Τίτλος Μαθήματος: Γραμμική Άλγεβρα Ι

Ενότητα: Ερωτήσεις και Απαντήσεις

Όνομα Καθηγητή : Ανδρέας Αρβανιτογεώργος

Τμήμα: Μαθηματικών

Άδειες Χρήσης

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Πατρών**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο

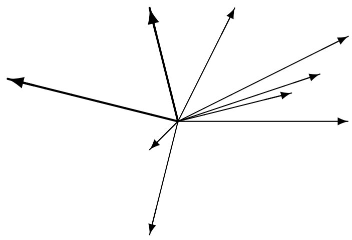
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ

ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΣΤΗ ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ

Ανδρέας Αρβανιτογεώργος



10 Δεκεμβρίου 2009

Κεφάλαιο 1

Εισαγωγή

Το μικρό αυτό βιβλίο αποτελείται από διάφορες προτάσεις που αφορούν τα μαθήματα της Γραμμικής Άλγεβρας που διδάσκονται στο Μαθηματικό Τμήμα του Πανεπιστημίου Πατρών και για τις οποίες ο αναγνώστης καλείται να αποφανθεί κατά πόσον αυτές είναι αληθείς ή ψευδείς. Οι περισσότερες έχουν ληφθεί από το βιβλίο [**2**], αλλά υπάρχει εμπλουτισμός με επιπλέον ερωτήσεις. Αποτελεί συνοδευτικό βοήθημα του μαθήματος και των πηγών που προτείνει ο διδάσκων.

Η σύσταση για τη χρησιμοποίησή του έχει ως εξής: Στην αρχή ο αναγνώστης είναι καλό να μελετήσει και να κατανοήσει τη σχετική θεωρία με παραδείγματα, ασκήσεις κλπ. Στη συνέχεια, για κάθε μία από τις προτάσεις που ακολουθούν, τίθεται ο προβληματισμός κατά πόσον κάποια πρόταση είναι αληθής ή ψευδής. Η καλή γνώση της θεωρίας οδηγεί αρχικά σε μία υποψία για τη σωστή απάντηση. Μια αληθής πρόταση βασίζεται συνήθως σε κάποιον ορισμό, σε ένα αποτέλεσμα της θεωρίας, ή πρέπει να αποδειχθεί. Για τις αληθείς προτάσεις δεν δίνω αποδείξεις, καθώς αυτές μπορούν είτε να αποδειχθούν, είτε να αναζητηθούν στη βιβλιογραφία που παρατίθεται.

Η βαρύτητα δίνεται στις ψευδείς προτάσεις, για τις οποίες, εάν δεν αντιβαίνουν σε κάποιον ορισμό, ο αναγνώστης καλείται να δώσει κάποιο *αντιπαράδειγμα*. Ένα γνωστικό σφάλμα που παρατηρώ τακτικά στις τάξεις μου είναι ότι, η αιτιολόγηση μιας ψευδούς μαθηματικής πρότασης προκύπτει από το γεγονός ότι η συγκεκριμένη πρόταση δεν συμπίπτει με ένα γνωστό αποτέλεσμα (π.χ. θεώρημα, ισότητα κλπ). Το σωστό όμως είναι να δοθεί ένα συγκεκριμένο παραδείγμα που καθιστά την πρόταση ψευδή (δηλαδή ένα αντιπαράδειγμα). Για παράδειγμα, ο λόγος που η ισότητα $(a+b)^2 = a^2+b^2$ είναι ψευδής, δεν είναι ότι αυτή αντιβαίνει στη γνωστή ταυτότητα $(a+b)^2 = a^2+b^2+2ab$, αλλά ότι υπάρχουν αριθμοί, π.χ. $a=2, b=3$, τέτοιοι ώστε $25 = (2+3)^2 \neq 2^2+3^2 = 13$.

Προσπάθησα να δώσω όσο το δυνατόν απλά αντιπαραδείγματα, αλλά ενδεχομένως ο αναγνώστης μπορεί να σκεφτεί και κάποια απλούστερα.

Ανδρέας Αρβανιτογεώργος
Πάτρα 2009

arvanito@math.upatras.gr

Συμβολισμοί

$\star$ Οι διανυσματικοί χώροι είναι πεπερασμένης διάστασης, συμβολίζονται με $V, W, \ldots$ και τα στοιχεία τους $x_1, \ldots x_n, y_1, \ldots, y_n$ ονομάζονται *διανύσματα*.

$\star$ Τα στοιχεία a, b, c ενός σώματος $\mathbf{F}$ ονομάζονται *αριθμοί*. Συνήθως $\mathbf{F} = \mathbf{R}$ ή $\mathbf{C}$.

$\star$ $P(\mathbf{F})$ ο διανυσματικός χώρος (δ.χ.) των πολυωνύμων ανεξαρτήτως βαθμού με συντελεστές στο σώμα $\mathbf{F}$.

$\star$ $P_n(\mathbf{F})$ ο δ.χ.των πολυωνύμων βαθμού το πολύ n με συντελεστές στο σώμα $\mathbf{F}$.

$\star$ $M_{m\times n}(\mathbf{F})$ ο δ.χ. των $m \times n$ πινάκων με στοιχεία στο σώμα $\mathbf{F}$. Τα στοιχεία του τα συμβολίζουμε με $A, B, C, \ldots$.

$\star$ $\mathcal{F}(A, B)$ ο δ.χ. των συναρτήσεων από το σύνολο A στο σύνολο B.

$\star$ $\mathrm{span}(S)$ ο διανυσματικός υπόχωρος του V που παράγεται από το υποσύνολο $S \subset V$.

$\star$ $\mathcal{L}(V, W)$ ο δ.χ. των γραμμικών απεικονίσεων από τον δ.χ. V στον δ.χ. W. Ένα στοιχείο του $\mathcal{L}(V, V) \equiv \mathcal{L}(V)$ ονομάζεται *γραμμικός τελεστής*.

$\star$ $\mathrm{Id}_V : V \to V$ ο ταυτοτικός γραμμικός τελεστής.

$\star$ $T_0 : V \to V$ ο μηδενικός γραμμικός τελεστής.

$\star$ $L_A : \mathbf{F}^n \to \mathbf{F}^m$ ($A \in M_{m\times n}(\mathbf{F})$ η γραμμική απεικόνιση με τύπο $L_A(x) = Ax$ ($x \in \mathbf{F}^n$ διάνυσμα-στήλη).

$\star$ $[T]_\beta^\gamma$ ο πίνακας της γραμμικής απεικόνισης $T : V \to W$, ως προς τις διατεταγμένες βάσεις β, γ των V, W αντίστοιχα.

$\star$ $[x]_\beta$ το διάνυσμα-στήλη $(\lambda_1\ \lambda_2\ \cdots\ \lambda_n)^t$ του δ.χ. $\mathbf{F}^n$, όταν το στοιχείο x του δ.χ. V διάστασης n, εκφραστεί ως $x = \sum \lambda_i x_i$, όπου $\beta = \{x_1, \ldots, x_n\}$ είναι μια διατεταγμένη βάση του V.

$\star$ $(A|B)$ ο $m \times (n + 1)$ πίνακας (επαυξημενος πίνακας) που αντιστοιχεί στο γραμμικό σύστημα $AX = B$, m εξισώσεων με n αγνώστους $(x_1\ x_2\ \cdots\ x_n)^t$.

$\star$ E_λ ο ιδιόχωρος του γραμμικού τελεστή $T : V \to V$ που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή λ.

Κεφάλαιο 2

Ερωτήσεις

2.1 Διανυσματικοί χώροι

1. *Κάθε διανυσματικός χώρος περιέχει τουλάχιστον ένα μηδενικό διάνυσμα.*
2. *Κάθε διανυσματικός χώρος περιέχει περισσότερα από ένα μηδενικά διανύσματα.*
3. *Σε κάθε διανυσματικό χώρο ισχύει η συνεπαγωγή* $ax = bx \Rightarrow a = b$.
4. *Σε κάθε διανυσματικό χώρο ισχύει η συνεπαγωγή* $ax = ay \Rightarrow x = y$.
5. *Κάθε στοιχείο του συνόλου* $\mathbf{F}^n$ *μπορεί να θεωρηθεί ως στοιχείο του συνόλου* $\mathrm{M}_{n\times 1}(\mathbf{F})$.
6. *Ένας* $m \times n$ *πίνακας περιέχει* m *στήλες και* n *γραμμές.*
7. *Στο σύνολο* $\mathrm{P}(F)$ *η πρόσθεση πολυωνύμων επιτρέπεται μόνον όταν αυτά έχουν τον ίδιο βαθμό.*
8. *Εάν* f *και* g *είναι πολυώνυμα βαθμού* n, *τότε το πολυώνυμο* $f+g$ *είναι βαθμού* n.
9. *Εάν* f *είναι ένα πολυώνυμο βαθμού* n *και* c *μια μη μηδενική βαθμωτή ποσότητα, τότε το πολυώνυμο* cf *είναι βαθμού* n.
10. *Κάθε μη μηδενικό στοιχείο του* $\mathbf{F}$ *μπορεί να θεωρηθεί ως στοιχείο του* $\mathrm{P}(\mathbf{F})$ *με βαθμό μηδέν.*
11. *Δύο συναρτήσεις του συνόλου* $\mathcal{F}(S,\mathbf{F})$ *είναι ίσες εάν και μόνο εάν παίρνουν την ίδια τιμή για κάθε στοιχείο του* S.

2.2 Διανυσματικοί υπόχωροι

12. *Εάν* V *είναι διανυσματικός χώρος και* W *ένα υποσύνολο του* V *το οποίο είναι διανυσματικός χώρος, τότε το* W *είναι υπόχωρος του* V.
13. *Το κενό σύνολο είναι υπόχωρος κάθε διανυσματικού χώρου.*

14. *Κάθε δ.χ.* $V \neq \{0\}$ *περιέχει έναν υπόχωρο* $W \neq V$.
15. *Η τομή δύο υποσυνόλων ενός δ.χ.* V *είναι υπόχωρος του* V.
16. *Ένας* $n \times n$ *διαγώνιος πίνακας δεν μπορεί να έχει περισσότερα από* n *μη μηδενικά στοιχεία.*
17. *Το ίχνος ενός τετραγωνικού πίνακα ισούται με το γινόμενο των στοιχείων της διαγωνίου του.*

2.3 Γραμμικοί συνδυσμοί - Παραγόμενος χώρος

18. *Το μηδενικό διάνυσμα γράφεται ως γραμμικός συνδυασμός οποιωνδήποτε διανυσμάτων.*
19. *Ο χώρος που παράγεται από το κενό σύνολο είναι το κενό σύνολο.*
20. *Αν* S *είναι ένα υποσύνολο ενός δ.χ.* V, *τότε το* $\mathrm{span}(S)$ *ισούται με την τομή όλων των υποχώρων του* V *οι οποίοι περιέχουν το* S.

2.4 Γραμμική εξάρτηση - Γραμμική ανεξαρτησία

21. *Αν* S *είναι ένα γραμμικώς εξαρτημένο σύνολο, τότε κάθε στοιχείο του* S *εκφράζεται ως γραμμικός συνδυασμός άλλων στοιχείων του* S.
22. *Κάθε σύνολο το οποίο περιέχει το μηδενικό διάνυσμα είναι γραμμικώς ανεξάρτητο.*
23. *Το κενό σύνολο είναι γραμμικώς εξαρτημένο.*
24. *Υποσύνολα γραμμικώς εξαρτημένων συνόλων είναι γραμμικώς εξαρτημένα.*
25. *Υποσύνολα γραμμικώς ανεξάρτητων συνόλων είναι γραμμικώς ανεξάρτητα.*
26. *Εάν* $a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = 0$ *και τα* $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *είναι γραμμικώς ανεξάρτητα, τότε όλοι οι αριθμοί* a_i *είναι μηδέν.*

2.5 Βάση και διάσταση

27. *Ο μηδενικός υπόχωρος δεν περιέχει καμμία βάση.*
28. *Κάθε δ.χ. ο οποίος παράγεται από ένα πεπερασμένο σύνολο περιέχει μια βάση.*
29. *Κάθε δ.χ. περιέχει μια πεπερασμένη βάση.*
30. *Ένας δ.χ. δεν μπορεί να περιέχει περισσότερες από μια βάσεις.*
31. *Εάν ένας δ.χ. περιέχει μια πεπερασμένη βάση, τότε όλες οι βάσεις του περιέχουν το ίδιο πλήθος στοιχείων.*
32. *Η διάσταση του δ.χ.* $P_n(\mathbf{F})$ *είναι* n.

33. *Η διάσταση του δ.χ.* $M_{m\times n}(\mathbf{F})$ *είναι* $m+n$.
34. *Έστω* V *δ.χ. πεπερασμένης διάστασης,* S_1 *ένα γραμμικώς ανεξάρτητο υποσύνολο του* V *και* S_2 *ένα υποσύνολο του* V *το οποίο να παράγει τον* V. *Τότε το* S_1 *δεν μπορεί να περιέχει περισσότερα στοιχεία από το* S_2.
35. *Εάν ο δ.χ.* V *παράγεται από το υποσύνολο* S, *τότε κάθε στοιχείο του* V *γράφεται ως γραμμικός συνδυασμός στοιχείων του* S *κατά μοναδικό τρόπο.*
36. *Κάθε υπόχωρος ενός δ.χ. πεπερασμένης διάστασης είναι πεπερασμένης διάστασης.*
37. *Εάν ο δ.χ.* V *έχει διάσταση* n, *τότε ο* V *περιέχει ακριβώς έναν υπόχωρο διάστασης* 0 *και ακριβώς έναν υπόχωρο διάστασης* n.

