



ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ  
ΠΑΤΡΩΝ  
UNIVERSITY OF PATRAS

# ΑΝΟΙΚΤΑ ακαδημαϊκά μαθήματα ΠΠ

---

## Τίτλος Μαθήματος: Γραμμική Άλγεβρα Ι

Ενότητα: Θέματα Εξετάσεων

Όνομα Καθηγητή : Ανδρέας Αρβανιτογεώργος

Τμήμα: Μαθηματικών

---

## Άδειες Χρήσης

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό υπόκειται σε άδειες χρήσης Creative Commons.
- Για εκπαιδευτικό υλικό, όπως εικόνες, που υπόκειται σε άλλου τύπου άδειας χρήσης, η άδεια χρήσης αναφέρεται ρητώς.



## Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Πατρών**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.



Ευρωπαϊκή Ένωση  
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο



Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης



## ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ I 14-6-10

Διδάσκων: Α. Αρβανιτογεώργος

Συμβολίζουμε με  $\mathbf{F}$  το σώμα των πραγματικών ή των μιγαδικών αριθμών και με  $M_{m \times n}(\mathbf{F})$  τον διανυσματικό χώρο των  $m \times n$  πινάκων με στοιχεία από το  $\mathbf{F}$ .

1. Έστω  $W_1$  και  $W_2$  τα υποσύνολα του  $M_{2 \times 2}(\mathbf{F})$  που αποτελούνται από στοιχεία της μορφής  $\begin{pmatrix} a & b \\ 2b & a \end{pmatrix}$  και  $\begin{pmatrix} a & -a \\ b & c \end{pmatrix}$  αντίστοιχα.

(α) Αποδείξτε ότι τα  $W_1, W_2$  είναι υποχώροι του  $M_{2 \times 2}(\mathbf{F})$ .

(β) Βρείτε βάσεις για τους υποχώρους  $W_1, W_2$  και  $W_1 \cap W_2$ .

(γ) Να βρεθούν οι διαστάσεις των  $W_1, W_2, W_1 \cap W_2$  και  $W_1 + W_2$ . [15]

2. (α) Να ελέγξετε κατά πόσον τα διανύσματα  $(-2, 1 - 2), (3, 2, -1), (-1, -1, 1)$  είναι γραμμικώς ανεξάρτητα στον  $\mathbf{R}^3$

(β) Έστω  $T : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^3$  γραμμική απεικόνιση με  $T(-2, 1 - 2) = (-3, 1, 2), T(3, 2, -1) = (2, -2, 1), T(-1, -1, 1) = (-1, 2, 4)$ . Βρείτε την τιμή  $T(1, 1, -1)$ . [20]

3. (α) Έστω  $A = \begin{pmatrix} 2 & 123 & -1 \\ 1 & 456 & 1 \\ 2 & 789 & 1 \end{pmatrix}$ . Αν γνωρίζετε ότι  $\det A = -420$ , βρείτε την τιμή του  $x_2$  της

λύσης του συστήματος  $A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ .

(β) Έστω  $A$  ένας  $n \times n$  πίνακας με  $A^t = -A$  και  $n$  περιττός. Αποδείξτε ότι ο  $A$  δεν είναι αντιστρέψιμος. [10]

4. Έστω  $T : \mathbf{C} \rightarrow M_{2 \times 2}(\mathbf{R})$  η απεικόνιση με τύπο  $T(a + ib) = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$ .

(α) Αποδείξτε ότι η  $T$  είναι γραμμική.

(β) Βρείτε τον πίνακα της  $T$  ως προς τις κανονικές βάσεις των αντίστοιχων διανυσματικών χώρων (δηλ.  $\{(1, 0), (0, 1)\}$  και  $\{E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22}\}$ ).

(γ) Βρείτε τον πυρήνα και την εικόνα της  $T$ . Ποιά η τάξη της  $T$ ;

(δ) Να ελέγξετε αν η  $T$  είναι 1-1 ή επί. [20]

5. Δίνεται ο πίνακας  $A = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ -3 & -5 \end{pmatrix}$ .

(α) Βρείτε τον πίνακα  $A^{2010}$ .

(β) Ισχύει ότι αν  $A$  είναι ένας  $n \times n$  διαγωνιοποιήσιμος πίνακας, τότε κάθε διάνυσμα  $x \in \mathbf{R}^n$  είναι ένα ιδιοδιάνυσμα του  $A$ ; Αποδείξτε ή δώστε αντιπαράδειγμα. [20]

6. Έστω  $c \in \mathbf{R}, n \in \mathbf{N}$  σταθεροί αριθμοί και συμβολίζουμε με  $V$  τον διανυσματικό χώρο όλων των πραγματικών συναρτήσεων της μορφής  $p(x)e^{cx}$ , όπου  $p(x)$  πολυώνυμο βαθμού το πολύ  $n - 1$ . Θεωρούμε τον γραμμικό τελεστή  $T : V \rightarrow V$  με  $T = \frac{d}{dx}$ .

