ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΑΤΡΩΝ
UNIVERSITY OF PATRAS

ΑΝΟΙΚΤΑ ακαδημαϊκά μαθήματα ΠΠ

Τίτλος Μαθήματος : Γραμμική Άλγεβρα Ι

Ενότητα: Ορίζουσες

Όνομα Καθηγητή: Ανδρέας Αρβανιτογεώργος

Τμήμα: Μαθηματικών

Άδειες Χρήσης

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό υπόκειται σε άδειες χρήσης Creative Commons.
- Για εκπαιδευτικό υλικό, όπως εικόνες, που υπόκειται σε άλλου τύπου άδειας χρήσης, η άδεια χρήσης αναφέρεται ρητώς.

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Πατρών**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Κεφάλαιο 4

Ορίζουσες

Η έννοια της ορίζουσας έχει παίξει ιστορικά έναν σημαντικό ρόλο στην ανάπτυξη της γραμμικής άλγεβρας, αν και στις μέρες μας η θέση της είναι λιγότερο κεντρική. Μάλιστα, είναι δυνατόν να αναπτυχθεί η θεωρία της γραμμικής άλγεβρας χωρίς καθόλου την χρησιμοποίηση οριζουσών (βλέπε για παράδειγμα S. Axler: *Linear Algebra Done Right*, 2nd edition, Springer 1997). Ουσιαστικά στο μόνο σημείο που θα τις χρησιμοποιήσουμε είναι στον ορισμό του χαρακτηριστικού πολυωνύμου ενός πίνακα και στη μελέτη των ιδιοτιμών του.

4.1 Ορισμός της ορίζουσας

Υπάρχουν διάφοροι, ισοδύναμοι τρόποι να ορίσουμε την ορίζουσα ενός πίνακα και όλοι έχουν αρκετά τεχνικό χαρακτήρα. Εδώ θα παρουσιάσουμε χωρίς πολλές λεπτομέρειες έναν από αυτούς.

Ορισμός 4.1. *Η ορίζουσα (determinant) ενός 2×2 πίνακα $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ με στοιχεία στο σώμα $\mathbb{F}$ είναι ο αριθμός*

$$\det(A) = |A| = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

Αποδεικνύεται ότι η ορίζουσα ως συνάρτηση $\det : \mathsf{M}_{2\times 2}(\mathbb{F}) \to \mathbb{F}$ έχει τις εξής ιδιότητες:

1) Είναι γραμμική ως προς κάθε γραμμή, δηλαδή αν $A = \begin{pmatrix} A_{(1)} \\ A_{(2)} \end{pmatrix}$, όπου $A_{(i)}$ η i-γραμμή του A, τότε

$$\det \begin{pmatrix} \lambda A_{(1)} + \mu A'_{(1)} \\ A_{(2)} \end{pmatrix} = \lambda \det \begin{pmatrix} A_{(1)} \\ A_{(2)} \end{pmatrix} + \mu \det \begin{pmatrix} A'_{(1)} \\ A_{(2)} \end{pmatrix}$$

και ανάλογα για την δεύτερη γραμμή.

2) Αν ο A έχει δύο γραμμές ίδιες, τότε $\det(A) = 0$.

3) $\det(I_2) = 1$.

Αντίστροφα, έστω $D : \mathsf{M}_{2\times 2}(\mathbb{F}) \to \mathbb{F}$ μία συνάρτηση τέτοια ώστε

1) Η D να είναι γραμμική ως προς κάθε γραμμή.

2) Αν A έχει δύο γραμμές ίδιες, τότε $D(A) = 0$.

3) $D(I_2) = 1$.

Τότε $D(A) = \det(A) = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$.