2.6 Γραμμικές απεικονίσεις, πυρήνας, εικόνα

Για τις προτάσεις **38** - **45** οι V, W είναι διανυσματικοί χώροι (επί του σώματος $\mathbf{F}$) και η T μια συνάρτηση από τον V στον W.

38. *Εάν η* T *είναι γραμμική, τότε η* T *διατηρεί αθροίσματα και βαθμωτούς πολλαπλασιασμούς.*
39. *Εάν για κάθε* $x, y \in V$ *ισχύει* $T(x+y) = T(x) + T(y)$, *τότε η* T *είναι γραμμική.*
40. *Η* T *είναι* $1-1$ *εάν και μόνο εάν* $\mathrm{Ker}(T) = \{0\}$.
41. *Εάν η* T *είναι γραμμική τότε* $T(0_V) = 0_W$.
42. *Εάν η* T *είναι γραμμική τότε* $\dim \mathrm{Ker} T + \dim \mathrm{Im} T = \dim W$
43. *Εάν η* T *είναι γραμμική, τότε η* T *απεικονίζει γραμμικώς ανεξάρτητα υποσύνολα του* V *σε γραμμικώς ανεξάρτητα υποσύνολα του* W.
44. *Εάν οι* $T, U : V \to W$ *είναι γραμμικές απεικονίσεις οι οποίες παίρνουν την ίδια τιμή σε μια βάση του* V, *τότε* $T = U$.
45. *Εάν* $x_1, x_2 \in V$ *και* $y_1, y_2 \in W$, *τότε υπάρχει γραμμική απεικόνιση* $T : V \to W$ *τέτοια ώστε* $T(x_1) = y_1$ *και* $T(x_2) = y_2$.

2.7 Ο πίνακας μιας γραμμικής απεικόνισης

Για τις προτάσεις **46** - **51** οι β και γ είναι διατεταγμένες βάσεις των δ.χ. V και W αντίστοιχα και $T, U : V \to W$ είναι γραμμικές απεικονίσεις.

46. *Για κάθε αριθμό* $a \in \mathbf{F}$, *η απεικόνιση* $aT + U : V \to W$ *είναι γραμμική.*
47. *Εάν* $[T]_\beta^\gamma = [U]_\beta^\gamma$ *τότε* $T = U$.
48. *Εάν* $\dim V = m$ *και* $\dim W = n$ *τότε ο* $[T]_\beta^\gamma$ *είναι πίνακας* $m \times n$.
49. $[T+U]_\beta^\gamma = [T]_\beta^\gamma + [U]_\beta^\gamma$.
50. *Το σύνολο* $\mathcal{L}(V, W)$ *είναι διανυσματικός χώρος.*
51. $\mathcal{L}(V, W) = \mathcal{L}(W, V)$.

2.8 Σύνθεση γραμμικών απεικονίσεων και πολλαπλασιασμός πινάκων

Για τις προτάσεις **52** - **61** οι α, β και γ είναι διατεταγμένες βάσεις των δ.χ. V, W και Z αντίστοιχα. Οι $T : V \to W$ και $U : W \to Z$ είναι γραμμικές απεικονίσεις και οι A, B είναι πίνακες.

52. $[UT]_\alpha^\gamma = [T]_\alpha^\beta [U]_\beta^\gamma$.
53. *Για κάθε* $x \in V$ *ισχύει* $[T(x)]_\beta = [T]_\alpha^\beta [x]_\alpha$.
54. *Για κάθε* $y \in W$ *ισχύει* $[U(y)]_\beta = [U]_\alpha^\beta [y]_\beta$.
55. $[\mathrm{Id}_V]_\alpha = I$.
56. $[T^2]_\alpha^\beta = ([T]_\alpha^\beta)^2$.
57. *Εάν* $A^2 = I$ *τότε είτε* $A = I$ *είτε* $A = -I$.
58. $T = L_A$ *για κάποιον πίνακα* A.
59. *Εάν* $A^2 = O$ *τότε* $A = O$.
60. $L_{A+B} = L_A + L_B$.
61. *Εάν ο πίνακας* $A = (a_{ij})$ *είναι τετραγωνικός και* $a_{ij} = \delta_{ij}$ *για κάθε* i, j, *τότε* $A = I$.

2.9 Αντιστρέψιμες γραμμικές απεικονίσεις και ισομορφισμοί

Για τις προτάσεις **62** - **70** οι α και β είναι διατεταγμένες βάσεις των δ.χ. V και W αντίστοιχα, η $T : V \to W$ είναι γραμμική απεικόνιση και οι A, B είναι πίνακες.

62. $([T]_\alpha^\beta)^{-1} = [T^{-1}]_\alpha^\beta$.
63. *Η* T *είναι αντιστρέψιμη εάν και μόνο εάν είναι* $1-1$ *και επί.*
64. $T = L_A$, *όπου* $A = [T]_\alpha^\beta$.
65. *Ο δ.χ.* $M_{2\times 3}(\mathbf{F})$ *είναι ισόμορφος με τον* $\mathbf{F}^5$.
66. *Ο δ.χ.* $P_n(\mathbf{F})$ *είναι ισόμορφος με τον δ.χ.* $P_m(\mathbf{F})$ *εάν και μόνο εάν* $n = m$.
67. *Εάν* $AB = I$, *τότε οι* A *και* B *είναι αντιστρέψιμοι.*
68. $(A^{-1})^{-1} = A$.
69. *Ο πίνακας* A *είναι αντιστρέψιμος εάν και μόνο εάν ο τελεστής* L_A *είναι αντιστρέψιμος.*
70. *Για να είναι ο* A *αντιστρέψιμος πρέπει να είναι τετραγωνικός.*

2.10 Αλλαγή βάσης

71. *Εάν Q είναι ο πίνακας αλλαγής βάσης από την $\beta' = \{x'_1, \ldots, x'_n\}$ στην $\beta = \{x_1, \ldots, x_n\}$ (διατεταγμένες βάσεις ενός δ.χ. V), τότε η j-στήλη του Q είναι η $[x_j]_\beta$.*
72. *Κάθε πίνακας αλλαγής βάσης είναι αντιστρέψιμος.*
73. *Έστω $T : V \to V$ γραμμικός μετασχηματισμός και β, β' διατεταγμένες βάσεις του V. Τότε $[T]_\beta = Q[T]_{\beta'}Q^{-1}$, όπου Q είναι ο πίνακας αλλαγής βάσης από την β' στην β.*
74. *Δύο πίνακες $A, B \in M_{n\times n}(\mathbf{F})$ ονομάζονται όμοιοι εάν $B = Q^tAQ$ για κάποιον πίνακα $Q \in M_{n\times n}(\mathbf{F})$.*
75. *Έστω $T : V \to V$ γραμμικός μετασχηματισμός. Τότε για οποιεσδήποτε διατεταγμένες βάσεις β, γ του V, ο πίνακας $[T]_\beta$ είναι όμοιος με τον πίνακα $[T]_\gamma$.*

2.11 Στοιχειώδεις πράξεις πινάκων και στοιχειώδεις πίνακες

76. *Ένας στοιχειώδης πίνακας είναι πάντα τετραγωνικός.*
77. *Τα μοναδικά στοιχεία ενός στοιχειώδους πίνακα είναι το μηδέν και το ένα.*
78. *Ο $n \times n$ ταυτοτικός πίνακας είναι ένας στοιχειώδης πίνακας.*
79. *Το γινόμενο δύο $n \times n$ στοιχειωδών πινάκων είναι στοιχειώδης πίνακας.*
80. *Ο αντίστροφος ενός στοιχειώδους πίνακα είναι στοιχειώδης πίνακας.*
81. *Το άθροισμα δύο $n \times n$ στοιχειωδών πινάκων είναι στοιχειώδης πίνακας.*
82. *Ο ανάστροφος ενός στοιχειώδους πίνακα είναι στοιχειώδης πίνακας.*
83. *Εάν B είναι ένας πίνακας ο οποίος προκύπτει από τον πίνακα A με μια στοιχειώδη πράξη στις γραμμές του A, τότε ο B μπορεί να προκύψει με μια στοιχειώδη πράξη στις στήλες του A .*
84. *Εάν B είναι ένας πίνακας ο οποίος προκύπτει από τον πίνακα A με μια στοιχειώδη πράξη στις γραμμές του A, τότε ο A μπορεί να προκύψει με μια στοιχειώδη πράξη στις γραμμές του B .*

2.12 Τάξη πίνακα και αντίστροφος ενός πίνακα

85. *Η τάξη ενός πίνακα ισούται με τον αριθμό των μη μηδενικών στηλών του.*
86. *Η τάξη του γινομένου δύο πινάκων ισούται με την μικρότερη από τις τάξεις των δύο πινάκων.*
87. *Ο μοναδικός πίνακας με τάξη 0 είναι ο $m \times n$ μηδενικός πίνακας.*
88. *Οι στοιχειώδεις πράξεις στις γραμμές ενός πίνακα διατηρούν την τάξη.*

89. *Οι στοιχειώδεις πράξεις στις στήλες ενός πίνακα δεν διατηρούν γενικά την τάξη.*
90. *Η τάξη ενός πίνακα ισούται με τον μέγιστο αριθμό των γραμμικώς ανεξάρτητων γραμμών του.*
91. *Ο αντίστροφος ενός πίνακα είναι δυνατόν να υπολογιστεί με χρήση στοιχειωδών πράξεων στις γραμμές του.*
92. *Η τάξη ενός $n \times n$ πίνακα είναι το πολύ n.*
93. *Εάν ένας $n \times n$ πίνακας έχει τάξη n τότε αυτός είναι αντιστρέψιμος.*

2.13 Συστήματα γραμμικών εξισώσεων - θεωρία

94. *Κάθε γραμμικό σύστημα έχει τουλάχιστον μία λύση.*
95. *Κάθε γραμμικό σύστημα έχει το πολύ μία λύση.*
96. *Κάθε ομογενές σύστημα έχει τουλάχιστον μία λύση.*
97. *Κάθε γραμμικό σύστημα n εξισώσεων με n αγνώστους έχει το πολύ μία λύση.*
98. *Κάθε γραμμικό σύστημα n εξισώσεων με n αγνώστους έχει τουλάχιστον μία λύση.*
99. *Εάν το ομογενές σύστημα που αντιστοιχεί σε ένα γραμμικό σύστημα έχει λύση, τότε και το αρχικό σύστημα έχει λύση.*
100. *Εάν ο πίνακας των συντελεστών ενός ομογενούς συστήματος n εξισώσεων με n αγνώστους είναι αντιστρέψιμος, τότε το σύστημα δεν έχει μη τετριμμένες λύσεις.*
101. *Το σύνολο των λύσεων ενός γραμμικού συστήματος m εξισώσεων με n αγνώστους είναι υπόχωρος του δ.χ. $\mathbf{F}^n$.*

2.14 Συστήματα γραμμικών εξισώσεων - υπολογισμοί

102. *Εάν ο πίνακας $(A' \mid B')$ προκύπτει από τον $(A \mid B)$ μετά από πεπερασμένο πλήθος στοιχειωδών πράξεων στις στήλες, τότε τα συστήματα $AX = B$ και $A'X = B'$ είναι ισοδύναμα.*
103. *Εάν ο πίνακας $(A' \mid B')$ προκύπτει από τον $(A \mid B)$ μετά από πεπερασμένο πλήθος στοιχειωδών πράξεων στις γραμμές, τότε τα συστήματα $AX = B$ και $A'X = B'$ είναι ισοδύναμα.*
104. *Εάν ο A είναι ένας $n \times n$ πίνακας τάξης n, τότε η κλιμακωτή μορφή του A (μετά από στοιχειώδεις πράξεις στις γραμμές του) είναι I_n.*

105. *Κάθε πίνακας μπορεί να εκφραστεί σε κλιμακωτή μορφή, μετά από πεπερασμένες το πλήθος στοιχειώδεις πράξεις στις γραμμές του.*
106. *Εάν ο πίνακας* $(A \mid B)$ *βρίσκεται σε κλιμακωτή μορφή, τότε το σύστημα* $AX = B$ *έχει λύση.*
107. *Έστω* $AX = B$ *ένα γραμμικό σύστημα* m *εξισώσεων με* n *αγνώστους, για το οποίο ο επαυξημένος πίνακας βρίσκεται σε κλιμακωτή μορφή. Εαν το σύστημα αυτό έχει λύσεις, τότε η διάσταση του χώρου των λύσεων του συστήματος* $AX = 0$ *είναι* $n - m'$*, όπου* m' *είναι ο αριθμός των μη μηδενικών γραμμών του* A.
108. *Εάν ένας πίνακας* A *μπορεί να μετασχηματιστεί στον πίνακα* A' *μέσω στοιχειωδών πράξεων στις γραμμές, τότε ο αριθμός των μη μηδενικών γραμμών του* A' *ισούται με την τάξη του* A.

