Τίτλος Μαθήματος : Γραμμική Άλγεβρα Ι

Ενότητα: Διαγωνιοποίηση γραμμικών τελεστών και πινάκων

Όνομα Καθηγητή: Ανδρέας Αρβανιτογεώργος

Τμήμα: Μαθηματικών

Άδειες Χρήσης

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Πατρών**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Κεφάλαιο 5

Διαγωνιοποίηση γραμμικών τελεστών και πινάκων

Όπως έχουμε δει στα προηγούμενα κεφάλαια το κεντρικό αντικείμενο της γραμμικής άλγεβρας είναι η μελέτη γραμμικών απεικονίσεων $T : V \to W$ μεταξύ διανυσματικών χώρων. Στην περίπτωσή μας οι διανυσματικοί χώροι είναι πάντα πεπερασμένης διάστασης. Ιδιαίτερη σημασία έχουν γραμμικές απεικονίσεις $T : V \to V$, οι οποίες ονομάζονται και γραμμικοί τελεστές (linear operators). Η μελέτη μίας τέτοιας απεικόνισης ανάγεται ως γνωστόν στη μελέτη του αντίστοιχου πίνακα ως προς κάποια βάση του V. Επειδή η μελέτη πινάκων παρουσιάζει και αυτή τακτικά τεχνικές δυσκολίες, τίθεται το ερώτημα κατά πόσον ο πίνακας ενός γραμμικού τελεστή είναι όσο το δυνατόν απλούστερος.

Απο την μέχρι στιγμής εμπειρία μας είναι σαφές ότι οι διαγώνιοι πίνακες είναι οι απλούστεροι δυνατοί. Συνεπώς, αν ο πίνακας μιας γραμμικής απεικόνισης είναι διαγώνιος, τότε μπορούμε να υπολογίσουμε εξαιρετικά εύκολα διάφορες (αναλλοίωτες) ποσότητες όπως ίχνος, ορίζουσα κ.λ.π..

Θυμίζουμε τον εξής ορισμό.

Ορισμός 5.1. *Δύο πίνακες $A, B \in \mathsf{M}_{n\times n}(\mathbb{F})$ ονομάζονται όμοιοι (similar) εάν υπάρχει αντιστρέψιμος πίνακας Q τέτοιος ώστε $B = Q^{-1}AQ$. Σε αυτήν την περίπτωση συμβολίζουμε $A \sim B$.*

Ισχύουν τα εξής:

1) Δύο πίνακες A, B είναι όμοιοι εάν και μόνο εάν οι A, B είναι πίνακες της ίδιας γραμμικής απεικόνισης (ενδεχομένως ως προς διαφορετικές βάσεις).

2) Αν $A \sim B$ τότε ισχύουν τα εξής:

   i) $\mathrm{rk}(A) = \mathrm{rk}(B)$.

ii) $\mathrm{tr}(A) = \mathrm{tr}(B)$.

iii) $\det(A) = \det(B)$.

Προσοχή τα αντίστροφα δεν ισχύουν. Δώστε αντιπαραδείγματα.

Δεδομένου λοιπόν ότι οι διαγώνιοι πίνακες είναι οι απλούστεροι δυνατοί, τα ερωτήματα που τίθενται είναι τα εξής:

1) Πότε ένας πίνακας είναι όμοιος με έναν διαγώνιο πίνακα;

2) Έστω $T : V \to V$ γραμμικός τελεστής.

   i) Υπάρχει βάση B του V τέτοια ώστε ο πίνακας $[T]_{\mathrm{B}}$ του T να είναι διαγώνιος;

   ii) Αν ναι, πώς μπορούμε να βρούμε μία τέτοια βάση;

5.1 Ιδιοτιμές και ιδιοδιανύσματα

Γραμμικοί τελεστές $T : V \to V$ που έχουν την ιδιότητα $T = \lambda \mathsf{Id}_V$, για κάθε $x \in V$ δηλαδή $T(x) = \lambda x$ είναι ιδιαίτερα απλοί μιας και ο πίνακάς τους είναι διαγώνιος. Θα δούμε ότι οι παραπάνω αριθμοί $\lambda \in \mathbb{F}$ έχουν ιδιαίτερα σημαντικό ρόλο στην θεωρία διαγωνιοποίησης.

Έστω V διανυσματικός χώρος πεπερασμένης διάστασης και B, B' δύο βάσεις του V. Θυμίζουμε ότι ισχύει $[T]_{\mathrm{B}'} = Q^{-1}[T]_{\mathrm{B}}Q$, όπου Q ο πίνακας αλλαγής βάσης, δηλαδή οι πίνακες $[T]_{\mathrm{B}'}$ και $[T]_{\mathrm{B}}$ είναι όμοιοι.

Πρόταση 5.1. *Έστω $A \in \mathsf{M}_{n\times n}(\mathbb{F})$ και $\Gamma = \{x_1, \ldots, x_n\}$ μία βάση του $\mathbb{F}^n$. Τότε $[L_A]_\Gamma = Q^{-1}AQ$, όπου Q ο $n \times n$ πίνακας που έχει ως στήλες τα διανύσματα $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{F}^n$.*

Απόδειξη. Άσκηση. $\square$

Θεώρημα 5.1. *Έστω $T : V \to V$ ένας γραμμικός τελεστής με $\dim V = n$ και έστω B μία βάση του V. Αν $B \in \mathsf{M}_{n\times n}(\mathbb{F})$ με $B \sim [T]_{\mathrm{B}}$, τότε υπάρχει μία βάση B' του V τέτοια ώστε $B = [T]_{\mathrm{B}'}$.*

Απόδειξη. Από υπόθεση υπάρχει αντιστρέψιμος πίνακας Q τέτοιος ώστε $B = Q^{-1}[T]_{\mathrm{B}}$ Q. Έστω ότι $\mathrm{B} = \{x_1, \ldots, x_n\}$. Ορίζουμε $\mathrm{B}' = \{x'_1, \ldots, x'_n\}$, όπου $x'_j = \sum_{i=1}^n q_{ij}x_i$ $(1 \leq j \leq n)$ (δηλαδή οι στήλες του πίνακα Q). Τότε η B' είναι μία βάση του V (άσκηση), τέτοια ώστε ο Q να είναι ο πίνακας αλλαγής από την B' στην B. Συνεπώς, $[T]_{\mathrm{B}'} = Q^{-1}[T]_{\mathrm{B}}Q = B$. $\square$

Από εδώ και στο εξής θα χρησιμοποιούμε τον συμβολισμό $\mathcal{L}(V)$ για το σύνολο όλων των γραμμικών απεικονίσεων (τελεστών) $T : V \to V$.

