb{R}^3$. Τότε*

1. *Το ίχνος $\gamma(I)$ είναι τμήμα ευθείας εάν και μόνο εάν τα διανύσματα $\gamma'(t), \gamma''(t)$ είναι γραμμικώς εξαρτημένα για κάθε $t \in I$.*

2. *Το ίχνος $\gamma(I)$ περιέχεται σε ένα επίπεδο εάν και μόνο εάν τα διανύσματα $\gamma'(t), \gamma''(t), \gamma'''(t)$ είναι γραμμικώς εξαρτημένα για κάθε $t \in I$.*

2.1 Ασκήσεις

1. Υπολογίστε τις καμπυλότητες κ_1, κ_2 και τις στρέψεις τ_1, τ_2 των ελικών $\gamma_1, \gamma_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ με $\gamma_1(t) = (r\cos(at), r\sin(at), bt)$ και $\gamma_2(t) = (r\cos(-at), r\sin(-at), bt)$, $(r, a, b > 0)$. Βρείτε μια στερεά κίνηση $\Phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ τέτοια ώστε $\gamma_2 = \Phi \circ \gamma_1$. Διατηρεί η Φ τον προσανατολισμό;

2. Βρείτε μια κανονική καμπύλη $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ με σταθερή καμπυλότητα $k > 0$ και σταθερή στρέψη $\tau \in \mathbb{R}$.

3. Αποδείξτε ότι η στρέψη τ μιας κανονικής καμπύλης $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ ικανοποιεί τη σχέση

$$\tau(t) = \frac{\det[\gamma'(t), \gamma''(t), \gamma'''(t)]}{\|\gamma'(t) \times \gamma''(t)\|^2}.$$

4. Αποδείξτε ότι η καμπύλη $\gamma : (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \to \mathbb{R}^3$ με $\gamma(t) = (2\cos^2 t - 3, \sin t - 8, 3\sin^2 t + 4)$ είναι κανονική. Ελέγξτε κατά πόσον το ίχνος της γ περιέχεται σε: α) μια ευθεία του $\mathbb{R}^3$, β) ένα επίπεδο του $\mathbb{R}^3$.

5. Το ίδιο ερώτημα όπως στην Άσκηση 4 για την καμπύλη $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$, $\gamma(t) = (t^3 + t^2 + 3, t^3 - t + 1, t^2 + t + 1)$.

6. Αναζητήστε στη βιβλιογραφία μια απόδειξη του θεωρήματος του Fenchel: *Έστω ότι η απεικόνιση $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ είναι μια κανονική παραμέτρηση μιας κλειστής καμπύλης στον $\mathbb{R}^3$ με παράμετρο το μήκος τόξου. Τότε ισχύει*

$$L(\dot{\gamma}) = \int_0^P \kappa(s)ds \geq 2\pi,$$

όπου P η περίοδος της γ.

7. Αποδείξτε το Θεμελιώδες Θεώρημα της Θεωρίας Καμπυλών

2.2 Βιβλιογραφία

M. Abate - F. Torena: *Curves and Surfaces*, Springer 2012.

C. Bär: *Elementary Differential Geometry*, Cambridge Univ. Press 2010.

M. P. do Carmo: *Differential Geometry of Curves and Surface*, Prentice-Hall 1976.

J. Oprea: *Differential Geometry and Its Applications*, The Mathematical Assocation of America, 2007.

Β. Ι. Παπαντωνίου: *Διαφορική Γεωμετρία*, Εκδ. Πανεπιστ. Πατρών, Πάτρα, 2013.

A. Pressley: *Elementary Differential Geometry*, Second Edition, Springer 2010. Μετάφραση: *Στοιχειώδης Διαφορική Γεωμετρία*, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, Κρήτη 2012.