(α) Αποδείξτε ότι το σύνολο  $\{e^{cx}, xe^{cx}, x^2e^{cx}, \dots, x^{n-1}e^{cx}\}$  αποτελεί βάση του  $V$ .

(β) Βρείτε το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του  $T$ .

(γ) Είναι ο  $T$  διαγωνιοποιήσιμος; [15]

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!

ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ Ι 20-6-11

Διδάσκων: Α. Αρβανιτογεώργος

1. (α) Αποδείξτε ότι το σύνολο  $V = \{(w, x, y, z) \in \mathbf{R}^4 : w = x + y + z\}$  είναι υπόχωρος του  $\mathbf{R}^4$ .

(β) Βρείτε τη διάσταση του  $V$  και μια βάση του.

(γ) Δώστε παράδειγμα ενός δισδιάστατου μη τετριμμένου υπόχωρου  $W$  του  $V$ . [15]

2. (α) Εξετάστε αν τα διανύσματα  $v_1 = (1, -2, 4, 3)$ ,  $v_2 = (4, -7, 9, 7)$ ,  $v_3 = (5, -8, 6, 5)$  του  $\mathbf{R}^4$  είναι γραμμικώς εξαρτημένα.

(β) Εξηγήστε γιατί τέσσερα οποιαδήποτε διανύσματα του  $\mathbf{R}^3$  είναι γραμμικώς εξαρτημένα. [10]

3. Έστω  $T : \mathbf{R}^4 \rightarrow \mathbf{R}^3$  γραμμική απεικόνιση με πίνακα  $[T] = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 5 & 5 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \end{pmatrix}$ .

Να βρείτε τον πυρήνα και την εικόνα της  $T$  καθώς και βάσεις αυτών. [15]

4. Να βρεθεί η γενική λύση του γραμμικού συστήματος  $\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 + 3x_5 = 1 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 6x_5 = 2 \\ 3x_1 + 2x_2 - 4x_3 - 3x_4 - 9x_5 = 3 \end{cases}$

[10]

5. Να βρεθούν οι ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα του πίνακα  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ .

Είναι ο  $A$  διαγωνιοποιήσιμος; [20]

6. Έστω  $T : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^3$  γραμμικός τελεστής με τύπο  $T(x, y, z) = (0, x, y)$ . Βρείτε τα χαρακτηριστικά πολυώνυμα των τελεστών  $T$ ,  $T^2 = T \circ T$ ,  $T^3 = T \circ T \circ T$ . Είναι ο  $T$  διαγωνιοποιήσιμος; [15]

7. Έστω  $A$  ένας  $n \times n$  πραγματικός πίνακας.

(α) Δείξτε ότι αν  $A^t = -A$  και  $n$  περιττός, τότε  $\det(A) = 0$ .

(β) Δείξτε ότι αν  $A^2 + I = 0$ , τότε ο  $n$  είναι άρτιος.

(γ) Ισχύει το (β) για μιγαδικούς πίνακες; [15]

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!

## ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ Ι 18-6-09

Διδάσκων: Α. Αρβανιτογεώργος

Συμβολίζουμε με  $\mathbf{F}$  το σώμα των πραγματικών ή των μιγαδικών αριθμών και με  $M_{m \times n}(\mathbf{F})$  τον διανυσματικό χώρο των  $m \times n$  πινάκων με στοιχεία από το  $\mathbf{F}$ .

1. Να εξετάσετε αν τα παρακάτω υποσύνολα είναι υπόχωροι του  $M_{3 \times 3}(\mathbf{R})$ :

$$W_1 = \{A = (a_{ij}) \in M_{3 \times 3}(\mathbf{R}) : a_{11} = 1\},$$

$W_2 =$  το σύνολο των συμμετρικών  $3 \times 3$  πινάκων.

Σε καταφατική απάντηση να δοθεί μια βάση αυτών. [10]

2. (α) Πότε τα διανύσματα  $v_1, v_2, \dots, v_n$  ενός διανυσματικού χώρου  $V$  ονομάζονται γραμμικώς εξαρτημένα;

(β) Να δοθεί ο ορισμός της τάξης μιας γραμμικής απεικόνισης  $T : V \rightarrow W$  και ενός πίνακα  $A \in M_{m \times n}(\mathbf{F})$ .