Ορισμός 5.2. *1) Ο τελεστής $T \in \mathcal{L}(V)$ ονομάζεται διαγωνιοποιήσιμος (diagonalizable) εάν υπάρχει βάση* B *του* V *τέτοια ώστε ο πίνακας* $[T]_{\mathrm{B}}$ *να είναι διαγώνιος.*

2) Ένας τετραγωνικός πίνακας ονομάζεται διαγωνιοποιήσιμος εάν είναι όμοιος με έναν διαγώνιο πίνακα.

Θεώρημα 5.2. *Έστω $T \in \mathcal{L}(V)$ και* B *μία βάση του* V*. Τότε ο τελεστής* T *είναι διαγωνιοποιήσιμος εάν και μόνο εάν ο πίνακας* $[T]_{\mathrm{B}}$ *είναι διαγωνιοποιήσιμος.*

Απόδειξη. Άσκηση. □

Το πρόβλημα λοιπόν του κατά πόσον ένας τελεστής $T \in \mathcal{L}(V)$ είναι διαγωνιοποιήσιμος ανάγεται στο εξής:
Έστω A ένας τετραγωνικός πίνακας.

1) Είναι ο A διαγωνιοποιήσιμος;

2) Αν ναι, πώς μπορώ να βρω έναν αντιστρέψιμο πίνακα Q τέτοιον ώστε ο πίνακας $Q^{-1}AQ$ να είναι αντιστρέψιμος;

Το παρακάτω θεώρημα είναι το κεντρικό αποτέλεσμα της παραγράφου.

Θεώρημα 5.3. *Ένας τελεστής $T \in \mathcal{L}(V)$ είναι διαγωνιοποιήσιμος εάν και μόνο εάν υπάρχει μία βάση* $\mathrm{B} = \{x_1, \ldots, x_n\}$ *του* V *και αριθμοί* $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{F}$ *(όχι απαραίτητα διαφορετικοί) ώστε* $T(x_j) = \lambda_j x_j,\ 1 \leq j \leq n$*. Τότε*

$$[T]_{\mathrm{B}} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n \end{pmatrix} \equiv \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n).$$

Απόδειξη. Από την υπόθεση υπάρχει βάση $\mathrm{B} = \{x_1, \ldots, x_n\}$ τέτοια ώστε ο πίνακας $[T]_{\mathrm{B}} = D = \mathrm{diag}(d_{11}, d_{22}, \ldots, d_{nn})$ να είναι διαγώνιος. Θέτουμε $\lambda_j = d_{jj}$. Τότε για κάθε $j = 1, \ldots, n$ είναι

$$T(x_j) = \sum_{i=1}^{n} d_{ij} x_i = d_{jj} x_j = \lambda_j x_j.$$

Αντίστροφα, είναι $[T]_{\mathrm{B}} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$ άρα ο T είναι διαγωνιοποιήσιμος. □

Ορισμός 5.3. *1) Έστω $T \in \mathcal{L}(V)$. Ένα μη μηδενικό διάνυσμα $x \in V$ ονομάζεται ιδιοδιάνυσμα (eigenvector) του V εάν υπάρχει αριθμός $\lambda \in \mathbb{F}$ τέτοιος ώστε $T(x) = \lambda x$. Ο αριθμός αυτός λ ονομάζεται ιδιοτιμή του T που αντιστοιχεί στο ιδιοδιάνυσμα x.*

2) Έστω $A \in \mathsf{M}_{n\times n}(\mathbb{F})$. Ένα μη μηδενικό διάνυσμα $x \in \mathbb{F}^n$ ονομάζεται ιδιοδιάνυσμα του A εάν το x είναι ιδιοδιάνυσμα του τελεστή $L_A : \mathbb{F}^n \to \mathbb{F}^n$, δηλαδή $Ax = \lambda x$ για κάποιο $\lambda \in \mathbb{F}$. Ο αριθμός λ ονομάζεται ιδιοτιμή του A που αντιστοιχεί στο ιδιοδιάνυσμα x.

Το προηγούμενο θεώρημα επαναδιατυπώνεται τώρα ως εξής.
Ο τελεστής $T \in \mathcal{L}(V)$ είναι διαγωνιοποιήσιμος εάν και μόνο εάν ο διανυσματικός χώρος V έχει μία βάση από ιδιοδιανύσματα του T. Επιπλέον, αν ο T είναι διαγωνιοποιήσιμος και $\mathrm{B} = \{x_1, \ldots, x_n\}$ είναι μία βάση από ιδιοδιανύσματα, τότε ο πίνακας $D = [T]_{\mathrm{B}}$, είναι διαγώνιος, όπου το στοιχείο του d_{ii} είναι η ιδιοτιμή που αντιστοιχεί στο ιδιοδιάνυσμα x_i $(i = 1, \ldots, n)$.

Παραδείγματα

1) Έστω $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \in \mathsf{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ και έστω $x_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $x_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. Τότε

$$L_A(x_1) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 12 \end{pmatrix} = 4 \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = 4x_1,$$

άρα το x_1 είναι ένα ιδιοδιάνυσμα του τελεστή L_A, άρα και του πίνακα A. Η $\lambda_1 = 4$ είναι η ιδιοτιμή που αντιστοιχεί στο ιδιοδιάνυσμα x_1. Παρόμοια βρίσκουμε ότι $L_A(x_2) = -1 \cdot x_2$, άρα το x_2 είναι ένα ιδιοδιάνυσμα του A με αντίστοιχη ιδιοτιμή $\lambda_2 = -1$. Παρατηρούμε ότι το σύνολο $\mathrm{B} = \{x_1, x_2\}$ είναι μία βάση του $\mathbb{R}^2$, συνεπώς $[L_A]_{\mathrm{B}} = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$. Τέλος, παρατηρούμε ότι αν θέσουμε $Q = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$ τότε $Q^{-1}AQ = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$.