Μία ενδιαφέρουσα εφαρμογή είναι η εξής:

Πρόταση 4.1. *Έστω $A \in \mathsf{M}_{2\times 2}(\mathbb{F})$. Τότε η ορίζουσα του A είναι μη μηδενική εάν και μόνο εάν ο A είναι αντιστρέψιμος. Επιπλέον, εάν ο A είναι αντιστρέψιμος, τότε*

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}.$$

Παρατήρηση

Η ορίζουσα ενός 2×2 πίνακα έχει την εξής γεωμετρική ερμηνεία. Αν $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ και τα διανύσματα $(a_{11}, a_{12}), (a_{21}, a_{22})$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα, τότε αν $\Pi = \mathrm{span}\{(a_{11}, a_{12}), (a_{21}, a_{22})\}$ το παραλληλόγραμμο στον $\mathbb{R}^2$ που παράγεται από τα διανύσματα - γραμμές του A, τότε $\text{Εμβαδό}(\Pi) = |\det(A)|$.

Παράδειγμα

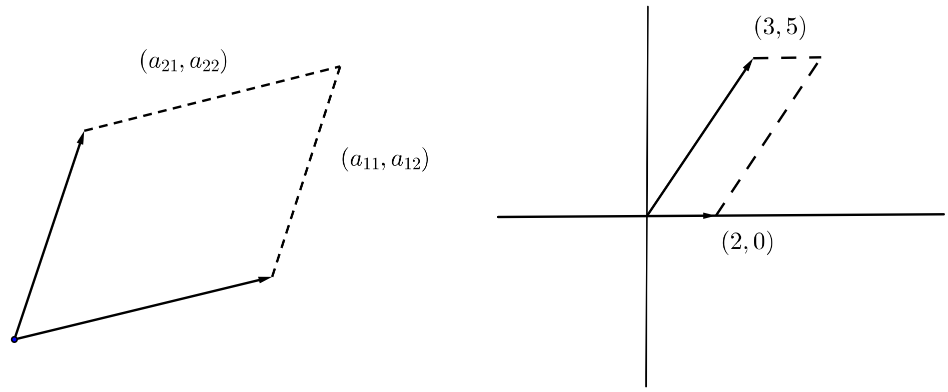
Έστω $a = (2, 0), b = (3, 5)$. Τότε όπως φαίνεται από το παρακάτω σχήμα θα είναι

$$\text{Εμβαδό}(\Pi) = 2 \cdot 5 = 10 = \det \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}.$$

Ερχόμαστε τώρα να ορίσουμε ορίζουσα για πίνακες $n \times n, n > 2$.

Ορισμός 4.2. *Μία συνάρτηση $D : \mathsf{M}_{n\times n}(\mathbb{F}) \to \mathbb{F}$ ονομάζεται <u>συνάρτηση ορίζουσας</u> εάν ικανοποιεί τα εξής:*

1) Η D είναι γραμμική ως προς κάθε γραμμή.



2) Η D είναι εναλλάσουσα, δηλαδή εάν δύο γειτονικές γραμμές είναι ίδιες τότε $D(A) = 0$.

3) $D(I_n) = 1$.

Ο παραπάνω ορισμός έχει τις εξής συνέπειες, οι αποδείξεις των οποίων είναι αρκετά τεχνικές.

Ιδιότητες της Ορίζουσας

1) Αν ο πίνακας B προκύπτει από τον πίνακα A με εναλλαγή δύο γραμμών, τότε $D(B) = -D(A)$.

2) Αν δύο γραμμές του πίνακα A είναι ίδιες, τότε $D(A) = 0$.

3) Αν μία γραμμή του πίνακα A είναι $(0, 0, \ldots, 0)$ τότε $D(A) = 0$.

4) Αν ο πίνακας B προκύπτει από τον A πολλαπλασιάζοντας μία γραμμή του A με $\lambda \neq 0$, τότε $D(B) = \lambda D(A)$.

5) Αν ο πίνακας B προκύπτει από τον A προσθέτοντας στην γραμμή j ένα πολλαπλάσιο της γραμμής i $(i \neq j)$ τότε $D(B) = D(A)$.

Το ερώτημα τώρα είναι εάν υπάρχει τέτοια συνάρτηση που να ικανοποιεί τις ιδιότητες $1) - 5)$ και κυρίως πως υπολογίζεται.