2.15 Ορίζουσες τάξης 2

109. *Η ορίζουσα ενός* 2×2 *πίνακα είναι γραμμική απεικόνιση ως προς κάθε γραμμή του πίνακα, όταν η άλλη γραμμή διατηρείται σταθερή.*
110. *Αν* I *είναι ο* 2×2 *ταυτοτικός πίνακας, τότε* $\det(I) = 0$
111. *Αν και οι δύο γραμμές ενός* 2×2 *πίνακα* A *είναι ίδιες, τότε* $\det(A) = 0$.
112. *Εάν* u, v *είναι δύο διανύσματα του* $\mathbf{R}^2$ *με σημείο εφαρμογής την αρχή των αξόνων, τότε το εμβαδό του παραλληλογράμμου με διαδοχικές πλευρές τα* u *και* v *ισούται με* $\det \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$.
113. *Ένα σύστημα συντεταγμένων* $\{u, v\}$ *είναι δεξιόστροφο εάν και μόνο εάν έχει προσανατολισμό* 1.
114. *Η ορίζουσα είναι ένας γραμμικός μετασχηματισμός από το* $M_{2\times 2}(\mathbf{F})$ *στο* $\mathbf{F}$.

2.16 Ορίζουσες τάξης n

115. *Μια συνάρτηση ορίζουσας στο* $M_{n\times n}(\mathbf{F})$ *είναι μια γραμμική απεικόνιση ως προς κάθε γραμμή ενός* $n \times n$ *πίνακα με στοιχεία από το* $\mathbf{F}$*, όταν οι υπόλοιπες* $n - 1$ *γραμμές διατηρούνται σταθερές.*
116. *Εάν* δ *είναι μια συνάρτηση ορίζουσας και δύο γραμμές του πίνακα* A *είναι ίδιες, τότε* $\delta(A) = 0$.
117. *Έστω* $\delta : M_{n\times n}(\mathbf{F}) \to F$ *μια συνάρτηση ορίζουσας. Εάν* B *είναι ένας πίνακας που προκύπτει από τον πίνακα* A *με εναλλαγή δύο γραμμών, τότε* $\delta(A) = \delta(B)$.
118. *Η συνάρτηση* $\delta : M_{n\times n}(\mathbf{F}) \to \mathbf{F}$ *με τύπο* $\delta(A) = 0$ *είναι μια συνάρτηση ορίζουσας.*

119. *Για κάθε $n \geq 2$ υπάρχει μια συνάρτηση ορίζουσας στο $\delta : M_{n\times n}(\mathbf{F}) \to \mathbf{F}$.*
120. *Κάθε συνάρτηση ορίζουσας $\delta : M_{n\times n}(\mathbf{F}) \to \mathbf{F}$ είναι ένας γραμμικός μετασχηματισμός.*

2.17 Ιδιότητες των οριζουσών

121. *Εάν δύο γραμμές ενός πίνακα A είναι ίδιες, τότε* $\det(A) = 0$.
122. *Εάν ο πίνακας B προκύπτει απ΄ τον A με εναλλαγή δύο γραμμών, τότε* $\det(B) = -\det(A)$.
123. *Εάν ο πίνακας B προκύπτει απ΄ τον A με πολλαπλασιασμό μιας γραμμής του A με έναν αριθμό c, τότε* $\det(B) = \det(A)$.
124. *Εάν ο πίνακας B προκύπτει απ΄ τον A προσθέτοντας ένα πολλαπλάσιο της i-γραμμής στην j-γραμμή ($i \neq j$), τότε* $\det(B) = \det(A)$.
125. *Εάν E είναι ένας στοιχειώδης πίνακας, τότε* $\det(E) = \pm 1$.
126. *Εάν $A, B \in M_{n\times n}(\mathbf{F})$, τότε* $\det(AB) = \det(A)\det(B)$.
127. *Ένας πίνακας M είναι αντιστρέψιμος εάν και μόνο εάν* $\det(M) = 0$.
128. *Ένας πίνακας $M \in M_{n\times n}(\mathbf{F})$ έχει τάξη n εάν και μόνο εάν* $\det(M) \neq 0$.
129. *Η ορίζουσα ενός πίνακα είναι δυνατόν να υπολογιστεί με ανάπτυξη ως προς οποιαδήποτε γραμμή ή στήλη.*
130. $\det(A^t) = -\det(A)$.
131. *Η ορίζουσα ενός διαγώνιου πίνακα ισούται με το γινόμενο των στοιχείων της κεντρικής διαγωνίου.*
132. *Κάθε γραμμικό σύστημα n εξισώσεων με n αγνώστους είναι δυνατόν να επιλυθεί με χρήση του κανόνα του Cramer.*
133. *Έστω $AX = B$ ένα γραμμικό σύστημα n εξισώσεων με n αγνώστους, όπου $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^t$. Εάν $\det(A) \neq 0$ και M_k είναι ο πίνακας που προκύπτει απ΄ τον A με αντικατάσταση της k γραμμής του A με B^t, τότε για κάθε k ($1 \leq k \leq n$), ισχύει ότι $x_k = (\det(A))^{-1} \cdot \det(M_k)$.*
134. *Η ορίζουσα ενός άνω τριγωνικού πίνακα ισούται με το γινόμενο των σ-τοιχείων της κεντρικής διαγωνίου*

2.18 Ιδιοτιμές και ιδιοδιανύσματα

135. *Κάθε γραμμικός τελεστής σε έναν δ.χ. διάστασης n έχει n διακεκριμένες ιδιοτιμές.*
136. *Εάν ένας πραγματικός πίνακας έχει ένα ιδιοδιάνυσμα, τότε έχει άπειρο πλήθος ιδιοδιανυσμάτων.*
137. *Υπάρχει τετραγωνικός πίνακας που να μην έχει ιδιοδιανύσματα.*
138. *Οι ιδιοτιμές είναι μη μηδενικοί αριθμοί.*

139. *Δύο οποιαδήποτε ιδιοδιανύσματα είναι γραμμικώς ανεξάρτητα.*
140. *Το άθροισμα δύο ιδιοτιμών ενός γραμμικού τελεστή T είναι επίσης ιδιοτιμή του T.*
141. *Γραμμικοί τελεστές σε χώρους άπειρης διάστασης δεν έχουν ποτέ ιδιοτιμές.*
142. *Ένας $n \times n$ πίνακας A με στοιχεία από το σώμα $\mathbf{F}$ είναι όμοιος με έναν διαγώνιο πίνακα εάν και μόνο εάν ο $\mathbf{F}^n$ έχει μια βάση από ιδιοδιανύσματα του A.*
143. *Όμοιοι πίνακες έχουν τις ίδιες ιδιοτιμές.*
144. *Όμοιοι πίνακες έχουν τα ίδια ιδιοδιανύσματα.*
145. *Το άθροισμα δύο ιδιοδιανυσμάτων ενός τελεστή T είναι πάντα ένα ιδιοδιάνυσμτα του T.*

2.19 Διαγωνιοποίηση

146. *Κάθε γραμμικός τελεστής σε έναν δ.χ. διάστασης n με λιγότερες από n διακεκριμένες ιδιοτιμές, δεν είναι διαγωνιοποιήσιμος*
147. *Τα ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν στην ίδια ιδιοτιμή είναι πάντα γραμμικώς εξαρτημένα.*
148. *Εάν λ είναι μια ιδιοτιμή ενός γραμμικού τελεστή T, τότε κάθε στοιχείο του ιδιόχωρου E_λ είναι ένα ιδιοδιάνυσμα του T.*
149. *Εάν λ_1 και λ_2 είναι διακεκριμένες ιδιοτιμές του τελεστή T, τότε $E_{\lambda_1} \cap E_{\lambda_2} = \{0\}$.*
150. *Έστω $A \in M_{n\times n}(\mathbf{F})$ και $\beta = \{x_1, \ldots, x_n\}$ μια βάση του $\mathbf{F}^n$ από ιδιοδιανύσματα του A. Εάν Q είναι ο $n \times n$ πίνακας του οποίου η i-στήλη είναι το διάνυσμα x_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$, τότε ο πίνακας $Q^{-1}AQ$ είναι διαγώνιος.*
151. *Ένας γραμμικός τελεστής T σε έναν δ.χ. πεπερασμένης διάστασης είναι διαγωνιοποιήσιμος εάν και μόνο εάν η πολλαπλότητα κάθε ιδιοτιμής λ του T ισούται με τη διάσταση του E_λ.*
152. *Κάθε διαγωνιοποιήσιμος γραμμικός τελεστής έχει τουλάχιστον μια ιδιοτιμή.*
153. *Εάν ένας δ.χ. είναι ευθύ άθροισμα υποχώρων $W_1, W_2, \ldots, W_k$, τότε $W_i \cap W_j = \{0\}$ για $i \neq j$.*
154. *Εάν $V = \sum_{i=1}^{k} W_i$ με $W_i \cap W_j = \{0\}$ για $i \neq j$, τότε $V = W_1 \oplus W_2 \oplus \cdots \oplus W_k$.*

2.20 Αναλλοίωτοι υπόχωροι και το θεώρημα των Cayley-Hamilton

155. *Υπάρχει γραμμικός τελεστής T που να μην έχει κανέναν T-αναλλοίωτο υπόχωρο.*

156. *Εάν T είναι ένας γραμμικός τελεστής στον δ.χ. V και W είναι ένας T-αναλλοίωτος υπόχωρος του V, τότε το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του $T_W = T|_W$ διαιρεί το χαρακτηριστιμό πολυώνυμο του T.*

157. *Έστω T ένας γραμμικός τελεστής στον δ.χ. V και έστω x και y στοιχεία του V. Εάν W και W' είναι οι T-κυκλικοί υπόχωροι που παράγονται από τα x και y αντίστοιχα και επιπλέον $W = W'$, τότε $x = y$.*

158. *Εάν T είναι ένας γραμμικός τελεστής στον δ.χ. V, τότε για κάθε $x \in V$ ο T-κυκλικός υπόχωρος που παράγεται από το x ισούται με τον T-κυκλικό υπόχωρο που παράγεται από το $T(x)$.*

159. *Έστω T ένας γραμμικός τελεστής σε έναν δ.χ. διάστασης n. Τότε υπάρχει πολυώνυμο $g(t)$ βαθμού n τέτοιο ώστε $g(T) = T_0$.*

160. *Κάθε πολυώνυμο της μορφής $(-1)^n(a_0 + a_1 t + \cdots + a_{n-1}t^{n-1} + t^n)$ είναι το χαρακτηριστικό πολυώνυμο κάποιου γραμμικού τελεστή.*

161. *Εάν T είναι ένας γραμμικός τελεστής σε έναν δ.χ. V και εάν ο V γράφεται ως ευθύ άθροισμα από k T-αναλλοίωτους υποχώρους, τότε υπάρχει βάση β του V έτσι ώστε ο πίνακας $[T]_\beta$ να είναι ευθύ άθροισμα από k πίνακες.*

2.21 Χώροι με εσωτερικό γινόμενο

Έστω V δ.χ. επί του σώματος $\mathbf{F}$.