2) Υπάρχουν τελεστές οι οποίοι δεν έχουν κανένα ιδιοδιάνυσμα (άρα καμμία ιδιοτιμή). Οι τελεστές αυτοί δεν είναι διαγωνιοποιήσιμοι. Για παράδειγμα, έστω $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ ο τελεστής με τύπο $T(v) =$ στροφή του v κατά γωνία $\pi/2$. Τότε τα διανύσματα v και $T(v)$ δεν είναι συγγραμμικά, συνεπώς το $T(v)$ δεν μπορεί να είναι πολλαπλάσιο του v.

5.2 Εύρεση ιδιοδιανυσμάτων - Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο

Από το Παράδειγμα 1) της προηγούμενης ενότητας φαίνεται ότι ενδεχομένως συμβαίνει το εξής:

Αν $\mathrm{B} = \{x_1, \dots, x_n\}$ είναι μία βάση του $\mathbb{F}^n$ από ιδιοδιανύσματα του πίνακα A και $Q = (x_1, \dots, x_n)$ είναι ο πίνακας με στήλες τα διανύσματα της βάσης, τότε ο πίνακας $Q^{-1}AQ$ είναι διαγώνιος. Συνεπώς αναζητούμε μία μέθοδο εύρεσης των ιδιοδιανυσμάτων ενός πίνακα ή γραμμικού τελεστή.

Πρόταση 5.2. *Έστω $T \in \mathcal{L}(V)$ και B, B' βάσεις του V. Τότε $\det([T]_{\mathrm{B}}) = \det([T]_{\mathrm{B}'})$.*

Απόδειξη. Άσκηση. □

Ορισμός 5.4. *Η <u>ορίζουσα ενός τελεστή</u> $T \in \mathcal{L}(V)$ είναι ο αριθμός $\det(T) = \det([T]_{\mathrm{B}})$, όπου B οποιαδήποτε βάση του V.*

Πρόταση 5.3. *Έστω $T \in \mathcal{L}(V)$. Τότε ισχύουν τα εξής:*

1) Ο T είναι αντιστρέψιμος εάν και μόνο εάν $\det(T) \neq 0$.

2) Αν ο T είναι αντιστρέψιμος, τότε $\det(T^{-1}) = (\det(T))^{-1}$.

3) Αν $S \in \mathcal{L}(V)$ τότε $\det(T \circ S) = \det(T)\det(S)$.

4) Αν $\lambda \in \mathbb{F}$ και B βάση του V, τότε $\det(T - \lambda \mathsf{Id}_V) = \det(A - \lambda I_n)$, όπου $A = [T]_{\mathrm{B}}$.

Απόδειξη. Άσκηση. □

Το παρακάτω θεώρημα περιγράφει τον τρόπο εύρεσης των ιδιοτιμών.

Θεώρημα 5.4. *Έστω $T \in \mathcal{L}(V)$. Ο αριθμός $\lambda \in \mathbb{F}$ είναι ιδιοτιμή του T εάν και μόνο εάν $\det(T - \lambda \mathsf{Id}_V) = 0$.*

Απόδειξη. Ο αριθμός λ είναι ιδιοτιμή του T εάν και μόνο εάν υπάρχει $0 \neq x \in V$ ώστε $T(x) = \lambda x$ ή $(T - \lambda \mathsf{Id}_V)(x) = 0$. Αυτό ισοδυναμεί με το ότι ο τελεστής $T - \lambda \mathsf{Id}_V$ δεν είναι αντιστρέψιμος (γιατί;) και από την Πρόταση 5.3 το τελευταίο ισοδυναμεί με το ότι $\det(T - \lambda \mathsf{Id}_V) = 0$. □

Πόρισμα 5.1. *Έστω $A \in \mathsf{M}_{n\times n}(\mathbb{F})$. Ο αριθμός $\lambda \in \mathbb{F}$ είναι μία ιδιοτιμή του πίνακα A εάν και μόνο εάν $\det(A - \lambda I_n) = 0$.*

Ορισμός 5.5. *1) Έστω* $A \in \mathsf{M}_{n\times n}(\mathbb{F})$. *Το πολυώνυμο* $\det(A - tI_n)$ *ως προς τη μεταβλητή* t *ονομάζεται το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του* A.

2) Έστω $T \in \mathcal{L}(V)$ *και* B *μία βάση του* V. *Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του* T *είναι το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του πίνακα* $A = [T]_{\mathrm{B}}$.

Παραδείγματα

Να βρεθούν τα χαρακτηριστικά πολυώνυμα και οι ιδιοτιμές των παρακάτω πινάκων.

1) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \in \mathsf{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$.

Είναι $\det(A - \lambda I_2) = \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 3 & 2-\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda)(2-\lambda) - 6 = \lambda^2 - 3\lambda - 4$.
Οι ιδιοτιμές είναι $\lambda_1 = 4, \lambda_2 = -1$.

2) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \in \mathsf{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$.

Είναι $\det(A - I_3) = \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 & 2 \\ 2 & 1-\lambda & 2 \\ 2 & 2 & 1-\lambda \end{pmatrix} = \lambda^3 - 3\lambda^2 - 9\lambda - 5 = (\lambda + 1)^2(\lambda - 5)$. Οι ιδιοτιμές είναι οι $\lambda_1 = -1$ και $\lambda_2 = 5$.

3) $A = \begin{pmatrix} i & 1 \\ 2 & -i \end{pmatrix} \in \mathsf{M}_{2\times 2}(\mathbb{C})$.

Είναι $\det(A - \lambda I_2) = \det \begin{pmatrix} i-\lambda & 1 \\ 2 & -i-\lambda \end{pmatrix} = -(i-\lambda)(i+\lambda) - 2 = \lambda^2 - 1$. Οι ιδιοτιμές είναι $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -1$.