Η απάντηση δίνεται από το εξής:

Θεώρημα 4.1. *Έστω $D : \mathsf{M}_{n\times n}(\mathbb{F}) \to \mathbb{F}$ μία συνάρτηση ορίζουσας. Τότε για κάθε $1 \le j \le n+1$ η απεικόνιση $\epsilon_j : \mathsf{M}_{(n+1)\times(n+1)}(\mathbb{F}) \to \mathbb{F}$ με τύπο*

$$\epsilon_j(A) = \sum_{i=1}^{n+1} (-1)^{i+j} a_{ij} D(\tilde{A}_{ij})$$

(ανάπτυγμα κατά την j στήλη) είναι μία συνάρτηση ορίζουσας. Ο $n \times n$ πίνακας $\tilde{A}_{ij}$ προκύπτει από τον $A = (a_{ij})$ διαγράφοντας την i - γραμμή και την j - στήλη.

Με επαγωγή προκύπτει πλέον το εξής:

Πόρισμα 4.1. *Για κάθε $n \ge 2$ υπάρχει μία συνάρτηση ορίζουσας.*

Παρατήρηση
Ο αριθμός $(-1)^{i+j}D(\tilde{A}_{ij})$ ονομάζεται η ελλάσσουσα ορίζουσα που αντιστοιχεί στο a_{ij} (cofactor of a_{ij}).

Παράδειγμα
Θα υπολογίσουμε την ορίζουσα του πίνακα

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}.$$

Θα κάνουμε ανάπτυξη κατά την τρίτη στήλη ($j = 3$). Για $i = 1, 2, 3$ υπολογίζουμε τους αριθμούς $(-1)^{i+3}D(\tilde{A}_{i3})$. Είναι,
για $i = 1$,

$$(-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} = -3$$

για $i = 2$,

$$(-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} = 6$$

για $i = 3$,

$$(-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = -3.$$

Τότε $D(A) = \epsilon_3(A) = a_{13} \cdot (-3) + a_{23} \cdot 6 + a_{33} \cdot (-3) = 3 \cdot (-3) + 6 \cdot 6 + 9 \cdot (-3) = 0$. Θα είχαμε βρει το ίδιο αποτέλεσμα εάν κάναμε ανάπτυξη κατά την πρώτη ($j = 1$) ή την δεύτερη ($j = 3$) στήλη.

Η συνάρτηση ορίζουσας είναι μοναδική. Αυτό προκύπτει από τις παρακάτω ιδιότητες (οι οποίες και αποτελούν ιδιότητες της ορίζουσας).

Θεώρημα 4.2. *Έστω* $D : \mathsf{M}_{n\times n}(\mathbb{F}) \to \mathbb{F}$ *μία συνάρτηση ορίζουσας. Τότε*

1) Αν $\mathrm{rk}(A) < n$*, τότε* $D(A) = 0$*.*

2) $D(AB) = D(A)D(B)$*.*

3) Αν ο A *είναι αντιστρέψιμος τότε* $D(A) \neq 0$ *και* $D(A^{-1}) = (D(A))^{-1}$*.*

4) Αν $A \in \mathsf{M}_{n\times n}(\mathbb{F})$ *τότε τα εξής είναι ισοδύναμα:*

- $D(A) = 0$
- *ο* A *δεν είναι αντιστρέψιμος*
- $\mathrm{rk}(A) < n$

5) $\det(A^t) = \det(A)$*.*

Πόρισμα 4.2. *Η συνάρτηση ορίζουσας είναι μοναδική και τη συμολίζουμε με* $D = \det$ *ή* $D = |\cdot|$*.*

Με επαγωγή αποδεικνύεται και το εξής χρήσιμο.

Θεώρημα 4.3. *Η ορίζουσα ενός άνω τριγωνικού πίνακα ισούται με το γινόμενο των διαγώνιων στοιχείων του.*

Παράδειγμα
Έστω

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 \\ -3 & 4 & 1 & -1 \\ 2 & -5 & -3 & 8 \\ -2 & 6 & -4 & 1 \end{pmatrix}.$$

Χρησιμοποιώντας στοιχειώδεις πράξεις προκύπτει ότι

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 7 & -4 \\ 0 & -3 & -7 & 10 \\ 0 & 4 & 0 & -1 \end{vmatrix} = (-1)^{1+1} \cdot 1 \begin{vmatrix} 1 & 7 & -4 \\ -3 & -7 & 10 \\ 4 & 0 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 7 & -4 \\ -2 & 0 & 6 \\ 4 & 0 & -1 \end{vmatrix} = (-1)^{1+2} \cdot 7 \begin{vmatrix} -2 & 6 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} = -7(2-24) = 154.$$

Άσκηση
Έστω

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & -1 & 4 \\ -4 & 5 & -10 & -6 \\ 3 & -2 & 10 & -1 \end{pmatrix}.$$

Δείξτε ότι $\det(B) = 18$.