162. *Ένα εσωτερικό γινόμενο είναι μια συνάρτηση επί του συνόλου των διατεταγμένων ζευγών στοιχείων του V με τιμές στο $\mathbf{F}$.*

163. *Ένα εωτερικό γινόμενο ορίζεται είτε επί του σώματος των πραγματικών είτε επί του σώματος των μιγαδικών αριθμών.*

164. *Ένα εσωτερικό γινόμενο είναι γραμμική συνάρτηση και ως προς τις δύο μεταβλητές.*

165. *Στον δ.χ. $\mathbf{R}^n$ ορίζεται ένα και μοναδικό εσωτερικό γινόμενο.*

166. *Η τριγωνική ανισότητα ισχύει μόνο για χώρους πεπερασμένης διάστασης.*

167. *Ο συζυγοανάστροφος ορίζεται μόνο για τετραγωνικούς πίνακες.*

168. *Εάν σε έναν χώρο με εσωτερικό γινόμενο $(V, \langle\ ,\ \rangle)$ ισχύει ότι $\langle x, y\rangle = 0$ για κάθε $x \in V$, τότε $y = 0$.*

2.22 Η διαδικασία ορθοκανονικοποίησης Gram-Schmidt

169. *Η διαδικασία ορθοκανονικοποίησης Gram-Schmidt μας επιτρέπει να κατασκευάσουμε μια ορθοκανονική βάση από ένα οποιοδήποτε σύνολο διανυσμάτων ενός διανυσματικού χώρου.*

170. *Κάθε διανυσματικός χώρος πεπερασμένης διάστασης με εσωτερικό γινόμενο, περιέχει μια ορθοκανονική βάση.*
171. *Το ορθογώνιο συμπλήρωμα ενός υποσυνόλου ενός διανυσματικού χώρου είναι υπόχωρος.*
172. *Εάν $\beta = \{x_1, \ldots, x_n\}$ είναι μια βάση του διανυσματικού χώρου V, τότε για κάθε $x \in V$ οι αριθμοί $\langle x, x_i \rangle$ $(i = 1, \ldots, n)$ είναι οι συντελεστές Fourier του x.*
173. *Μια ορθοκανονική βάση πρέπει να είναι μια διατεταγμένη βάση.*
174. *Κάθε ορθογώνιο σύνολο είναι γραμμμικώς ανεξάρτητο.*
175. *Κάθε ορθοκανονικό σύνολο είναι γραμμικώς ανεξάρτητο.*

2.23 Ο συζυγής ενός γραμμικού τελεστή

Υποθέτουμε ότι οι παρακάτω χώροι με εσωτερικό γινόμενο είναι πεπερασμένης διάστασης.
176. *Κάθε γραμμικός τελεστής έχει έναν συζυγή.*
177. *Κάθε γραμμικός τελεστής σε έναν διανυσματικό χώρο V έχει τη μορφή $x \mapsto \langle x, y \rangle$, για κάποιο $y \in V$.*
178. *Για κάθε γραμμικό τελεστή $T \in \mathcal{L}(V)$ και για κάθε βάση β του V ισχύει ότι $[T^*]_\beta = ([T]_\beta)^*$.*
179. *Ο συζυγής ενός γραμμικού τελεστή είναι πάντα μοναδικός.*
180. *Αν T, U είναι γραμμικοί τελεστές και $a, b \in \mathbf{F}$, τότε ισχύει η σχέση $(aT + bU)^* = aT^* + bU^*$.*
181. *Για κάθε $n \times n$ πίνακα A ισχύει ότι $(L_A)^* = L_{A^*}$.*
182. *Για κάθε γραμμικό τελεστή T ισχύει ότι $(T^*)^* = T$.*

2.24 Κανονικοί και αυτοσυζυγείς τελεστές

Υποθέτουμε ότι οι παρακάτω χώροι με εσωτερικό γινόμενο είναι πεπερασμένης διάστασης.
183. *Κάθε αυτοσυζυγής τελεστής είναι κανονικός.*
184. *Κάθε τελεστής και ο αντίστοιχος συζυγής του έχουν τα ίδια ιδιοδιανύσματα.*
185. *Εάν $T \in \mathcal{L}(V)$, τότε ο T είναι κανονικός εάν και μόνο εάν ο πίνακας $[T]_\beta$ είναι κανονικός, όπου β μια οποιαδήποτε διατεταγμένη βάση του V.*
186. *Ένας πίνακας A είναι κανονικός εάν και μόνο εάν ο τελεστής L_A είναι κανονικός.*
187. *Οι ιδιοτιμές ενός αυτοσυζυγούς τελεστή είναι πάντα πραγματικές.*
188. *Ο ταυτοτικός και ο μηδενικός τελεστής είναι αυτοσυζυγείς.*
189. *Κάθε κανονικός τελεστής είναι διαγωνιοποιήσιμος.*

190. *Κάθε αυτοσυζυγής τελεστής είναι διαγωνιοποιήσιμος.*

2.25 Μοναδιαίοι και ορθογώνιοι τελεστές - αντίστοιχοι πίνακες

Υποθέτουμε ότι οι παρακάτω χώροι με εσωτερικό γινόμενο είναι πεπερασμένης διάστασης.

191. *Κάθε μοναδαίος τελεστής είναι κανονικός.*

192. *Κάθε ορθογώνιος τελεστής είναι διαγωνιοποιήσιμος.*

193. *Ένας πίνακας είναι μοναδιαίος εάν και μόνο εάν είναι αντιστρέψιμος.*

194. *Εάν δύο πίνακες είναι μοναδιαία όμοιοι, τότε είναι όμοιοι.*

195. *Το άθροισμα δύο μοναδιαίων πινάκων είναι μοναδιαίος πίνακας.*

196. *Ο συζυγής ενός μοναδιαίου πίνακα είναι μοναδιαίος πίνακας.*

197. *Εάν $T \in \mathcal{L}(V)$ είναι ένας ορθογώνιος τελεστής, τότε για κάθε διατεταγμένη βάση β του V ο πίνακας $[T]_\beta$ είναι ορθογώνιος.*

198. *Εάν όλες οι ιδιοτιμές ενός τελεστή είναι 1, τότε ο τελεστής είναι είτε μοναδιαίος είτε ορθογώνιος.*

199. *Ένας τελεστής διατηρεί τη νόρμα (στάθμη) αλλά όχι το εσωτερικό γινόμενο.*

2.26 Ορθογώνιες προβολές και το φασματικό θεώρημα

Υποθέτουμε ότι οι παρακάτω διανυσματικοί χώροι με εσωτερικό γινόμενο είναι πεπερασμένης διάστασης.

200. *Όλες οι προβολές είναι αυτοσυζυγείς τελεστές.*

201. *Μια ορθογώνια προβολή καθορίζεται πλήρως από το πεδίο τιμών της.*

202. *Κάθε αυτοσυζυγής τελεστής εκφράζεται ως γραμμικός συνδυασμός ορθογώνιων τελεστών.*

203. *Εάν ένας τελεστής έχει μια φασματική ανάλυση, τότε το ίδιο ισχύει και για τον συζυγή του.*

204. *Εάν T είναι μια προβολή στον υπόχωρο W, τότε το διάνυσμα $T(x)$ του W είναι το πλησιέστερο διάνυσμα στο x.*

205. *Κάθε ορθογώνια προβολή είναι μοναδιαίος τελεστής.*

2.27 Διγραμμικές και τετραγωνικές μορφές

206. *Κάθε τετραγωνική μορφή είναι και διγραμμική μορφή.*

207. *Εάν δύο πίνακες είναι ισότιμοι, τότε έχουν τις ίδιες ιδιοτιμές.*

208. *Οι πίνακες που αντιστοιχούν σε συμμετρικές διγραμμικές μορφές είναι συμμετρικοί πίνακες.*

209. *Κάθε συμμετρικός πίνακας είναι ισότιμος με έναν διαγώνιο πίνακα.*

210. *Το άθροισμα δύο συμμετρικών διγραμμικών μορφών είναι μια συμμετρική διγραμμική μορφή.*

211. *Δύο συμμετρικοί πίνακες οι οποίοι έχουν το ίδιο χαρακτηριστικό πολυώνυμο, είναι πίνακες της ίδιας διγραμμικής μορφής.*

212. *Υπάρχει διγραμμική μορφή H τέτοια ώστε $H(x, y) \neq 0$ για κάθε x και y.*

213. *Εάν η διάσταση ενός διανυσματικού χώρου V είναι n, τότε η διάσταση του διανυσματικού χώρου όλων των διγραμμικών μορφών επί του V είναι $2n$.*

214. *Έστω H μια διγραμμική μορφή επί του διανσυματικού χώρου V, ο οποίος είναι πεπερασμένης διάστασης. Τότε για κάθε $x \in V$, υπάρχει ένα $y \in V$ τέτοιο, ώστε $y \neq 0$ και $H(x, y) = 0$.*

215. *Εάν H είναι μια διγραμμική μορφή επί ενός πραγματικού διανυσματικού χώρου V πεπερασμένης διάστασης με εσωτερικό γινόμενο, τότε υπάρχει μια βάση β του V τέτοια ώστε ο πίνακας της H ως προς την β να είναι διαγώνιος.*

2.28 Γενικευμένα ιδιοδιανύσματα

216. *Τα ιδιοδιανύσματα ενός γραμμικού τελεστή T είναι ταυτόχρονα και γενικευμένα ιδιοδιανύσματα του T.*

217. *Υπάρχει γενικευμένο ιδιοδιάνυσμα x ενός γραμμικού τελεστή T (δηλαδή $(T - \lambda \mathrm{Id})^p(x) = 0$ για κάποιον αριθμό λ και p θετικό ακέραιο), αλλά το λ να μην είναι ιδιοτιμή του T.*

218. *Κάθε γραμμικός τελεστής επί ενός διανυσματικού χώρου πεπερασμένης διάστασης έχει μια κανονική μορφή Jordan.*

219. *Ένας κύκλος από γενικευμένα ιδιοδιανύσματα είναι διανύσματα γραμμικώς ανεξάρτητα.*

220. *Σε κάθε ιδιοτιμή ενός γραμμικού τελεστή επί ενός διανυσματικού χώρου πεπερασμένης διάστασης, αντιστοιχεί ακριβώς ένας κύκλος από γενικευμένα ιδιοδιανύσματα.*

221. *Έστω T ένας γραμμικός τελεστής επί ενός διανυσματικού χώρου V πεπερασμένης διάστασης του οποίου το χαρακτηριστικό πολυώνυμο εκφράζεται ως γινόμενο πρωτοβαθμίων παραγόντων και έστω $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ οι διακεκριμένες ιδιοτιμές του T. Εάν β_i είναι μια βάση του γενικευμένου ιδιόχωρου K_{λ_i} ($i = 1, \ldots, k$), τότε το σύνολο $\beta_1 \cup \beta_2 \cup \cdots \cup \beta_k$ είναι μια κανονική βάση Jordan του τελεστή T.*

222. *Για κάθε στοιχειώδη πίνακα Jordan J, ο τελεστής L_J έχει κανονική μορφή Jordan J.*

223. *Έστω T ένας γραμμικός τελεστής επί ενός διανυσματικού χώρου διάστασης n, του οποίου το χαρακτηριστικό πολυώνυμο είναι γινόμενο πρωτοβαθμίων παραγόντων. Τότε για κάθε ιδιοτιμή λ του T ισχύει ότι $K_\lambda = \mathrm{Ker}((T - \lambda \mathrm{Id})^n)$.*

2.29 Η κανονική μορφή Jordan

224. *Η κανονική μορφή Jordan ενός διαγώνιου πίνακα είναι ο ίδιος ο πίνακας.*
225. *Έστω $T \in \mathcal{L}(V)$ επί ενός διανυσματικού χώρου πεπερασμένης διάστασης, με κανονική μορφή Jordan J. Εάν β είναι μια βάση του V, τότε η κανονική μορφή Jordan του πίνακα $[T]_\beta$ είναι ο πίνακας J.*
226. *Γραμμικοί τελεστές με τα ίδια χαρακτηριστικά πολυώνυμα είναι όμοιοι.*
227. *Πίνακες με την ίδια κανονική μορφή Jordan είναι όμοιοι.*
228. *Κάθε πίνακας είναι όμοιος με την κανονική του μορφή Jordan.*
229. *Έστω T ένας γραμμικός τελεστής επί ενός διανυσματικού χώρου πεπερασμένης διάστασης με χαρακτηριστικό πολυώνυμο $(-1)^n(t-\lambda)^n$. Αν λάβουμε υπόψη ότι οι στοιχειώδεις πίνακες Jordan διατάσσονται κατά φθίνον μέγεθος, τότε ο τελεστής T έχει μοναδική κανονική μορφή Jordan.*
230. *Εάν ένας τελεστής έχει μια κανονική μορφή Jordan, τότε υπάρχει μοναδική κανονική βάση Jordan για τον τελεστή αυτό.*
231. *Εάν ένας γραμμικός τελεστής έχει μια κανονική μορφή Jordan, τότε το χαρακτηριστικό του διάγραμμα (αποτελούμενο από κατακόρυφες τελείες) είναι μοναδικό.*

2.30 Το ελάχιστο πολυώνυμο

Υποθέτουμε ότι οι παρακάτω διανυσματικοί χώροι είναι πεπερασμένης διάστασης.
232. *Για κάθε γραμμικό τελεστή T υπάρχει ένα πολυώνυμο $p(t)$ μέγιστου βαθμού για το οποίο ισχύει $p(T) = T_0$.*
233. *Κάθε γραμμικός τελεστής έχει ένα μοναδικό ελάχιστο πολυώνυμο.*
234. *Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο ενός γραμμικού τελεστή διαιρεί το ελάχιστο πολυωνυμό του.*
235. *Το ελάχιστο και το χαρακτηριστικό πολυώνυμο ενός διαγωνιοποιήσιμου τελεστή είναι ίδια.*
236. *Έστω $T \in \mathcal{L}(V)$ με $\dim(V) = n$, $p(t)$ το ελάχιστο πολυώνυμο του T και $f(t)$ το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του T. Εάν το πολυώνυμο $f(t)$ γράφεται ως γινόμενο πρωτοβαθμίων παραγόντων, τότε το $f(t)$ διαιρεί το πολυώνυμο $[p(t)]^n$.*
237. *Το ελάχιστο και το χαρακτηριστικό πολυώνυμο ενός γραμμικού τελεστή έχουν πάντα τον ίδιο βαθμό.*

238. *Εάν το ελάχιστο πολυώνυμο ενός γραμμικού τελεστή γράφεται ως γινόμενο πρωτοβαθμίων παραγόντων, τότε ο τελεστής είναι διαγωνιοποιήσιμος.*
239. *Έστω $T \in \mathcal{L}(V)$. Εάν ο V είναι ένας T-κυκλικός υπόχωρος του εαυτού του, τότε ο βαθμός του ελάχιστου πολυωνύμου του T ισούται με τη διάσταση του χώρου V.*