4) Να βρεθούν οι ιδιοτιμές του τελεστή $T : \mathsf{P}_2(\mathbb{R}) \to \mathsf{P}_2(\mathbb{R}),\ T(f(x)) = xf'(x) + f(2)x + f(3)$.
Θα βρούμε πρώτα τον πίνακα του T ως προς κάποια βάση του $\mathsf{P}_2(\mathbb{R})$. Επιλέγουμε, την κανονική βάση $\mathrm{B} = \{1, x, x^2\}$. Είναι

$$\begin{aligned} T(1) &= 0 + 1 + 1 = 2, \\ T(x) &= x + 2x + 3 = 3x + 3, \\ T(x^2) &= 2x^2 + 4x + 9 = 6x^2 + 4x + 9. \end{aligned}$$

Άρα $[T]_{\mathrm{B}} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 0 \\ 9 & 4 & 6 \end{pmatrix}$. Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο είναι

$$\det([T]_{\mathrm{B}} - \lambda I_3) = \det \begin{pmatrix} 2-\lambda & 0 & 0 \\ 3 & 3-\lambda & 0 \\ 9 & 4 & 6-\lambda \end{pmatrix} = (2-\lambda)(3-\lambda)(6-\lambda).$$

Οι ιδιοτιμές είναι $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 3, \lambda_3 = 6$.

Θεώρημα 5.5. *Έστω $A \in \mathsf{M}_{2\times 2}(\mathbb{F})$.*

1) Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του A είναι ένα πολυώνυμο βαθμού n με συντελεστή μεγιστοβάθμιου όρου $(-1)^n$.

2) Ο πίνακας A έχει το πολύ n διακεκριμμένες ιδιοτιμές.

Σημείωση

Είναι δυνατόν να αποδειχθεί ότι το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του πίνακα A έχει τη μορφή

$$f(t) = (-1)^n(t^n - (\mathrm{tr}(A))t^{n-1} + \cdots + \det(A)).$$

Επιπλέον, $\mathrm{tr}(A) = \lambda_1 + \cdots + \lambda_n$, και $\det(A) = \lambda_1 \cdots \lambda_n$.

Συμπερασματικά

Έστω $A \in \mathsf{M}_{n\times n}(\mathbb{F})$ και $f(t)$ το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του A (αντίστοιχα του τελεστή $T \in \mathcal{L}(V)$).

i) Ο αριθμός $\lambda \in \mathbb{F}$ είναι ιδιοτιμή του A (αντίστοιχα του T) εάν και μόνο εάν το λ είναι ρίζα του χαρακτηριστικού πολυωνύμου $f(t)$ του A (αντίστοιχα T), δηλαδή $f(\lambda) = 0$.

ii) Έστω $T \in \mathcal{L}(V)$ και λ μια ιδιοτιμή του T. Το διάνυσμα $x \in V$ είναι ένα ιδιοδιάνυσμα του T με αντίστοιχη ιδιοτιμή λ εάν και μόνο εάν $x \neq 0$ και $x \in \mathrm{Ker}(T - \lambda \mathsf{Id}_V)$ ($\Leftrightarrow T(x) = \lambda x$).

Παραδείγματα

1) Να βρεθούν οι ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα του πίνακα

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Είχαμε βρει σε προηγούμενο παράδειγμα ότι οι ιδιοτιμές του A είναι $\lambda_1 = 4$, $\lambda_2 = -1$. Έστω $\lambda_1 = 4$ και θεωρούμε τον πίνακα

$$A - \lambda_1 I_2 = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}.$$

Τότε το $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ είναι ένα ιδιοδιάνυσμα που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή $\lambda_1 = 4$ εάν και μόνο εάν $x \neq \mathit{0}$ και $x \in \mathrm{Ker}(A - \lambda_1 I_2)$, δηλαδή το x είναι μία λύση του ομογενούς συστήματος

$$\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ή ισοδύναμα

$$\left.\begin{aligned} -3x_1 + 3x_2 = 0 \\ 3x_1 - 2x_2 = 0 \end{aligned}\right\}.$$

Το παραπάνω σύστημα ισοδυναμεί με το $3x_1 - 2x_2 = 0$ ή $x_1 = \frac{2}{3}x_2$. Συνεπώς, η γενική λύση είναι $(\frac{2}{3}x_2, x_2) = x_2(\frac{2}{3}, 1)$ ή ισοδύναμα $\{t(2,3) : t \in \mathbb{R}\}$. Συνεπώς, το x είναι ένα ιδιοδιάνυσμα που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή $\lambda_1 = 4$ εάν και μόνο εάν $x = t\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ για κάποιο $t \neq 0$. Έστω τώρα $\lambda_2 = -1$ και $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ ένα ιδιοδιάνυσμα που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή λ_2. Τότε $A - \lambda_2 I_2 = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$. Τότε το x ικανοποιεί το σύστημα

$$(A - \lambda_2 I_2)x = \mathit{0}$$

ή ισοδύναμα

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

που ισοδυναμεί με την εξίσωση $x_1 + x_2 = 0$. Η γενική λύση είναι $(x_1, x_2) = x_1(1, -1)$, συνεπώς το x είναι ένα ιδιοδιάνυσμα που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή $\lambda_2 = -1$ εάν και μόνο εάν $x = t\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ για κάποιο $t \neq 0$. Παρατηρούμε επιπλέον ότι το σύνολο $\{\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\}$ αποτελεί μία βάση του $\mathbb{R}^2$ από ιδιοδιανύσματα και αν $Q = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$ τότε $Q^{-1}AQ = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

2) Να βρεθούν οι ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα του γραμμικού τελεστή

$$T : \mathsf{P}_3(\mathbb{R}) \to \mathsf{P}_3(\mathbb{R}), \quad T(f(x)) = f(x) + f(2)x.$$

Πρώτα θα βρούμε τον πίνακα $[T]_{\mathrm{B}}$ του τελεστή T ως προς την βάση $\mathrm{B} = \{1, x, x^2, x^3\}$ του $\mathsf{P}_3(\mathbb{R})$ και τις ιδοτιμές του πίνακα $[T]_{\mathrm{B}}$, οι οποίες είναι οι ιδιοτιμές του A. Είναι

$$\begin{aligned} T(1) &= 1 + x, \\ T(x) &= x + 2x = 3x, \\ T(x^2) &= x^2 + 4x, \\ T(x^3) &= x^3 + 8x. \end{aligned}$$

Άρα

$$[T]_{\mathrm{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 4 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \equiv A.$$

Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο είναι

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda I_4) &= \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3-\lambda & 4 & 8 \\ 0 & 0 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1-\lambda \end{pmatrix} \\ &= (1-\lambda) \det \begin{pmatrix} 3-\lambda & 4 & 8 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{pmatrix} \\ &= (1-\lambda)(3-\lambda)(1-\lambda)^2. \end{aligned}$$

Συνεπώς, οι ιδιοτιμές είναι $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 3$. Ερχόμαστε τώρα στην εύρεση των αντίστοιχων ιδιοδιανυσμάτων, τα οποία σημειώνουμε ότι πρέπει να είναι στοιχεία του συνόλου $\mathsf{P}_3(\mathbb{R})$. Τα ιδιοδιανύσματα που θα βρούμε εμείς είναι στοιχεία του διανυσματικού χώρου $\mathbb{R}^4$ (ιδιοδιανύσματα του πίνακα A). Συνεπώς, θα χρησιμοποιήσουμε τον ισομορφισμό

$$\phi_{\mathrm{B}} : \mathsf{P}_3(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^4, \quad \phi_{\mathrm{B}}(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3) = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$$

προκειμένου να βρούμε τα ιδιοδιανύσματα του τελεστή T. Έστω $\lambda_1 = 1$. Τότε

$$A - \lambda_1 I_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

και $\mathrm{Ker}(A - \lambda_1 I_3) = \mathrm{span}\{(-8,0,0,1),(-4,0,1,0),(-2,1,0,0)\}$ (άσκηση). Συνεπώς, τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα του T είναι

$$\phi_{\mathrm{B}}^{-1} \begin{pmatrix} -8 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = -8 + x^3, \quad \phi_{\mathrm{B}}^{-1} \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = -4 + x^2$$

και

$$\phi_{\mathrm{B}}^{-1} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = -2 + x.$$

Για την ιδιοτιμή $\lambda_2 = 3$ βρίσκουμε ότι

$$A - \lambda_2 I_3 = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 4 & 8 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

και $\mathrm{Ker}(A - \lambda_2 I_3) = \mathrm{span}\{(0,0,1,0)\}$, συνεπώς το ιδιοδιάνυσμα του T που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή $\lambda_2 = 3$ είναι το

$$\phi_{\mathrm{B}}^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = x.$$

Παρατηρούμε ότι το σύνολο $\mathrm{B}' = \{-8 + x^3, -4 + x^2, -2 + x, x\}$ αποτελεί μία βάση του $\mathsf{P}_3(\mathbb{R})$ από ιδιοδιανύσματα του τελεστή T και ότι

$$[T]_{\mathrm{B}'} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Άσκηση

Έστω $\phi_{\mathrm{B}} : V \to \mathbb{R}^n$ ο ισομορφισμός

$$\phi_{\mathrm{B}}(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i) = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix},$$

όπου $\mathrm{B} = \{x_1, \ldots, x_n\}$ μία διατεταγμένη βάση του V και έστω $T : V \to V$ γραμμικός τελεστής με πίνακα $A = [T]_{\mathrm{B}}$. Δείξτε ότι το διάνυσμα $v \in V$ είναι ένα ιδιοδιάνυσμα του T με αντίστοιχη ιδιοτιμή λ εάν κα μόνο εάν το $\phi_{\mathrm{B}}(v)$ είναι ένα ιδιοδιάνυσμα του πίνακα A με αντίστοιχη ιδιοτιμή λ.

5.3 Κριτήριο διαγωνιοποίησης

Στην παράγραφο αυτή θα διατυπώσουμε ένα κριτήριο για το κατά πόσον ένας γραμμικός τελεστής $T \in \mathcal{L}(V)$ είναι διαγωνιοποιήσιμος.

Θεώρημα 5.6. *Έστω $T \in \mathcal{L}(V)$ και $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ ιδιοτιμές του T οι οποίες είναι διαφορετικές μεταξύ τους (διακεκριμμένες). Αν $x_1, x_2, \ldots, x_k$ είναι ιδιοδιανύσματα του T τέτοια ώστε η ιδιοτιμή λ_j να αντιστοιχεί στο διάνυσμα x_j ($1 \le j \le k$) τότε το σύνολο $\{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$ είναι γραμμικώς ανρξάρτητο.*

Απόδειξη. Άσκηση - Με επαγωγή επί του k. □

Πόρισμα 5.2. *Έστω $\dim V = n$ και $T \in \mathcal{L}(V)$. Εάν ο T έχει n διακεκριμμένες ιδιοτιμές τότε είναι διαγωνιοποιήσιμος.*

Απόδειξη. Προκύπτει από τα Θεώρηματα 5.3 και 5.6. (Άσκηση) □

Παράδειγμα

Έστω $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ με αντίστοιχο τελεστή $L_A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$. Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του A (άρα και του L_A) είναι

$$f(t) = \det \begin{pmatrix} 2-t & 2 \\ 2 & 2-t \end{pmatrix} = (2-t)^2 - 4 = t(t-2).$$

Οι ιδιοτιμές του A είναι οι $\lambda_1 = 0$ και $\lambda_2 = 2$. Επειδή $\dim \mathbb{R}^2 = 2$ και οι δύο ιδιοτιμές είναι διακεκριμμένες, τότε λόγω του προηγούμενος πορίσματος ο A (άρα και ο L_A)

είναι διαγωνιοποιήσιμος.

Παρατηρήσεις

1) Το αντίστροφο του Πορίσματος 5.2 δεν ισχύει γενικά. Για παράδειγμα, αν $T = \mathsf{Id}_V : V \to V$ ο ταυτοτικός τελεστής, τότε ο T είναι διαγωνιοποιήσιμος αν και έχει μόνο μία ιδιοτιμή την $\lambda = 1$.

2) Από τα παραπάνω διαπιστώνουμε ότι το πρόβλημα της διαγωνιοποίησης εξαρτάται άμεσα από το σώμα $\mathbb{F}$ επί του οποίου ορίζεται ο διανυσματικός χώρος V. Το κατά πόσον ένα πολυώνυμο $f(x)$ (εν προκειμένω το χαρακτηριστικό πολυώνυμο ενός τελεστή $T \in \mathcal{L}(V)$) γράφεται ως γινόμενο πρωτοβάθμιων παραγόντων εξαρτάται από το αν $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ ή $\mathbb{F} = \mathbb{C}$.