Σημείωση
Γενικεύοντας την γεωμετρική ερμηνεία μίας ορίζουσας 2×2, αν

$$A = \begin{pmatrix} A_{(1)} & A_{(2)} & A_{(3)} \end{pmatrix}$$

είναι ένας 3×3 πίνακας και οι γραμμές $A_{(1)}, A_{(2)}, A_{(3)}$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητες, τότε ισχύει ότι $|\det(A)| =$ όγκο του παραλληλεπιπέδου του $\mathbb{R}^3$ με πλευρές τα διανύσματα $A_{(1)}, A_{(2)}, A_{(3)}$.

Από αυτό είναι σαφές ότι μπορούμε να ορίσουμε ως όγκο παραλληλεπιπέδου στον $\mathbb{R}^n$ τον αριθμό $|\det(A)|$ για κάθε $A \in \mathsf{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$. Η έννοια αυτή (αν τη σκεφτούμε ως στοιχειώδη όγκο στον $\mathbb{R}^n$) συνδέεται με ανάπτυξη θεωρίας ολοκλήρωσης στον $\mathbb{R}^n$ αλλά και σε πιο γενικούς χώρους (γενικεύοντας κατάλληλα την έννοια της ορίζουσας).

4.2 Εφαρμογές: Κανόνας Cramer και υπολογισμός τάξης πίνακα

Ο κανόνας του Cramer για επίλυση συστημάτων n εξισώσεων με n αγνώστους είναι μία από τις παλαιότερες μεθόδους επίλυσης ενός γραμμικού συστήματος. Δεν βρίσκεται σε ευρεία χρήση λόγω του μεγάλου υπολογιστικού χρόνου που απαιτεί.

Θεώρημα 4.4. *Έστω $Ax = B$ ένα σύστημα n εξισώσεων με n αγνώστους. Εάν $\det(A) \neq 0$ τότε το σύστημα έχει μοναδική λύση $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, η οποία δίνεται ως εξής:*

$$x_k = \frac{\det(M_k)}{\det(A)},$$

όπου M_k είναι ο $n \times n$ πίνακας που προκύπτει από τον A αντικαθιστώντας την στήλη $A^{(k)}$ με την στήλη B των σταθερών όρων.

Παράδειγμα
Να λυθεί το γραμμικό σύστημα

$$\left.\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 1 \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 &= 2 \\ 5x_1 + 4x_2 + 6x_3 &= -1 \end{aligned}\right\}.$$

Το σύστημα γράφεται ως

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 5 & 4 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow Ax = B.$$

Είναι

$$\det(A) = 1 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} = 3 \neq 0.$$

Υπολογίζουμε

$$M_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ -1 & 4 & 6 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 6 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = 2 - 16 + 11 = -3,$$

$$M_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 4 \\ 5 & -1 & 6 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 6 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 5 & -1 \end{vmatrix} = -8,$$

$$M_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 5 & 4 & -1 \end{vmatrix} = -6.$$

Συνεπώς,

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{\det(M_1)}{\det(A)} = \frac{-3}{3} = -1, \\ x_1 &= \frac{\det(M_2)}{\det(A)} = \frac{-8}{3} = -\frac{8}{3}, \\ x_1 &= \frac{\det(M_3)}{\det(A)} = \frac{-6}{3} = -2. \end{aligned}$$

Άρα η μοναδική λύση είναι η $(x_1, x_2, x_3) = (-1, -\frac{8}{3}, -2)$.

Μία δεύτερη εφαρμογή είναι ο υπολογισμός του αντίστροφου ενός πίνακα.