2.31 Η ρητή κανονική μορφή

240. *Κάθε ρητή κανονική βάση ενός γραμμικού τελεστή T είναι ένωση από T-κυκλικές βάσεις.*
241. *Εάν μια βάση β είναι ένωση T-κυκλικών βάσεων ενός γραμμικού τελεστή T, τότε η β είναι μια ρητή κανονική βάση του T.*
242. *Υπάρχουν τετραγωνικοί πίνακες, οι οποίοι να μην έχουν ρητή κανονική μορφή.*
243. *Κάθε τετραγωνικός πίνακας είναι όμοιος με την κανονική ρητή μορφή του.*
244. *Η κανονική μορφή Jordan και η ρητή κανονική μορφή ενός γραμμικού τελεστή ταυτίζονται.*
245. *Αν T είναι ένας γραμμικός τελεστής επί ενός χώρου πεπερασμένης διάστασης, τότε κάθε ανάγωγος παράγοντας του χαρακτηριστικού πολυωνύμου του T διαιρεί το ελάχιστο πολυώνυμο του T.*
246. *Έστω $\phi(t)$ ένας ανάγωγος διαιρέτης με συντελεστή μεγιστοβαθμίου όρου μονάδα, του χαρακτηριστικού πολυωνύμου ενός γραμμικού τελεστή T. Τότε υπάρχει μια $1-1$ αντιστοιχία μεταξύ των τελειών στο διάγραμμα υπολογισμού της ρητής κανονικής μορφής του τελεστή T_{K_ϕ} και των διανυσμάτων μιας βάσης του υποχώρου K_ϕ.*

2.32 Ο δυϊκός χώρος

Υποθέτουμε ότι οι παρακάτω διανυσματικοί χώροι είναι πεπερασμένης διάστασης.
247. *Κάθε γραμμικός μετασχηματισμός είναι ένα γραμμικό συναρτησοειδές.*
248. *Κάθε γραμμικό συναρτησοειδές που ορίζεται σε ένα σώμα είναι δυνατόν να παρασταθεί από έναν 1×1 πίνακα.*
249. *Κάθε διανυσματικός χώρος είναι ισόμορφος με τον δυϊκό του.*
250. *Κάθε διανυσματικός χώρος είναι ο δυϊκός κάποιου διανυσματικού χώρου.*
251. *Εάν $T : V \to V^*$ είναι ένας ισομορφισμός και β μια πεπερασμένη διατεταγμένη βάση του V, τότε $T(\beta) = \beta^*$*
252. *Εάν $T : V \to W$ είναι ένας γραμμικός μετασχηματισμός, τότε το πεδίο ορισμού του τελεστή $(T^t)^t$ είναι ο V^{**}.*

253. *Εάν οι διανυσματικοί χώροι* V, W *είναι ισόμορφοι, τότε και οι διανυσματικοί χώροι* V^*, W^* *είναι ισόμορφοι.*
254. *Η παράγωγος μιας συνάρτησης είναι δυνατόν να θεωρηθεί ως ένα γραμμικό συναρτησοειδές στον διανυσματικό χώρο όλων των διαφορίσιμων συναρτήσεων*

Κεφάλαιο 3

Απαντήσεις

2.1
1. Α
2. Ψ Αποδεικνύεται ότι το μηδενικό διάνυσμα είναι μοναδικό.
3. Ψ Έστω $V = \mathbf{R}$ επί του $\mathbf{F} = \mathbf{R}$ με τις συνήθεις πράξεις. Τότε για $x = 0_V$ ισχύει $1 \cdot 0_V = 2 \cdot 0_V = 0_V$, αλλά $1 \neq 2$.
4. Ψ Έστω $V = \mathbf{R}$ επί του $\mathbf{F} = \mathbf{R}$ με τις συνήθεις πράξεις. Τότε για $a = 0 \in \mathbf{F}$ ισχύει $0 \cdot 1 = 0 \cdot 2 = 0_V$, αλλά $1 \neq 2$.
5. Α
6. Ψ Από τον ορισμό ένας $m \times n$ πίνακας έχει m γραμμές και n στήλες.
7. Ψ Η πρόσθεση ορίζεται για πολυώνυμα οποιουδήποτε βαθμού, θέτοντας ενδεχομένως μηδέν τους συντελεστές του πολυωνύμου με τον μικρότερο βαθμό.
8. Ψ Τα πολυώνυμα $f(x) = x^2 + x + 1$, $g(x) = -x^2 + 2x + 4$ έχουν βαθμό 2, αλλά το $(f + g)(x) = 3x + 5$ έχει βαθμό 1.
9. Α
10. Α
11. Α

2.2

12. Ψ Έστω ο διανυσματικός χώρος $V = \mathbf{R}^2$ με τις συνήθεις πράξεις επί του $\mathbf{R}$. Για $a \in \mathbf{R}$ έστω $W = \{(a, x) \in V : x \in \mathbf{R}\} \subset V$. Ορίζουμε πράξεις $\oplus, \odot$ στο σύνολο W ως εξής: $(a, x) \oplus (a, y) = (a, x + y)$ και $\lambda \odot (a, x) = (a, \lambda x)$, $\lambda \in \mathbf{R}$. Τότε το σύνολο W με τις πράξεις αυτές είναι πραγματικός διανυσματικός χώρος, αλλά δεν είναι υπόχωρος του V επειδή οι πράξεις $\oplus, \odot$ δεν είναι περιορισμοί των πράξεων του V.
13. Ψ Το κενό σύνολο δεν περιέχει κανένα στοιχείο, άρα ούτε το μηδενικό στοιχείο ενός δ.χ., συνεπώς δεν είναι υπόχωρος.
14. Α

15. Ψ Έστω $V = \mathbf{R}^2$, S_1 ο άξονας x και S_2 η ευθεία $x = 2$. Τότε $S_1, S_2 \subset V$, $S_1 \cap S_2 = \{(2,0)\}$ που δεν είναι υπόχωρος του V επειδή δεν περιέχει το $\{(0,0)\}$.
16. Α
17. Ψ Από τον ορισμό το ίχνος ενός πίνακα ισούται με το άθροισμα των στοιχείων της διαγωνίου του.
18. Α
19. Ψ Ορίζουμε ο χώρος που παράγεται από το κενό σύνολο να είναι ο μηδενικός υπόχωρος, δηλ. $\mathrm{span}(\emptyset) = \{0\}$.
20. Α
21. Ψ Έστω $V = \mathbf{R}^3$, $S = \{v_1 = (1,2,3), v_2 = (2,4,6), v_3 = (0,0,5)\}$. Τότε το S είναι γραμμικώς εξαρτημένο, επειδή για τα v_1, v_2 είναι $v_2 = 2v_1$, αλλά το v_3 δεν μπορεί να γραφτεί ως γραμμικός συνδυασμός των v_1, v_2.

Θυμίζουμε στο σημείο αυτό τους ορισμούς. Ένα υποσύνολο S ενός δ.χ. ονομάζεται *γραμμικώς εξαρτημένο* εάν υπάρχουν πεπερασμένα το πλήθος στοιχεία $x_1, \ldots, x_n$ του S και αριθμοί $a_1, \ldots, a_n \in \mathbf{F}$ όχι όλοι μηδέν, ώστε $a_1x_1 + \cdots + a_nx_n = 0$. Ένα υποσύνολο S ενός δ.χ. ονομάζεται *γραμμικώς ανεξάρτητο* εάν δεν είναι γραμμικώς εξαρτημένο.
22. Α
23. Ψ Το κενό σύνολο είναι γραμμικώς ανεξάρτητο, επειδή από τον ορισμό τα γραμμικώς ανεξάρτητα σύνολα είναι μη κενά (βλ. σχόλιο στην απάντηση 21).
24. Ψ Βλέπε αντιπαράδειγμα της ερώτησης 21. Το σύνολο S είναι γραμμικώς εξαρτημένο, αλλά το υποσύνολό του $\{v_1, v_3\}$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητο.
25. Α
26. Α
27. Ψ Ο μηδενικός υπόχωρος έχει ως βάση το κενό σύνολο. Πράγματι, $\mathrm{span}(\emptyset) = \{0\}$ και το $\emptyset$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητο (βλ. και απάντηση 19).
28. Α
29. Ψ Ο δ.χ. $P(\mathbf{F})$ περιέχει τηνάπειρη βάση $\{1, x, x^2, \ldots\}$.
30. Ψ Τα σύνολα $\{(1,0),(0,1)\}$ και $\{(1,2),(3,4)\}$ είναι δύο βάσεις του δ.χ. $\mathbf{R}^2$.
31. Α
32. Ψ Η διάσταση του δ.χ. $P_n(\mathbf{F})$ είναι $n+1$, επειδή μια βάση του $\{1, x, x^2, \ldots, x^n\}$ έχει $n+1$ στοιχεία.
33. Ψ Η διάσταση του δ.χ. $M_{m\times n}(\mathbf{F})$ είναι mn, επειδή μια βάση του $\{E_{ij} : 1 \leq i, j \leq n\}$ αποτελείται από mn στοιχεία. Εδώ E_{ij} είναι ο $m \times n$ πίνακας με όλα τα στοιχεία μηδέν, εκτός από το (i,j)-στοιχείο που είναι μονάδα.
34. Α
35. Ψ Έστω $V = \mathbf{R}^2$ και $S = \{v_1 = (1,0), v_2 = (2,0), v_3 = (0,1)\}$. Τότε $V = \mathrm{span}(S)$, αλλά για το διάνυσμα $v = (3,4) \in V$ είναι $v = v_1 + v_2 + 4v_3 = 2v_1 + \frac{1}{2}v_2 + 4v_3$.
36. Α

37. A
38. A
39. Ψ Για την απεικόνιση $T : \mathbf{C}^2 \to \mathbf{C}$ με $T(z_1, z_2) = z_1 + \bar{z}_2$ ισχύει η δοθείσα σχέση, αλλά για $(z_1, z_2) = (0, 1)$ και $c = i$ είναι $T(i(0, 1)) = T(0, i) = -i \neq i = iT(0, 1)$.
40. Ψ Η γραμμικότητα της T είναι απαραίτητη, π.χ. η $T : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ με $T(x) = x^2$ δεν είναι $1-1$, αλλά $\mathrm{Ker}(T) = \{0\}$.
41. A
42. Ψ Η ορθή διατύπωση του θεωρήματος διάστασης είναι ότι για $T \in \mathcal{L}\,(V, W)$ ισχύει $\dim V = \dim \mathrm{Ker}T + \dim \mathrm{Im}T$. Για ένα αντιπαράδειγμα, μια σκέψη είναι να κατασκευάσω μια γραμμική απεικόνιση που να είναι $1-1$, αλλά όχι επί. Έστω $T : P_2(\mathbf{R}) \to P_3(\mathbf{R})$ με $T(f(x)) = xf(x) + f'(x)$. Τότε $\mathrm{Ker}T = \{0\}$ (εύκολο) και $\mathrm{Im}T = \mathrm{span}(\{T(1), T(x), T(x^2)\}) = \mathrm{span}(\{x, x^2 + 1, x^3 + 2x\})$, άρα $\dim \mathrm{Im}T = 3 \neq 4 = \dim(P_3(\mathbf{R}))$.
43. Ψ Η γραμμική απεικόνιση $T : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ με τύπο $T(x, y) = (x + 2y, 0)$ απεικονίζει τα γραμμικώς ανεξάρτητα διανύσμτα $(1, 0)$ και $(0, 1)$ στα γραμμικώς εξαρτημένα διανύσματα $(1, 0)$ και $(2, 0)$ αντίστοιχα.
44. A
45. Ψ Έστω $V = \mathbf{R}^3, W = \mathbf{R}^2$, και $x_1 = (1, 0, 3), x_2 = (-2, 0, -6)$, $y_1 = (1, 1), y_2 = (2, 1)$. Τότε δεν υπάρχει γραμμική απεικόνιση $T : V \to W$ που να ικανοποιεί τη δοθείσα συνθήκη. Πράγματι, αν υπήρχε θα είχαμε $(2, 1) = T(x_2) = -2T(x_1) = (-2, -2)$, άτοπο.
46. A
47. A
48. Ψ Από τον τρόπο που έχει οριστεί ο πίνακας $[T]_\beta^\gamma$ μιας γραμμικής απεικόνισης $T : V \to W$, αυτός είναι ένας $n \times m$ πίνακας. Κατά συνήθη σύμβαση, παίρνουμε τον ανάστροφο του πίνακα των συντελεστών όταν οι εικόνες $T(\beta)$ εκφραζονται ως γραμμικοί συνδυασμοί των στοιχείων της βάσης γ. Κάποιοι συγγραφείς δεν παίρνουν τον ανάστροφο. Η εξήγηση αυτής της σύμβασης βρίσκεται στο γενονός ότι για έναν $n \times m$ πίνακα A και διάνυσμα-στήλη x, η αντίστοιχη γραμμική απεικόνιση είναι η $L_A : \mathbf{R}^m \to \mathbf{R}^n$ $L_A(x) = Ax$ (αριστερή μεταφορά). Διαφορετικά, απλώς θα ήταν η δεξιά μεταφορά $R_A(x) = xA$.
49. A
50. A
51. Ψ Με $\mathcal{L}(V, W)$ συμβολίζουμε το σύνολο όλων των γραμμικών απεικονίσεων από τον δ.χ. χώρο V στον δ.χ. W, ενώ με $\mathcal{L}(W, V)$ το σύνολο όλων των γραμμικών απεικονίσεων από τον W στον V.
52. Ψ Το γινόμενο των πινάκων $[T]_\alpha^\beta[U]_\beta^\gamma$ ενδεχομένως να μην ορίζεται. Πάρτε για παράδειγμα οποιεσδήποτε γραμμικές απεικονίσεις $T : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ και $U : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ και θεωρήστε τους πίνακές τους ως προς τις κανονικές βάσεις. Τότε

ο $[T]_\alpha^\beta$ είναι πίνακας 2×2, ο $[U]_\beta^\gamma$ είναι πίνακας 1×2, άρα το γινόμενο $[T]_\alpha^\beta [U]_\beta^\gamma$ δεν ορίζεται.