Για παράδειγμα, είναι $x^2 - 1 = (x+1)(x-1)$ επί του $\mathbb{R}$ κάτι το οποίο δεν συμβαίνει για το πολυώνυμο $(x^2+1)(x-2)$. Βέβαια αν $\mathbb{F} = \mathbb{C}$ τότε είναι $(x^2+1)(x-2) = (x+i)(x-i)(x-2)$, άρα το πολυώνυμο έχει διακεκριμμένες ιδιοτιμές επί του $\mathbb{C}$.

Θεώρημα 5.7. *Έστω V διανυσματικός χώρος επί του $\mathbb{F}$ και $T \in \mathcal{L}(V)$. Αν ο T είναι διαγωνιοποιήσιμος τότε το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του T γράφεται ως γινόμενο πρωτοβάθμιων παραγόντων.*

Απόδειξη. Από την υπόθεση υπάρχει μία βάση Β του V τέτοια ώστε

$$[T]_{\mathrm{B}} = D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Συνεπώς, το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του T είναι το

$$\begin{aligned} f(t) &= \det(D - \lambda I_n) = \det \begin{pmatrix} \lambda_1 - t & & & \\ & \lambda_2 - t & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n - t \end{pmatrix} \\ &= (\lambda_1 - t)\cdots(\lambda_n - t) = (-1)^n (t-\lambda_1)\cdots(t-\lambda_n). \end{aligned}$$

□

Από το παραπάνω θεώρημα προκύπτει αν ο τελεστής $T \in \mathcal{L}(V)$ δεν έχει $n = \dim V$ διακεκριμμένες ιδιοτιμές, τότε το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του T θα πρέπει να έχει ρίζες με πολλαπλότητα.

Ορισμός 5.6. *Έστω λ μία ιδιοτιμή ενός τελεστή ή πίνακα με χαρακτηριστικό πολυώνυμο $f(t)$. Η πολλαπλότητα (multiplicity) της λ είναι ο μεγαλύτερος ακέραιος k τέτοιος ώστε $(t-\lambda)^k$ να είναι παράγοντας του $f(t)$.*

Σημείωση

Καμμιά φορά ο παραπάνω αριθμός ονομάζεται και αλγεβρική πολλαπλότητα της λ.

Παράδειγμα

Έστω

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του A είναι $f(t) = -(t-1)^2(t-2)$. Η ιδιοτιμή $\lambda_1 = 1$ έχει πολλαπλότητα 2 και η $\lambda_2 = 2$ έχει πολλαπλότητα 1.

Η παρακάτω έννοια είναι κεντρική όχι μόνο στο θέμα της διαγωνιοποίησης αλλά και γενικότερα στη θεωρία τελεστών.

Ορισμός 5.7. *Έστω $T \in \mathcal{L}(V)$ και λ μία ιδιοτιμή του T. Το σύνολο $E_\lambda = \{x \in V : T(x) = \lambda x\} = \mathrm{Ker}(T - \lambda \mathsf{Id}_V)$ ονομάζεται ο ιδιόχωρος (eigenspace) του T που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή λ. Ο ιδιόχωρος ενός πίνακα A είναι ο ιδιόχωρος του τελεστή L_A.*

Είναι σαφές ότι το σύνολο E_λ είναι ένας υπόχωρος του V ο οποίος περιέχει το μηδενικό διάνυσμα καθώς και όλα τα ιδιοδιανύσματα του T που αντιστοιχούν στην ιδιοτιμή λ. Η διάσταση $\dim(E_\lambda)$ ισούται με τον αριθμό των γραμμικώς ανεξάρτητων ιδιοδιανυσμάτων του τελεστή T που αντιστοιχούν στην ιδιοτιμή λ. Καμμιά φορά αναφέρεται και ως γεωμετρική πολλαπλότητα (geometric multiplicity) της λ.

Λήμμα 5.1. *Έστω $M \in \mathsf{M}_{n\times n}(\mathbb{F})$ τέτοιος ώστε*

$$M = \begin{pmatrix} M_1 & N \\ 0 & M_2 \end{pmatrix},$$

όπου M_1, M_2 είναι τετραγωνικοί πίνακες. Τότε $\det(M) = \det(M_1) \cdot \det(M_2)$.

Απόδειξη. Άσκηση. □

Το παρακάτω θεώρημα συνδέει την πολλαπλότητα μιας ιδιοτιμής λ με την διάσταση του ιδιόχωρου E_λ.

Θεώρημα 5.8. *Έστω V διανυσματικός χώρος πεπερασμένης διάστασης και $T \in \mathcal{L}(V)$. Αν λ είναι μία ιδιοτιμή του T με πολλαπλότητα k, τότε $1 \leq \dim(E_\lambda) \leq k$.*

Απόδειξη. Έστω $\{x_1, \ldots, x_p\}$ μία διατεταγμένη βάση του E_λ την οποία στη συνέχεια επεκτείνουμε σε μία βάση $\mathrm{B} = \{x_1, \ldots, x_p, x_{p+1}, \ldots, x_n\}$ του V. Έστω $A = [T]_{\mathrm{B}}$. Επειδή κάθε διάνυσμα x_i $(1 \leq i \leq p)$ είναι ένα ιδιοδιάνυσμα του T που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή λ, θα είναι

$$A = \begin{pmatrix} \lambda I_p & N \\ 0 & M \end{pmatrix}.$$

Λόγω του Λήμματος 5.1 το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του T είναι

$$f(t) = \det(A - tI_n) = \det((\lambda - t)I_p) \cdot \det(M - \lambda I_{n-p}) = (-1)^p(\lambda - t)^p g(t),$$

όπου $g(t)$ κάποιο πολυώνυμο. Επειδή το $(\lambda - t)^p$ είναι παράγοντας του $f(t)$, η πολλαπλότητα της λ είναι τουλάχιστον p (μιας και το λ μπορεί ενδεχομένως να είναι και ρίζα του $g(t)$). Επειδή $\dim(E_\lambda) = p$ προκύπτει ότι $\dim(E_\lambda) \leq k$. $\square$

Το κριτήριο διαγωνιοποίησης θα βασιστεί στο παρακάτω θεώρημα την απόδειξη του οποίου παραλείπουμε.