Πρόταση 4.2. *Έστω $A \in \mathsf{M}_{n\times n}(\mathbb{F})$ αντιστρέψιμος. Τότε*

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}\mathrm{adj}(A),$$

όπου $\mathrm{adj}(A) = (b_{ij})$ ονομάζεται ο προσαρτημένος (adjoint) πίνακας του A και έχει στοιχεία $b_{ij} = (-1)^{i+j}\det(\tilde{A}_{ji})$, και ο πίνακας $\tilde{A}_{ji}$ ορίστηκε στο Θεώρημα 4.1.

Παράδειγμα

Να βρεθεί (αν υπάρχει) ο αντίστροφος του πίνακα

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

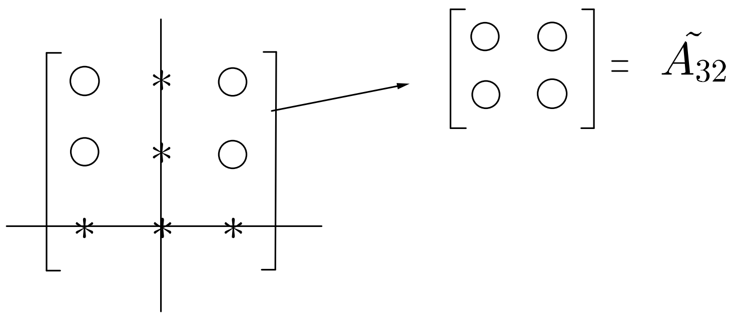
Είναι $\det(A) = 29 \neq 0$, άρα ο A είναι αντιστρέψιμος. Καλείται ο αναγνώστης να πιστοποιήσει ότι

$$\mathrm{adj}(A) = \begin{pmatrix} 10 & 8 & -3 \\ -7 & 6 & 5 \\ 6 & -1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Για παράδειγμα, το στοιχείο 5 στη θέση $(2,3)$ προκύπτει ως εξής: Κάνουμε πρώτα προσήμανση του αρχικού πίνακα ως εξής

$$\begin{pmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{pmatrix}.$$

Στη συνέχεια υπολογίζουμε την ελλάσσουσα ορίζουσα που αντιστοιχεί στο στοιχείο $(3,2)$



δηλαδή $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = -1 - 4 = -5$. Άρα το στοιχείο στη θέση $(2,3)$ είναι το $-(-5) = 5$ (επειδή η θέση $(2,3)$ έχει λάβει πρόσημο "$-$"). Συνεπώς,

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \mathrm{adj}(A) = \frac{1}{29} \begin{pmatrix} 10 & 8 & -3 \\ -7 & 6 & 5 \\ 6 & -1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Η τελευταία εφαρμογή είναι ένας εναλλακτικός τρόπος υπολογισμού της τάξης ενός πίνακα. Αν και δεν είναι πολύ χρηστικός (ιδιαίτερα για μεγάλους πίνακες) βοηθάει σε ζητήματα διερεύνησης προβλημάτων που σχετίζονται με την τάξη ενός πίνακα.

Πρόταση 4.3. *Η τάξη ενός πίνακα A είναι k εάν και μόνο εάν ισχύουν τα εξής:*

1) Υπάρχει ελλάσσουσα ορίζουσα τάξης k μη μηδενική.

2) Όλες οι $(k+1)$-τάξης ορίζουσες του A είναι μηδέν.

Παράδειγμα

Έστω

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & -3 & 1 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Είναι $\det(A) = 0$ και $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -3 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$, άρα $\mathrm{rk}(A) = 2$.

4.3 Ασκήσεις

1) Έστω

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ -1 & 0 & 3 & \dots & n \\ -1 & -2 & 0 & \dots & n \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ -1 & -2 & -3 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

Δείξτε ότι $\det(A) = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n = n!$.

2) Έστω ότι

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1+i & 1+2i \\ 1-i & 0 & 2-3i \\ 1-2i & 2+3i & 0 \end{pmatrix} \in \mathsf{M}_{3\times 3}(\mathbb{C}).$$

Δείξτε ότι $\det(A) = 6$.