53. Α

54. Ψ Η σχέση δεν είναι γραμμένη σωστά και δεν έχει νόημα. Ένας λόγος είναι ότι $U(y) \in Z$, ενώ η β είναι μια βάση του W. Μια σωστή γραφή θα ήταν $[U(y)]_\gamma = [U]_\beta^\gamma [y]_\beta$.

55. Α

56. Ψ Έστω $T : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ με $T(x, y) = (x, x)$. Τότε $T^2(x, y) = T(T(x, y)) = T(x, x) = (x, x)$ και ως προς την κανονική βάση β του $\mathbf{R}^2$ είναι $[T]_\beta = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $[T^2]_\beta = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, αλλά $([T]_\beta)^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq [T^2]_\beta$.

57. Ψ Για παράδειγμα ο $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

58. Ψ Η σχέση δεν έχει νόημα, δεδομένου ότι η T ορίζεται στον δ.χ. V, ενώ $L_A : \mathbf{F}^n \to \mathbf{F}^m$. Αυτό που ισχύει είναι ότι αν $T : \mathbf{F}^n \to \mathbf{F}^m$ είναι γραμμική, τότε υπάρχει μοναδικός $m \times n$ πίνακας A τέτοιος ώστε $T = L_A$. Μάλιστα είναι $A = [T]_\beta^\gamma$, όπου β, γ οι κανονικές βάσεις των $\mathbf{F}^n$ και $\mathbf{F}^m$ αντίστοιχα.

59.Ψ Αρκεί $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$.

60. Α

61. Α

62. Ψ Η σχέση δεν έχει νόημα. Η σωστή σχέση είναι $([T]_\alpha^\beta)^{-1} = [T^{-1}]_\beta^\alpha$, υπό την προϋπόθεση ότι η απεικόνιση T αντιστρέφεται.

63. Α

64. Ψ Όμοια με την απάντηση 58.

65. Ψ Ο δ.χ. $M_{2\times 3}(\mathbf{F})$ έχει διάσταση 6 ενώ ο $\mathbf{F}^5$ έχει διάσταση 5, άρα δεν είναι ισόμορφοι. Ένα από τα κεντρικά θεωρήματα της γραμμικής άλγεβρας αναφέρει ότι δύο διανυσματικοί χώροι είναι ισόμορφοι εάν και μόνο εάν έχουν την ίδια διάσταση.

66. Α

67. Ψ Έστω $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ και $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Τότε $AB = I_2$, αλλά ούτε ο A ούτε ο B έχουν αντίστροφο.

68. Α

69. Α

70. Α

71. Ψ Ο πίνακας αλλαγής βάσης από την β' στην β, ορίζεται ως $Q = [\mathrm{Id}_V]_{\beta'}^\beta = (q_{ij})$. Συνεπώς, $x_j' = \sum_{i=1}^n q_{ij} x_i$ οπότε η j-στήλη του Q είναι η $[x_j']_\beta$.

72. Α
73. Α
74. Ψ Δύο πίνακες $A, B \in M_{n\times n}(\mathbf{F})$ ονομάζονται όμοιοι εάν $B = Q^{-1}AQ$ για κάποιον αντιστρέψιμο πίνακα $Q \in M_{n\times n}(\mathbf{F})$.
75. Α
76. Α
77. Ψ Ένας στοιχειώδης πίνακας είναι ο πίνακας που έχει προκύψει από τον ταυτοτικό πίνακα με μια στοιχειώδη πράξη. Για παράδειγμα, ο πίνακας $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ είναι στοιχειώδης, επειδή προκύπτει από τον I_3 με πολλαπλασιασμό της τρίτης γραμμής με -2 και πρόσθεση στην πρώτη γραμμή.
78. Α
79. Ψ Οι πίνακες $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ και $\begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ είναι στοιχειώδεις, αλλά το γινόμενό τους είναι ο πίνακας $\begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, που δεν είναι στοιχειώδης.
80. Α
81. Ψ Οι στοιχειώδεις πίνακες της απάντησης 79 έχουν άθροισμα $\begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, που δεν είναι στοιχειώδης πίνακας.
82. Α
83. Ψ Έστω $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Εναλλάσσοντας τις δύο πρώτες γραμμές του A προκύπτει ο πίνακας $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Αλλά ο πίνακας B δεν είναι δυνατόν να προκύψει από τον A με οποιαδήποτε στοιχειώδη πράξη στις στήλες του.
84. Α
85. Ψ Ο πίνακας $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ έχει δύο μη μηδενικές στήλες, αλλά η τάξη του είναι 1. Θυμίζουμε ότι η τάξη ενός πίνακα ορίζεται ως με το μέγιστο πλήθος των γραμμικώς ανεξάρτητων γραμμών (ή στηλών) του.
86. Ψ Οι πίνακες $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ και $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ έχουν τάξη 2, αλλά το γινόμενό τους $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ έχει τάξη 1.
87. Α

88. Α
89. Ψ Αποδεικνύεται ότι οι στοιχειώδεις πράξεις στις στήλες ενός πίνακα διατηρούν την τάξη.
90. Α
91. Α
92. Α
93. Α
94. Ψ Το γραμμικό σύστημα $x - y = 0,\ x - y = 4$ δεν έχει λύση.
95. Ψ Το γραμμικό σύστημα $x - y = 1,\ 2x - 2y = 2$ έχει άπειρες λύσεις.
96. Α
97. Ψ Όπως στην απάντηση 95.
98. Ψ Όπως στην απάντηση 94.
99. Ψ Όπως στην απάντηση 94. Το αντίστοιχο ομογενές έχει τη μηδενική λύση, αλλά το σύστημα δεν έχει λύση.
100. Α
101. Ψ Το σύνολο των λύσεων ενός γραμμικού συστήματος γενικά δεν έχει δομή διανυσματικού χώρου. Για παράδειγμα, το σύνολο των λύσεων του συστήματος $x_1 + 2x_2 + x_3 = 7,\ x_1 - x_2 - x_3 = 4$ είναι το υποσύνολο $\Sigma = \{(1,1,4) + t(1,-2,3) : t \in \mathbf{R}\}$ του $\mathbf{R}^3$, το οποίο δεν είναι υπόχωρος του $\mathbf{R}^3$ (επειδή π.χ. δεν περιέχει το $(0,0,0)$). Το σύνολο Σ είναι ένα *σύμπλοκο* του $\mathbf{R}^3$. Αυτό το οποίο είναι αληθές είναι ότι, το σύνολο των λύσεων ενός *ομογενούς* γραμμικού συστήματος m εξισώσεων με n αγνώστους είναι υπόχωρος του $\mathbf{F}^n$.
102. Ψ Οι στοιχειώδεις πράξεις πρέπει να γίνουν στις γραμμές και όχι στις στήλες. Έστω για παράδειγμα, το σύστημα $x + y = 3,\ 2x - y = 4$ του οποίου η λύση είναι $(x, y) = (7/3, 2/3)$. Θεωρούμε τον επαυξημένο πίνακα του συστήματος $\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 4 \end{array}\right)$. Πολλαπλασιάζουμε την πρώτη στήλη του με -1 και την προσθέτουμε στη δεύτερη, οπότε προκύπτει ο πίνακας $\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 3 \\ 2 & -3 & 4 \end{array}\right)$. Αυτός όμως αντιστοιχεί στο σύστημα $x = 3,\ 2x - 3y = 4$, του οποίου η λύση διαφέρει από αυτή του αρχικού συστήματος.
103. Α
104. Α
105. Α
106. Ψ Ο πίνακας $\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$ βρίσκεται σε κλιμακωτή μορφή, αλλά το αντίστοιχο σύστημα $x + y = 0,\ 0x + 0y = 1$ δεν έχει λύση.
107. Α
108. Α
109. Α
110. Ψ Είναι $\det(I) = 1$

111. A
112. Ψ Για τα διανύσματα $u = (1, 0), v = (0, -1)$ είναι $\det \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = -1$, που δεν μπορεί να εκφράζει εμβαδό. Η σωστή έκφραση είναι η απόλυτη τιμή της ορίζουσας αυτής.
113. A
114. Ψ Η ορίζουσα είναι γραμμική συνάρτηση *ως προς κάθε γραμμή* όταν η άλλη γραμμή διατηρείται σταθερή. Συνεπώς, δεν ισχύει γενικά ότι $\det(A+B) = \det(A) + \det(B)$. Πάρτε για παράδειγμα, $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ και $B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
115. A
116. A
117. Ψ Έστω $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ με $\delta(A) = 1$. Τότε $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ και $\delta(B) = -1$.
118. Ψ Από τον ορισμό η συνάρτηση ορίζουσας πρέπει να ικανοποιεί τη σχέση $\delta(I) = 1$.
119. A
120. Ψ Βλέπε απάντηση 114.
121. A
122. A
123. Ψ Έστω $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ με $\det(A) = 1$. Αν B είναι ο πίνακας που προκύπτει από τον A με πολλαπλασιασμό της πρώτης γραμμής με 2, τότε $\det(B) = 2$. Η σωστή σχέση είναι $\det(B) = 2\det(A)$. Θυμίζουμε ότι η συνάρτηση ορίζουσας είναι γραμμική ως προς κάθε γραμμή.
124. A
125. Ψ Ο πίνακας $E = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ είναι στοιχειώδης (προκύπτει από τον I_3 πολλαπλασιάζοντας την πρώτη γραμμή με 2), αλλά $\det(E) = 2$.
126. A
127. Ψ Ο πίνακας $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ έχει αντίστροφο τον $M^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2/3 \\ 0 & 1/3 \end{pmatrix}$, αλλά $\det(M) = 3 \neq 0$. Ισχύουν οι εξής συνεπαγωγές: Ο πίνακας $A \in M_{n\times n}(\mathbf{F})$ δεν είναι αντιστρέψιμος εάν και μόνο εάν $\det(A) = 0$, εάν και μόνο εάν $\operatorname{rk}(A) < n$.
128. A
129. A
130. Ψ Για τον πίνακα της απάντησης 127 είναι $A^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ με $\det(A^t) = \det(A) = 3$. Η σωστή σχέση είναι $\det(A) = \det(A^t)$.
131. A