Θεώρημα 5.9. *Έστω V διανυσματικός χώρος πεπερασμένης διάστασης και $T \in \mathcal{L}(V)$ τέτοιος ώστε το χαρακτηριστικό του πολυώνυμο να γράφεται ως γινόμενο πρωτοβάθμιων παραγόντων. Έστω $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ οι διακεκριμμένες ιδιοτιμές του T. Τότε*

1) Ο T είναι διαγωνιοποιήσιμος εάν και μόνο εάν για κάθε $i = 1, \ldots, k$ η πολλαπλότητα της λ_i ισούται με $\dim(E_{\lambda_i})$.

2) Αν ο T είναι διαγωνιοποιήσιμος και B_i είναι μία διατεταγμένη βάση του ιδιόχωρου E_{λ_i} $(i = 1, \ldots, n)$ τότε το σύνολο $\mathrm{B} = \mathrm{B}_1 \bigcup \mathrm{B}_2 \bigcup \cdots \bigcup \mathrm{B}_k$ είναι μία διατεταγμένη βάση του V από ιδιοδιανύσματα του T.

Κατόπιν αυτού καταλήγουμε στο εξής:

Κριτήριο διαγωνιοποίησης

Έστω $T \in \mathcal{L}(V)$ ένας γραμμικός τελεστής επί του πεπερασμένης διάστασης διανυσματικού χώρου V. Τότε ο T είναι διαγωνιοποιήσιμος εάν και μόνο εάν ισχύουν οι παρακάτω δύο συνθήκες ταυτόχρονα.

1) Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του T γράφεται ως γινόμενο πρωτοβάθμιων παραγόντων.

2) Για κάθε ιδιοτιμή λ του T, η πολλαπλότητά της ισούται με $n - \mathrm{rk}(T - \lambda \mathsf{Id}_V)$.

Παρατήρηση
Αν μια ιδιοτιμή λ έχει πολλαπλότητα 1 τότε η συνθήκη 2) ικανοποιείται αυτομάτως.

Εάν A είναι ένας $n \times n$ πίνακας ο οποίος είναι διαγωνοποιήσιμος και Q είναι ο πίνακας ο οποίος έχει ως στήλες τα ιδιοδιανύσματα του A, τότε ο πίνακας $Q^{-1}AQ = D$ είναι διαγώνιος.

Παραδείγματα
1) Έστω

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathsf{M}_{3\times 3}(\mathbb{R}).$$

Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του A είναι $f(t) = -t^3$ του οποίου η μοναδική ιδιοτιμή είναι $\lambda = 0$, με πολλαπλότητα 3. Τότε $E_\lambda = \mathrm{Ker}(A - \lambda I_3) = \mathrm{Ker}(A) = \mathrm{span}\{(1,0,0)\}$ (γιατί;). Επειδή $\dim(E_\lambda) = 1 \neq 3$, ο πίνακας A δεν είναι διαγωνιοποιήσιμος.

2) Έστω $T : \mathsf{P}_2(\mathbb{R}) \to \mathsf{P}_2(\mathbb{R})$ με $T(f(x)) = f(0) + f(1)(x + x^2)$. Θα ελέγξουμε αν ο T είναι διαγωνιοποιήσιμος και σε θετική περίπτωση θα βρούμε μια βάση του V από ιδιοδιανύσματα.
Θεωρούμε την κανονική διατεταγμένη βάση $\mathrm{B} = \{1, x, x^2\}$ του $\mathsf{P}_2(\mathbb{R})$. Ο πίνακας του τελεστή T ως προς την βάση B είναι

$$A = [T]_{\mathrm{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

του οποίου το χαρακτηριστικό πολυώνυμο είναι $f(t) = t(t-1)(t-2)$. Υπάρχουν τρεις ιδιοτιμές $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 1, \lambda_3 = 2$ και η κάθε μία έχει πολλαπλότητα 1, άρα ο A (και ο T) είναι διαγωνιοποιήσιμος. Βρίσκουμε ότι είναι $E_{\lambda_1} = \mathrm{span}\{(0,1,-1)\}$, $E_{\lambda_2} = \mathrm{span}\{(1,-1,-1)\}$ και $E_{\lambda_3} = \mathrm{span}\{(0,1,1)\}$. Τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα του τελεστή T είναι

$$\phi_{\mathrm{B}}^{-1}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = x - x^2,\ \phi_{\mathrm{B}}^{-1}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = 1 - x - x^2,\ \phi_{\mathrm{B}}^{-1}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = x + x^2.$$

Επιπλέον, αν $Q = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, τότε $Q^{-1}AQ = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

3) Έστω $A = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \in \mathsf{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$. Να υπολογιστεί ο πίνακας A^n.

Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του A είναι $f(t) = (t-1)(t-2)$, με ιδιοτιμές $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2$. Είναι $E_{\lambda_1} = \text{span}\{(2,-1)\}, E_{\lambda_2} = \text{span}\{(1,-1)\}$ οπότε το σύνολο $\{(2,-1),(1,-1)\}$ είναι μια βάση του $\mathbb{R}^2$ από ιδιοδιανύσματα του A. Αν $Q = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$, τότε $Q^{-1}AQ = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, συνεπώς $A = Q\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}Q^{-1}$, άρα

$$A^n = Q\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}^n Q^{-1} = Q\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix}Q^{-1}.$$

Επειδή $Q^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$, προκύπτει ότι

$$A^n = \begin{pmatrix} 2-2^n & 2-2^{n+1} \\ -1+2^n & -1+2^{n+1} \end{pmatrix}.$$

4) Έστω $T : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$, $T(z,w) = (z+iw, iz+w)$. Ο τελεστής T ορίζεται επί του διανυσματικού χώρου $\mathbb{C}^2$ διάστασης 2 επί του $\mathbb{C}$. Η κανονική διατεταγμένη βάση του $\mathbb{C}^2$ είναι η $\mathrm{B} = \{(1,0),(0,1)\}$. Είναι

$$\begin{aligned} T(1,0) &= (1,i) = 1(1,0) + i(0,1) \\ T(0,1) &= (i,1) = i(1,0) + (1,0) \end{aligned}$$