3) Βρείτε την τάξη του πίνακα $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & -2 \\ 1 & 3 & 1 & 5 \end{pmatrix}$.

4) Βρείτε τον αντίστροφο (αν υπάρχει) του πίνακα

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

5) Έστω

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2b & 2c \\ 1 & b-a-c & 2c \\ 1 & 2b & c-a-b \end{pmatrix}.$$

Δείξτε ότι $\det(A) = (a+b+c)^2$.

6) Ένας πίνακας $A \in \mathsf{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ ονομάζεται ορθογώνιος εάν $AA^t = I_n$. Αποδείξτε ότι αν ο A είναι ορθογώνιος, τότε $\det(A) = \pm 1$.

7) Έστω $A, B \in \mathsf{M}_{2\times 2}(\mathbb{F})$. Αποδείξτε ότι $(AB - BA)^2 = -\det(AB - BA)I_2$.

8) Να υπολογιστούν οι ορίζουσες

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 8 & 9 & 4 \\ 7 & 6 & 5 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1+x & 2+x & 3+x \\ 8+x & 9+x & 4+x \\ 7+x & 6+x & 5+x \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} x^1 & x^2 & x^3 \\ x^8 & x^9 & x^4 \\ x^7 & x^6 & x^5 \end{vmatrix}.$$

9) Να υπολογιστεί η ορίζουσα

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{vmatrix}.$$

10) Να υπολογιστούν οι ορίζουσες

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & a_1 & b_1 \\ 0 & 0 & a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 & 0 & 0 \\ a_4 & b_4 & 0 & 0 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a_1 & 0 & 0 & b_1 \\ 0 & a_2 & b_2 & 0 \\ 0 & b_3 & a_3 & 0 \\ b_4 & 0 & 0 & a_4 \end{vmatrix}.$$

11) Να δειχθεί ότι

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 & \dots & a_n^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & a_3^{n-1} & \dots & a_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1\le i<j\le n} (a_j - a_i)$$

(ορίζουσα του Vandermonde). Συγκεκριμένα, αν V είναι ο $n \times n$ πίνακας του οποίου η (i,j)-θέση ισούται με j^{i-1}, τότε

$$\det(V) = (n-1)(n-2)^2 \cdots 2^{n-2}.$$

12) Έστω A ένας $n \times n$ πραγματικός πίνακας.

i) Να δειχθεί ότι αν $A^t = -A$ και n περιττός, τότε $|A| = 0$.

ii) Να δειχθεί ότι αν $A^2 + I = 0$, τότε ο n πρέπει να είναι άρτιος.

iii) Ισχύει το *ii*) αν ο A είναι μιγαδικός πίνακας;

13) Να δειχθεί ότι αν για έναν πίνακα A ισχύει $A^3 = 2I$, τότε ο πίνακας $B = A^2 - 2A + 2I$ είναι αντιστρέψιμος.

14) Να υπολογιστούν οι ορίζουσες των παρακάτω πινάκων. Ως σώμα έχουμε διαλέξει το $\mathbb{C}$.

$$\begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 4 & 8 & 0 \\ 3 & 2 & 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 & -5 & 2 \\ 2 & 8 & 1 \\ 6 & -1 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2+i & -1 & 5i \\ 3 & 3+2i & -2i \\ 4i & 0 & 1+i \end{pmatrix}.$$

Βιβλιογραφία

[1] S. Axler: *Linear Algebra Done Right*, 2nd Edition Springer, 1997.

[2] S. H. Friedberg - A. J. Insel - L. E. Spence: *Linear Algebra*, 4th Edition, Prentice Hall, 2003.

[3] Y. Katznelson - Y. R, Katznelson: *A (Terse) Introduction to Linear Algebra*, American Mathematical Society, 2008.

[4] S. Lipschutz - M. Lipson: *Linear Algebra*, 3rd Edition, Schaum's Outlines, 2003.

[5] H. E. Rose: *Linear Algebra: A Pure Mathematical Approach*, Birkhauser, 2002.

[6] F. Zhang: *Linear Algebra. Challenging Problems for Students*, 2nd Edition, The Johns Hopkings University Press, 2009.