(γ) Να ελέγξετε κατά πόσον τα διανύσματα  $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ ,  $A_2 = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 10 & 2 \end{pmatrix}$ ,  $A_3 = \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 8 & 0 \end{pmatrix}$  του  $M_{2 \times 2}(\mathbf{R})$  είναι γραμμικώς εξαρτημένα. [10]

3. Να βρεθεί για ποιές τιμές της παραμέτρου  $\lambda \in \mathbf{R}$  το σύστημα

$$x_1 + x_2 + \lambda x_3 = \lambda^2$$

$$x_1 + \lambda x_2 + x_3 = \lambda$$

$$\lambda x_1 + x_2 + x_3 = 1$$

(α) έχει ακριβώς μία λύση και να δοθεί η λύση αυτή, (β) δεν έχει λύσεις, (γ) έχει άπειρες λύσεις. [15]

4. Έστω  $T : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^3$  η γραμμική απεικόνιση με πίνακα  $[T]_\beta = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$  ως προς την κανονική

διατεταγμένη βάση  $\beta = \{e_1, e_2, e_3\}$  του  $\mathbf{R}^3$ .

(α) Να υπολογιστούν τα  $T(e_1), T(e_2), T(e_3)$  και να βρεθεί ο τύπος της  $T$ .

(β) Να βρεθεί η τάξη της  $T$ .

(γ) Αποδείξτε ότι η  $T$  δεν είναι επί. [20]

5. Θεωρούμε τη γραμμική απεικόνιση  $T : V \rightarrow W$ . Αποδείξτε τα εξής:

(α) Εάν  $\dim V > \dim W$  η  $T$  δεν είναι 1-1.

(β) Εάν  $\dim V < \dim W$  η  $T$  δεν είναι επί. [10]

6. Δίνεται ο πίνακας  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ .

(α) Βρείτε το χαρακτηριστικό πολυώνυμο και τις ιδιοτιμές του  $A$ .

(β) Για κάθε ιδιοτιμή του  $A$  βρείτε ένα ιδιοδιάνυσμα.

(γ) Είναι ο  $A$  διαγωνιοποιήσιμος; [15]

7. Έστω  $A \in M_{2 \times 2}(\mathbf{F})$  και  $\lambda_1, \lambda_2$  δύο διαφορετικές μεταξύ τους ιδιοτιμές του  $A$  με αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα  $x_1$  και  $x_2$ . Αποδείξτε ότι τα  $x_1, x_2$  είναι γραμμικώς ανεξάρτητα. Διατυπώστε και αποδείξτε γενίκευση για πίνακα  $A \in M_{n \times n}(\mathbf{F})$ . [20]

**ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!**

## ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ Ι \*\*-9-09

Διδάσκων: Α. Αρβανιτογεώργος

Συμβολίζουμε με  $\mathbf{F}$  το σώμα των πραγματικών ή των μιγαδικών αριθμών και με  $M_{m \times n}(\mathbf{F})$  τον διανυσματικό χώρο των  $m \times n$  πινάκων με στοιχεία από το  $\mathbf{F}$ .

1. Ποιό από τα παρακάτω υποσύνολα του  $\mathbf{R}^3$  είναι υπόχωρος του  $\mathbf{R}^3$ ;

$$W_1 = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : x + y = 1, z = 0\}$$

$$W_2 = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : 2x - 3y + z = 0\}$$

Σε καταφατική απάντηση να βρεθεί μια βάση του. [10]

2. (α) Πότε τα διανύσματα  $v_1, v_2, \dots, v_n$  ενός διανυσματικού χώρου  $V$  ονομάζονται γραμμικώς ανεξάρτητα;

(β) Να δοθεί ο ορισμός της τάξης μιας γραμμικής απεικόνισης  $T : V \rightarrow W$  και ενός πίνακα  $A \in M_{m \times n}(\mathbf{F})$ .

(γ) Να ελέγξετε κατά πόσον τα διανύσματα  $(1 \ 1 \ 0), (1 \ 2 \ 2), (2 \ 0 \ 1), (1 \ 1 \ 2)$  του  $\mathbf{R}^3$  είναι γραμμικώς ανεξάρτητα. [15]

3. Έστω  $a \neq b \neq c$ . Αποδείξτε ότι το σύστημα

$$\begin{aligned} x + y + z &= 1 \\ ax + by + cz &= 2 \\ a^2x + b^2y + c^2z &= -1 \end{aligned}$$

έχει πάντα μοναδική λύση. [10]

4. Έστω  $T : M_{2 \times 3}(\mathbf{R}) \rightarrow M_{2 \times 2}(\mathbf{R})$  η γραμμική απεικόνιση με τύπο

$$T \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a_{11} - a_{12} & a_{13} + 2a_{12} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(α) Βρείτε τον πίνακα της  $T$  ως προς τις κανονικές βάσεις των αντίστοιχων διανυσματικών χώρων.

(β) Βρείτε βάσεις του πυρήνα και της εικόνας της  $T$ . (γ) Να ελέγξετε αν η  $T$  είναι 1-1 ή επί. [20]

5. Δίνεται ο πίνακας  $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ .

(α) Βρείτε τις ιδιοτιμές του  $A$ . (β) Για κάθε ιδιοτιμή του  $A$  βρείτε ένα ιδιοδιάνυσμα. (γ) Βρείτε το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του  $A$ .

(δ) Είναι ο  $A$  διαγωνιοποιήσιμος; [20]

6. Δύο πίνακες  $A, B \in M_{n \times n}(\mathbf{F})$  ονομάζονται όμοιοι εάν υπάρχει ένας  $n \times n$  αντιστρέψιμος πίνακας  $Q$  με την ιδιότητα  $A = Q^{-1}BQ$ .

(α) Αποδείξτε ότι αν ο πίνακας  $A$  είναι όμοιος με τον  $\lambda I_n$  ( $\lambda \in \mathbf{F}$ ) τότε  $A = \lambda I_n$ .

(β) Δείξτε ότι ένας διαγωνιοποιήσιμος πίνακας  $A$  ο οποίος έχει μόνο μία ιδιοτιμή, είναι της μορφής  $A = \lambda I_n$ .

(γ) Δείξτε ότι ο πίνακας  $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  δεν είναι διαγωνιοποιήσιμος. [15]

7. Έστω  $A, B \in M_{2 \times 2}(\mathbf{F})$ . Αποδείξτε ότι  $(AB - BA)^2 = -\det(AB - BA)I_2$ . [10]

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!

## ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ Ι

20-9-10

Διδάσκων: Α. Αρβανιτογεώργος

Συμβολίζουμε με  $\mathbf{F}$  το σώμα των πραγματικών ή των μιγαδικών αριθμών και με  $M_{m \times n}(\mathbf{F})$  τον διανυσματικό χώρο των  $m \times n$  πινάκων με στοιχεία από το  $\mathbf{F}$ .

1. Έστω  $W_1$  και  $W_2$  τα υποσύνολα του  $M_{2 \times 2}(\mathbf{F})$  που αποτελούνται από στοιχεία της μορφής  $\begin{pmatrix} a & a+b \\ a+c & b+c \end{pmatrix}$  και  $\begin{pmatrix} x & x \\ -y & y \end{pmatrix}$  αντίστοιχα.

(α) Αποδείξτε ότι τα  $W_1, W_2$  είναι υπόχωροι του  $M_{2 \times 2}(\mathbf{F})$ .

(β) Βρείτε βάσεις για τους υπόχωρους  $W_1, W_2$  και  $W_1 \cap W_2$ .

(γ) Να βρεθούν οι διαστάσεις των  $W_1, W_2, W_1 \cap W_2$  και  $W_1 + W_2$ . [20]

2. (α) Έστω  $S_0$  ο χώρος των λύσεων του ομογενούς γραμμικού συστήματος  $Ax = 0$  όπου  $x$  το διάνυσμα-στήλη των αγνώστων. Αποδείξτε ότι αν  $x_0$  είναι μια λύση του συστήματος  $Ax = B$  και  $S$  το σύνολο των λύσεων αυτού, τότε ισχύει  $S = \{x_0\} + S_0 \equiv \{x_0 + s : s \in S_0\}$ .

(β) Να λυθεί το γραμμικό σύστημα  $\begin{cases} 3x_1 - 3x_2 - 6x_3 - 2x_4 = 1 \\ x_1 - x_2 - 2x_3 + 5x_4 = 6 \end{cases}$  και να εκφραστεί το σύνολο των λύσεων  $S$  στη μορφή  $\{x_0\} + S_0$ , όπως στο ερώτημα (α). [20]

3. Έστω  $T : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^3$  η απεικόνιση με τύπο  $T(x, y, z) = (x + 2y - z, y + 2z, x + y - z)$ .

(α) Αποδείξτε ότι η  $T$  είναι γραμμική.

(β) Βρείτε τον πίνακα της  $T$  ως προς την κανονική βάση του  $\mathbf{R}^3$ .

(γ) Βρείτε τον πυρήνα και την εικόνα της  $T$ , καθώς και βάσεις αυτών.

(δ) Να ελέγξετε αν η  $T$  είναι 1-1 ή επί. [25]

4. Δίνεται ο πίνακας  $A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix} \in M_{3 \times 3}(\mathbf{R})$ .

(α) Δείξτε ότι το 3 και το 5 είναι ιδιοτιμές του  $A$ .

(β) Βρείτε βάσεις για τους ιδιόχωρους  $E_3$  και  $E_5$ .

(γ) Ισχύει ότι  $\dim E_3 + \dim E_5 = 3$ ; Είναι ο  $A$  διαγωνιοποιήσιμος; [20]

5. Να υπολογιστεί η ορίζουσα  $\begin{vmatrix} 1+a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+b & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1-b \end{vmatrix}$ . [15]

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!