132. Ψ Προϋπόθεση χρήσης του τύπου στον κανόνα του Cramer, είναι ότι η ορίζουσα των συντελεστών του συστήματος πρέπει να είναι μη μηδενική. Διαφορετικά, το σύστημα είναι δυνατόν να επιλυθεί με χρήση της μεθόδου Gauss-Jordan, π.χ. $x + y = 1,\ 2x + 2y = 3$.
133. Ψ Για το σύστημα $x + 2y = 3,\ 3x + 4y = 1$, η μέθοδος που περιγράφεται στην ερώτηση δεν δίνει τη σωστή λύση $(x, y) = (4, -5)$.
134. Α
135. Ψ Θεωρούμε τον γραμμικό τελεστή $T : P_2(\mathbf{R}) \to P_2(\mathbf{R})$ με $T(f) = f'$. Τότε ο πίνακας του T ως προς την κανονική βάση του $P_2(\mathbf{R})$ είναι $[T]_\beta = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, του οποίου το χαρακτηριστικό πολυώνυμο είναι $-t^3$, που έχει μία μόνο ιδιοτιμή $(\lambda = 0)$ πολλαπλότητας 3.
136. Α
137. Α
138. Ψ Ο πίνακας της απάντησης 135 έχει όλες τις ιδιοτιμές μηδέν.
139. Ψ Τα διανύσματα $(1,\ 0,\ 0)$ και $(2,\ 0,\ 0)$ είναι δύο γραμμικώς εξαρτημένα ιδιοδιανύσματα του πίνακα $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, που αντιστοιχούν στην ιδιοτιμή $\lambda_1 = 1$. Θυμίζουμε ότι, αν x είναι ένα ιδιοδιάνυσμα ενός τελεστή T με ιδιοτιμή λ, τότε και κάθε διάνυσμα $y = cx$ είναι ιδιοδιάνυσμα του T που αντιστοιχεί στην ίδια ιδιοτιμή.
140. Ψ Θεωρούμε τον πίνακα A της απάντησης 139, ο οποίος έχει δύο ακόμα ιδιοτιμές $\lambda_2 = 2$ και $\lambda_3 = 3$. Τότε ο αριθμός $\lambda_2 + \lambda_3 = 5$ δεν είναι ιδιοτιμή του A.
141. Ψ Ο τελεστής $T : C^\infty(\mathbf{R}) \to C^\infty(\mathbf{R})$ ορίζεται επί του δ.χ. άπειρης διάστασης $C^\infty(\mathbf{R})$ όλων των συναρτήσεων που έχουν παράγωγο κάθε τάξης. Εάν λ είναι μια ιδιοτιμή του T, τότε υπάρχει ιδιοδιάνυσμα $y \in C^\infty(\mathbf{R})$ έτσι ώστε $y' = T(y) = \lambda y$, απ' όπου προκύπτει ότι $y(t) = ce^{\lambda t}$ (c σταθερά). Συνεπώς, κάθε πραγματικός αριθμός λ είναι ιδιοτιμή του T και τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα είναι της μορφής $ce^{\lambda t}$ $(c \neq 0)$.
142. Α
143. Α
144. Ψ Οι πίνακες $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ και A^t είναι όμοιοι, αλλά τα ιδιοδιανύσματα του πρώτου είναι τα $\{a(1, 0) : a \in \mathbf{R}\}$, ενώ του δευτέρου τα $\{a(0, 1) : a \in \mathbf{R}\}$.
145. Ψ Ο πίνακας A της απάντησης 139 έχει τις εξής ιδιοτιμές και ιδιοδιανύσματα: $\lambda_1 = 1$ με ιδιοδιανύσματα $\{a(1\ 0\ 0) : a \neq 0\}$, $\lambda_2 = 2$ με ιδιοδιανύσματα $\{a(1\ 1\ 0) : a \neq 0\}$ και $\lambda_3 = 3$ με ιδιοδιανύσματα $\{a(1\ 2\ 1) : a \neq 0\}$. Τότε το άθροισμα των ιδιοδιανυσμάτων $(1\ 0\ 0) + (1\ 1\ 0) = (2\ 1\ 0)$ δεν είναι ιδιοδιάνυσμα

του A.

146. Ψ Θεωρούμε τον γραμμικό τελεστή $T : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ με $T(x, y, z) = (-2y - 3z, x + 3y + 3z, z)$ του οποίου ο πίνακας ως προς την κανονική βάση γ του $\mathbf{R}^3$ είναι $[T]_\gamma = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -3 \\ 1 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του T είναι $f(t) = -\lambda(1-\lambda)^2$, άρα ο T έχει δύο διακεκριμμένες ιδιοτιμές $\lambda_1 = 0$ και $\lambda_2 = 1$. Αν $\beta_1 = \{(-1\ 1\ 0)\}$ και $\beta_2 = \{(-2\ 1\ 0), (-3\ 0\ 1)\}$, τότε το σύνολο $\beta = \beta_1 \cup \beta_2$ αποτελεί μια βάση του $\mathbf{R}^3$ από ιδιοδιανύσματα, άρα ο T είναι διαγωνιοποιήσιμος.

147. Ψ Θεωρούμε τον πίνακα $[T]_\gamma$ της απάντησης 146. Τότε το σύνολο β_1 αποτελείται από δύο γραμμικώς ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν στην ιδιοτιμή $\lambda_1 = 1$.

148. Ψ Ο ιδιόχωρος E_λ ενός τελεστή $T : V \to V$ περιέχει το μηδενικό διάνυσμα (ως διανυσματικός υπόχωρος του V). Αλλά από τον ορισμό, το μηδενικό διάνυσμα δεν είναι ιδιοδιάνυσμα του T.

149. A

150. A

151. A

152. A

153. A

154. Ψ Έστω $V = \mathbf{R}^3$ και οι υπόχωροι $W_1 = \{(x, y, 0) : x, y \in \mathbf{R}\}$, $W_2 = \{(0, 0, z) : z \in \mathbf{R}\}$ και $W_3 = \{(0, y, y) : y \in \mathbf{R}\}$. Τότε $\mathbf{R}^3 \ni (x, y, z) = (x, y, 0) + (0, 0, z) + (0, 0, 0) \in W_1 + W_2 + W_3$ και ανά δύο οι υπόχωροι έχουν τομή τον μηδενικό υπόχωρο, αλλά το άθροισμα δεν είναι ευθύ. Ο λόγος είναι ότι κάποιο διάνυσμα του V γράφεται ώς άθροισμα διανυσμάτων από τους υποχώρους W_i $(i = 1, 2, 3)$ κατά περισσότερους από έναν τρόπο, όπως φαίνεται από την παρακάτω ισότητα: $(0, 0, 0) = (0, 1, 0) + (0, 0, 1) + (0, -1, -1) = (0, 0, 0) + (0, 0, 0) + (0, 0, 0)$.

155. Ψ Κάθε γραμμικός τελεστής $T : V \to V$ έχει τουλάχιστον τους εξής αναλλοίωτους υποχώρους: $\{0\}, V, \mathrm{Ker}T, \mathrm{Im}T, E_\lambda$ για κάποια ιδιοτιμή λ του T.

156. A

157. Ψ Έστω $T : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ με $T(x, y, z) = (-y+z, a+z, 3z)$ και τα διανύσματα $e_1 = (1, 0, 0), e_2 = (0, 1, 0)$. Προκύπτει εύκολα ότι ο T-κυκλικός υπόχωρος που παράγεται από το διάνυσμα e_1 είναι ο $W = \mathrm{span}(\{e_1, e_2\}) = \{(s, t, 0) : s, t \in \mathbf{R}\}$ και ο T-κυκλικός υπόχωρος που παράγεται από το διάνυσμα e_2 είναι ο $W' = \mathrm{span}(\{e_1, e_2\}) = W$, αλλά $e_1 \neq e_2$.

158. Ψ Έστω ο γραμμικός τελεστής $T : P(\mathbf{R}) \to P(\mathbf{R})$ με $T(f) = f'$. Τότε ο T-κυκλικός υπόχωρος που παράγεται από το διάνυσμα x^2 είναι ο $\mathrm{span}(\{x^2, 2x, 2\}) = P_2(\mathbf{R})$, ενώ ο T-κυκλικός υπόχωρος που παράγεται από το διάνυσμα $T(x^2) = 2x$ είναι ο $\mathrm{span}(\{2x, 2\}) = P_1(\mathbf{R}) \neq P_2(\mathbf{R})$.

159. A
160. A
161. A
162. A
163. A
164. Ψ Ισχύει μόνο όταν ο δ.χ. V είναι πραγματικός. Για παράδειγμα, στον δ.χ. $V = \mathbf{C}^n$ επί του $\mathbf{C}$, το εσωτερικό γινόμενο $\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^n a_i\overline{b_i}$ $(x = (a_1, \ldots, a_n), y = (b_1, \ldots, b_n))$ δεν είναι γραμμικό ως προς τη δεύτερη μεταβλητή.
165. Ψ Ο δ.χ. $\mathbf{R}^2$ εκτός από συνηθισμένο εσωτερικό γινόμενο έχει και το εσωτερικό γινόμενο $\langle x, y\rangle = a_1b_1 - a_1b_2 - a_2b_1 + 3a_2b_2$, $(x = (a_1, a_2), y = (b_1, b_2))$. Αυτό μπορεί να εκφραστεί και ως $\langle x, y\rangle = (a_1\ a_2)\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$. Γενικά, ισχύει ότι εάν A είναι ένας πραγματικός, θετικά ορισμένος πίνακας, τότε η συνάρτηση $\langle x, y\rangle = x^tAy$ ορίζει ένα εσωτερικό γινόμενο στον $\mathbf{R}^n$.
166. Ψ Η τριγωνική ανισότητα $||x + y|| \leq ||x|| + ||y||$ ισχύει για οποιονδήποτε χώρο με εσωτερικό γινόμενο, ακόμα και για χώρους άπειρης διάστασης (π.χ. $C([0, 1])$ ο δ.χ. των πραγματικών συνεχών συναρτήσεων επί του $[0, 1]$).
167. Ψ Από τον ορισμό, ο συζυγοανάστροφος A^* ορίζεται για οποιονδήποτε $m \times n$ πίνακα A.
168. A
169. Ψ Από τον ορισμό, με τη διαδικασία ορθοκανονικοποίησης Gram-Schmidt κατασκευάζουμε ένα ορθοκανονικό υποσύνολο S' ενός διανυσματικού χώρου V από ένα γραμμικώς ανεξάρτητο υποσύνολο S του V, με την ιδιότητα $\mathrm{span}(S') = \mathrm{span}(S)$.
170. A
171. A
172. Ψ Από τον ορισμό των συντελεστών Fourier η βάση B πρέπει να είναι ορθοκανονική.
173. A
174. Ψ Τα διανύσματα πρέπει να είναι μη μηδενικά, διαφορετικά είναι γραμμμικώς εξαρτημένα.
175. A
176. A
177. Ψ Η σχέση δεν έχει νόημα, δεδομένου ότι ο γραμμικός τελεστής $T : V \to V$ παίρνει γενικά τιμές στον V, ενώ $\langle x, y\rangle \in \mathbf{F}$. Η σωστή πρόταση είναι ότι, για κάθε γραμμική απεικόνιση $T : V \to \mathbf{F}$ (αυτή λέγεται και *συναρτησοειδές*) υπάρχει μοναδικό διάνυσμα $y \in V$, τέτοιο ώστε $T(x) = \langle x, y\rangle$ για κάθε $x \in V$.
178. Ψ Η βάση β πρέπει να είναι ορθοκανονική. Θεωρήστε για παράδειγμα τον τελεστή $T : \mathbf{C}^2 \to \mathbf{C}^2$ με $T(x, y) = (2ix + 3y, x - y)$ και τη βάση $\beta =$

$\{(1,0),(0,2)\}$ του $\mathbf{C}^2$. Τότε είναι εύκολο να υπολογιστεί ότι $[T]_\beta = \begin{pmatrix} 2i & 6 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ και $[T]_\beta^* = \begin{pmatrix} -2i & 1 \\ 6 & -2 \end{pmatrix}$. Εάν ίσχυε η ισότητα $[T^*]_\beta = [T]_\beta^*$ θα είχαμε ότι $T^*(x,y) = (-2ix+y, 6x-2)$, η οποία δεν ικανοποιεί τη σχέση ορισμού του συζυγούς τελεστή $\langle T(x,y),(z,w)\rangle = \langle (x,y), T^*(z,w)\rangle$, π.χ. για $(z,w)=(0,i)$.
179. Α
180. Ψ Η ισότητα είναι σωστή μόνο όταν ο V είναι πραγματικός διανυσματικός χώρος, διαφορετικά ισχύει $(aT+bU)^* = \bar{a}T^* + \bar{b}U^*$ $(a,b\in\mathbf{C})$.
181. Α
182. Α
183. Α
184. Ψ Θεωρήστε τον τελεστή της απάντησης 178. Η πρόταση αληθεύει όταν ο τελεστής είναι κανονικός.
185. Ψ Η βάση β πρέπει να είναι ορθοκανονική.
186. Α
187. Α
188. Α
189. Ψ Έστω $T:\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}^2$ ο τελεστής στροφής κατά γωνία θ $(0<\theta<\pi)$. Ο πίνακας του τελεστή αυτού είναι ο $A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ για τον οποίο ισχύει $AA^* = A^*A = I$, άρα ο A είναι κανονικός πίνακας συνεπώς ο τελεστής T είναι κανονικός. Όμως ο πίνακας A δεν έχει κανένα ιδιοδιάνυσμα, άρα κατ΄ επέκταση βάση από ιδιοδιανύσματα.
190. Α
191. Α
192. Ψ Ο τελεστής της απάντησης 189 είναι ορθογώνιος αλλά δεν είναι διαγωνιοποιήσιμος (δεν έχει ιδιοδιανύσματα).
193. Ψ Το αντίστροφο δεν ισχύει. Πάρτε για παράδειγμα τον $A = \begin{pmatrix} 1 & i \\ 0 & i \end{pmatrix}$, ο οποίος δεν είναι μοναδιαίος.
194. Α
195. Ψ Αρκεί να δώσουμε αντιπαράδειγμα για ορθογώνιο πίνακα. Οι πίνακες $A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ και $B = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$ είναι ορθογώνιοι, αλλά το άθροισμά τους δεν είναι ορθογώνιος πίνακας.
196. Α
197. Ψ Ο τελεστής στροφής της απάντησης 189 είναι ορθογώνιος, επειδή διατηρεί τα μήκη (ισχύει $||T(x)|| = ||x||$ για κάθε $x\in\mathbf{R}^2$), αλλά ο πινακά του ως προς την διατεταγμένη βάση $\beta = \{(1,0),(0,2)\}$ του $\mathbf{R}^2$ είναι $[T]_\beta =$

$\begin{pmatrix} \cos\,\theta & -2\sin\,\theta \\ \sin\,\theta & 2\cos\,\theta \end{pmatrix}$ που δεν είναι ορθογώνιος.