άρα $A = [T]_{\mathrm{B}} = \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix}$. Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του A είναι

$$f(t) = \det(A - \lambda I_2) = \det\begin{pmatrix} 1-t & i \\ i & 1-t \end{pmatrix} = t^2 - 2t + 2$$

με ιδιοτιμές $\lambda_1 = 1+i, \lambda_2 = 1-i$. Συνεπώς ο T είναι διαγωνιοποιήσιμος. Για $\lambda_1 = 1+i$ είναι $\text{Ker}(A - \lambda_1 I_2) = \text{Ker}\begin{pmatrix} -i & i \\ i & -i \end{pmatrix} = \text{span}\{(1,1)\}$. Για $\lambda_2 = 1-i$ είναι $\text{Ker}(A - \lambda_2 I_2) = \text{Ker}\begin{pmatrix} i & i \\ i & i \end{pmatrix} = \text{span}\{(1,-1)\}$. Το σύνολο $\Gamma = \{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\}$ είναι μία βάση του $\mathbb{C}^2$ από ιδιοδιανύσματα του T. Ως προς αυτήν τη βάση είναι

$$[T]_\Gamma = \begin{pmatrix} 1+i & 0 \\ 0 & 1-i \end{pmatrix}.$$

5) Έστω

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix} \in \mathsf{M}_{3\times 3}(\mathbb{R}).$$

Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του A είναι $f(t) = -(t-5)(t-3)^2$. Οι ιδιοτιμές είναι $\lambda_1 = 5$ πολλαπλότητας 1 και $\lambda_2 = 3$ πολλαπλότητας 2. Το κριτήριο διαγωνιοποίησης ικανοποιείται για την ιδιοτιμή $\lambda_1 = 5$. Εξετάζουμε τώρα την ιδιοτιμή $\lambda_2 = 3$. Είναι

$$\begin{aligned} 3 - \mathrm{rk}(A - \lambda_2 I_3) &= 3 - \mathrm{rk}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= 3 - \mathrm{rk}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 3 - \mathrm{rk}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 3 - 1 = 2 \end{aligned}$$

που ισούται με την πολλαπλότητα της λ_2. Συνεπώς, ο A είναι διαγωνιοποιήσιμος και όμοιος με τον πίνακα

$$D = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Ο αναγνώστης καλείται να πιστοποιήσει ότι το σύνολο $\mathrm{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ αποτελεί μία βάση του $\mathbb{R}^3$ από ιδιοδιανύσματα του A.

Όταν ένας τελεστής $T \in \mathcal{L}(V)$ είναι διαγωνιοποιήσιμος τότε ο V γράφεται ως ευθύ άθροισμα των υποχώρων του. Συγκεκριμένα ισχύει το εξής.

Θεώρημα 5.10. *Έστω V διανυσματικός χώρος πεπερασμένης διάστασης και $T \in \mathcal{L}(V)$. Τότε ο V είναι διαγωνιοποιήσιμος εάν και μόνο εάν ο V ισούται με το ευθύ άθροισμα των ιδιόχωρων του T.*

Παράδειγμα

Θεωρούμε τον πίνακα

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

του προηγούμενου παραδείγματος.

Είναι $E_{\lambda_1} = \text{span}\{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}\}$ και $E_{\lambda_2} = \text{span}\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\}$. Ο τελεστής $L_A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ είναι διαγωνιοποιήσιμος, άρα $\mathbb{R}^3 = E_{\lambda_1} \oplus E_{\lambda_2}$.

5.4 Ασκήσεις

1) Έστω $a, b, c \in \mathbb{R}$. Να βρεθεί η συνθήκη που πρέπει να ικανοποιούν τα a, b και c έτσι ώστε ο πίνακας

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ a & 2 & 0 \\ b & c & -1 \end{pmatrix}$$

να είναι όμοιος με έναν διαγώνιο πίνακα.

2) Να βρεθεί ο πίνακας A^{100}, όπου

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

3) Να δειχθεί ότι ο ακόλουθος πίνακας δεν είναι όμοιος με έναν διαγώνιο πίνακα:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 2 \\ 1 & -3 & 1 \end{pmatrix}.$$

4) Αν ο πίνακας

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ x & 1 & y \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

έχει τρία γραμμικώς ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα, τότε να δειχθεί ότι $x + y = 0$.

5) Έστω $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ για τον οποίο ισχύει $T(x, y, z) = (0, x, y)$. Να βρεθούν τα χαρακτηριστικά πολυώνυμα των τελεστών T, T^2, T^3.

6) Έστω $T : \mathsf{M}_{n\times n}(\mathbb{F}) \to \mathsf{M}_{n\times n}(\mathbb{F}),\ T(A) = A^t$.

   i) Να δειχθεί ότι $T \in \mathcal{L}(\mathsf{M}_{n\times n}(\mathbb{F}))$.

   ii) Να δειχθεί ότι οι μόνες ιδιοτιμές του T είναι οι ± 1.

iii) Να βρεθούν οι πίνακες οι οποίοι είναι ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν στις ιδιοτιμές 1 και -1, αντίστοιχα.

7) Ποιοί από τους παρακάτω πίνακες είναι διαγωνιοποιήσιμοι; Σε θετική περίπτωση να βρεθεί ένας πίνακας Q έτσι ώστε ο $Q^{-1}AQ$ να είναι ένας διαγώνιος πίνακας.

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 7 & -4 & 0 \\ 8 & -5 & 0 \\ 6 & -6 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Βιβλιογραφία

[1] S. Axler: *Linear Algebra Done Right*, 2nd Edition Springer, 1997.

[2] S. H. Friedberg - A. J. Insel - L. E. Spence: *Linear Algebra*, 4th Edition, Prentice Hall, 2003.

[3] Y. Katznelson - Y. R, Katznelson: *A (Terse) Introduction to Linear Algebra*, American Mathematical Society, 2008.

[4] S. Lipschutz - M. Lipson: *Linear Algebra*, 3rd Edition, Schaum's Outlines, 2003.

[5] H. E. Rose: *Linear Algebra: A Pure Mathematical Approach*, Birkhauser, 2002.

[6] F. Zhang: *Linear Algebra. Challenging Problems for Students*, 2nd Edition, The Johns Hopkings University Press, 2009.