198. Ψ Ο τελεστής που αντιστοιχεί στον πίνακα $\begin{pmatrix} 1 & z \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ για $z \neq 0$, έχει και τις δύο ιδιοτιμές του 1, αλλά δεν είναι ούτε μοναδιαίος ούτε ορθογώνιος. **199.** Ψ Εάν ένας τελεστής διατηρεί τη νόρμα τότε είναι είτε μοναδιαίος είτε ορθογώνιος, συνεπώς από γνωστό θεώρημα πρέπει να διατηρεί και το εσωτερικό γινόμενο.

200. Ψ Έστω $V = \mathbf{R}^2$ και $W = \text{span}\{(1,1)\}$. Ο τελεστής $T : V \to V$ με $T(x,y) = (x,x)$ είναι μια προβολή στον υπόχωρο W (δηλαδή στην ευθεία $y = x$). Σημειώστε ότι αυτή δεν είναι ορθογώνια προβολή. Ο πίνακας αυτής της απεικόνισης ως προς την κανονική ορθοκανονική βάση β του $\mathbf{R}^2$ είναι ο $[T]_\beta = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, άρα $[T^*]_\beta = [T]^*_\beta = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Συνεπώς, $T^*(x,y) = (x+y, 0)$ άρα ο T δεν είναι αυτοσυζυγής.

201. A

202. A

203. A

204. Ψ Θεωρούμε την προβολή T της απάντησης 200. Το διάνυσμα $T(x,y) \in W$ δεν είναι το πλησιέστερο διάνυσμα στο (x,y). Η ιδιότητα αυτή ικανοποιείται από την ορθογώνια προβολή $U : V \to V$, όπου $U(x,y)$ είναι το πόδι της καθέτου από το (x,y) στην ευθεία $y = x$.

205. Ψ Θεωρούμε την ορθογώνια προβολή U της απάντησης 204. Εάν αυτή ήταν μοναδιαίος τελεστής θα έπρεπε να ισχύει $||U(x,y)|| = ||(x,y)||$ για κάθε $(x,y) \in \mathbf{R}^2$. Αλλά από τη γεωμετρική απεικόνιση του τελεστή, βλέπουμε ότι αυτό δεν ισχύει.

206. Ψ Μια τετραγωνική μορφή επί του διανυσματικού χώρου V είναι μια απεικόνιση της μορφής $K : V \to \mathbf{F}$, ενώ μια διγραμμική μορφή είναι μια απεικόνιση της μορφής $H : V \times V \to \mathbf{F}$. Σημειώνουμε ότι μια τετραγωνική μορφή ορίζεται ως μια απεικόνιση $K : V \to \mathbf{F}$, με την ιδιότητα να υπάρχει συμμετρική διγραμμική μορφή $H : V \times V \to \mathbf{F}$ με $K(x) = H(x,x)$ για κάθε $x \in V$.

207. Ψ Οι πίνακες $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ και $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ είναι ισότιμοι, επειδή $Q^t A Q = D$, όπου $Q = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Είναι όμως εύκολο να διαπιστώσουμε ότι οι πίνακας A και D δεν έχουν τις ίδιες ιδιοτιμές.

208. A

209. Ψ Η πρόταση είναι αληθής μόνο όταν τα στοιχεία του πίνακα ανήκουν σε ένα σώμα χαρακτηριστικής διάφορης του 2, διαφορετικά δεν ισχύει γενικά. Θεωρήστε για παράδειγμα τον πίνακα $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ επί του σώματος $\mathbf{F} = \mathbf{Z}_2$.

Εάν ο A ήταν ισότιμος με έναν διαγώνιο πίνακα B (με στοιχεία από το $\mathbf{Z}_2$), τότε θα υπήρχε αντιστέψιμος πίνακας Q ώστε $B = Q^t AQ$. Επειδή το μόνο μη μηδενικό στοιχείο του σώματος $\mathbf{F}$ είναι το 1, αναγκαστικά θα πρέπει να είναι $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Αλλά αυτό δεν μπορεί να συμβεί (γιατί;)

210. Α

211. Ψ Οι πίνακες $\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ και $\begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ έχουν το ίδιο χαρακτηριστικό πολυώνυμο $(t-6)(t-1)$, αλλά δεν προέρχονται από την ίδια διγραμμική μορφή.

212. Ψ Ισχύει ότι για κάθε διγραμμική μορφή $H : V \times V \to \mathbf{F}$ υπάρχουν $x, y \in V$ τέτοια ώστε $H(x, y) = 0$. Πράγματι, λόγω της διγραμμικότητας $H(0, x) = H(x, 0) = 0$ για κάθε $x \in V$.

213. Ψ Η σωστή διάσταση είναι n^2.

214. Α

215. Ψ Η διγραμμική μορφή πρέπει να είναι συμμετρική. Για παράδειγμα, ο πίνακας της διγραμμικής μορφής $H : \mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ με $H(x, y) = x^2 + y^2 + 2xy$ ως προς την κανονική βάση του $\mathbf{R}^2$ είναι ο $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, ο οποίος δεν είναι διαγωνιοποιήσιμος.

216. Α

217. Ψ Εάν p είναι ο μικρότερος ακέραιος με την ιδιότητα $(T - \lambda \mathrm{Id})^p(x) = 0$, τότε το $(T - \lambda \mathrm{Id})^{p-1}(x)$ είναι ένα ιδιοδιάνυσμα του T που αντιστοιχεί στον αριθμό λ, συνεπώς το λ είναι μια ιδιοτιμή του T.

218. Ψ Θα πρέπει το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του τελεστή να γράφεται ως γινόμενο πρωτοβαθμίων παραγόντων (αυτό μπορεί να συμβεί για παράδειγμα όταν ο διανυσματικός χώρος ορίζεται επί του $\mathbf{C}$). Έτσι, ένας γραμμικός τελεστής επί του $\mathbf{R}^3$ με χαρακτηριστικό πολυώνυμο $(x^2 + x + 1)(x - 1)$ δεν έχει κανονική μορφή Jordan.

219. Α

220. Ψ Σε κάθε ιδιοτιμή ενός γραμμικού τελεστή είναι δυνατόν να αντιστοιχούν παραπάνω από ένα γενικευμένα ιδιοδιανύσματα, άρα και αντίστοιχοι κύκλοι από ιδιοδιανύσματα.

221. Ψ Το σύνολο αυτό είναι απλώς μια βάση του V.

222. Α

223. Α

224. Α

225. Α

226. Ψ Έστω $T = L_A, S = L_B$ γραμμικοί τελεστές με $A = \begin{pmatrix} -3 & 3 & -2 \\ -7 & 6 & -3 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

και $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -4 & 4 & -2 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, οι οποίοι έχουν το ίδιο χαρακτηριστικό πολυώνυμο $-(t-1)(t-2)^2$. Οι κανονικές μορφές Jordan των πινάκων A και B είναι $J_A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ και $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ αντίστοιχα, συνεπώς οι πίνακες δεν είναι όμοιοι. Γενικά ισχύει ότι δύο πίνακες (ή γραμμικοί τελεστές) είναι όμοιοι εάν και μόνο εάν έχουν την ίδια κανονική μορφή Jordan.

227. Α

228. Α

229. Ψ

230. Ψ

231. Α

232. Ψ Ένα πολυώνυμο $p(t)$ που ικανοποιεί την $p(T) = T_0$, μπορεί να είναι οσοδήποτε μεγάλου βαθμού (θεωρώντας κάποιους συντελεστές μηδέν).

233. Α

234. Ψ Το αντίθετο είναι αληθές. Έστω ο πίνακας $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$. Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του A είναι το $f(t) = -(t-2)^2(t-3)$ και το ελάχιστο πολυώνυμό του το $p(t) = (t-2)(t-3)$. Το $p(t)$ διαιρεί το $f(t)$, αλλά όχι το αντίθετο.

235. Ψ Θεωρούμε τον πίνακα $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 0 & -3 & 4 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$ με χαρακτηριστικό πολυώνυμο $f(t) = (t-1)^2(t+1)$ και ελάχιστο πολυώνυμο $p(t) = (t-1)(t+1)$. Επειδή το ελάχιστο πολυώνυμο είναι γινόμενο διακεκριμένων πρωτοβαθμίων παραγόντων, ο πίνακας A είναι διαγωνιοποιήσιμος.

236. Α

237. Ψ Χρησιμοποιήστε το ίδιο αντιπαράδειγμα με την ερώτηση 234.

238. Ψ Ισχύει ότι ένας γραμμικός τελεστής T είναι διαγωνιοποιήσιος εάν και μόνο εάν το ελάχιστο του T είναι γινόμενο διακεκριμένων πρωτοβαθμίων παραγόντων, δηλαδή της μορφής $p(t) = (t-\lambda_1)(t-\lambda_2)\cdots(t-\lambda_k)$, όπου $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ οι διακεκριμένες ιδιοτιμές του T. Θεωρούμε τον γραμμικό τελεστή $T : P_2(\mathbf{R}) \to P_2(\mathbf{R})$ με $T(f) = f'$. Ο πίνακας του T ως προς την κανονική βάση β είναι ο $[T]_\beta = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του T είναι το $f(t) = -t^3$ και το ελάχιστο πολυώνυμο το $p(t) = t^3$. Άρα το T δεν είναι διαγωνιοποιήσιμος.

239. Α
240. Α
241. Ψ Η διατύπωση του αντίστοιχου θεωρήματος είναι η εξής: Μια διατεταγμένη βάση β του V είναι μια ρητή κανονική βάση του τελεστή T εάν και μόνο εάν η β είναι διακεκριμένη ένωση από T-κυκλικές βάσεις $B_{x_i}(T)$, όπου κάθε x_i βρίσκεται στον υπόχωρο K_ϕ για κάποιον ανάγωγο μονικό διαιρέτη $\phi(t)$ του χαρακτηριστικού πολυωνύμου του T.
242. Ψ Ισχύει το θεώρημα ότι, κάθε γραμμικός τελεστής (άρα και τετραγωνικός πίνακας) επί ενός διανυσματικού χώρου πεπερασμένης διάστασης έχει μια ρητή κανονική βάση, άρα και μια ρητή κανονική μορφή.
243. Α
244. Ψ Θεωρούμε τον πίνακα $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ με χαρακτηριστικό και ελάχιστο πολυώνυμο $x^2-2x+1=(x-1)^2$. Τότε η ρητή κανονική μορφή είναι $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ και η κανονική μορφή Jordan $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
245. Α
246. Ψ
247. Ψ Από τον ορισμό κάθε γραμμικό συναρτησοειδές ορίζεται σε έναν διανυσματικό χώρο V και παίρνει τιμές στο υποκείμενο σώμα του V.
248. Α
249. Α
250. Α
251. Ψ Ο λόγος που δεν αναμένουμε να είναι αληθής, είναι ότι ο ισομορφισμός του V με τον V^* δεν είναι κανονικός. Έστω $V = \mathbf{R}^2$ και $T : V \to V^*$ ο ισομορφισμός ο οποίος ορίζεται από τις σχέσεις $T(e_1) = f_1, T(e_2) = f_2$, όπου $\gamma = \{e_1, e_2\}$ η κανονική βάση του V και $\gamma^* = \{f_1, f_2\}$ η δυϊκή της με $f_1(x, y) = x, f_2(x, y) = y$. Συνεπώς, ο T έχει τύπο $T(x, y) = xf_1 + yf_2$. Έστω τώρα $\beta = \{(2, 1), (3, 1)\}$ μια άλλη βάση του V, της οποίας η δυϊκή $\beta^* = \{g_1, g_2\}$ δίνεται ως $g_1(x, y) = -x + 3y, g_2(x, y) = x - 2y$. Αλλά $T(2, 1) = 2f_1 + f_2 \neq g_1$.
252. Α
253. Α
254. Ψ Ο τελεστής παραγώγισης στέλνει μια συνάρτηση σε μια άλλη συνάρτηση, άρα δεν παίρνει τιμές σε ένα σώμα, συνεπώς δεν είναι ένα συναρτησοειδές.

Κεφάλαιο 4

Βιβλιογραφία

[**1**] S. Axler: *Linear Algebra Done Right*, Springer 1996

[**2**] S. H. Friedberg – A.J. Insel – L. E. Spence: *Linear Algebra*, Fourth Edition, Prentice Hall 2003.

[**3**] S. Lipschutz – M. Lipson: *Γραμμική Άλγεβρα*, Τρίτη Έκδοση, Εκδ. Τζιόλα, Θεσσαλονίκη 2005.

[**4**] H. E. Rose: *Linear Algebra: A Pure Mathematical Approach*, Birkhäuser 2002.

[**3**] Δ. Στρατηγόπουλος: *Γραμμική Άλγεβρα Ι*, Εκδ. Συμμετρία, Αθήνα 1994.

[**5**] Συγγραφική ομάδα Πανεπιστημίου Αθηνών: *Μια Εισαγωγή στη Γραμμική Άλγεβρα* Τόμος Ι, Εκδ. Σοφία, Θεσσαλονίκη 2008.

[**6**] Συγγραφική ομάδα Πανεπιστημίου Αθηνών: *Μια Εισαγωγή στη Γραμμική Άλγεβρα* Τόμος ΙΙ, Εκδ. Σοφία, Θεσσαλονίκη 2009.