Τίτλος Μαθήματος : Γραμμική Άλγεβρα Ι

Ενότητα: Στοιχειώδεις πράξεις πινάκων και γραμμικά συστήματα

Όνομα Καθηγητή: Ανδρέας Αρβανιτογεώργος

Τμήμα: Μαθηματικών

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Πατρών**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Κεφάλαιο 3

Στοιχειώδεις πράξεις πινάκων και γραμμικά συστήματα.

Σκοπός του κεφαλαίου αυτού είναι να περιγράψουμε κάποιες πράξεις πινάκων, οι οποίες έχουν την ιδιότητα να διατηρούν την τάξη και την ομοιότητα πινάκων. Στη συνέχεια, θα κάνουμε εφαρμογή αυτών καθώς και της θεωρίας των γραμμικών απεικονίσεων του προηγούμενου κεφαλαίου σε ένα σημαντικό θέμα της Γραμμικής Άλγεβρας που είναι η επίλυση συστημάτων γραμμικών εξισώσεων. Ο χαρακτήρας του κεφαλαίου αυτού είναι έντονα υπολογιστικός - αλγοριθμικός.

3.1 Στοιχειώδεις πίνακες

Ορισμός 3.1. *Έστω A ένας $m \times n$ πίνακας. Οι παρακάτω πράξεις στις γραμμές (στήλες) του A ονομάζονται <u>στοιχειώδεις πράξεις</u> (elementary operations) στις γραμμές (στήλες).*

i) Εναλλαγή δύο γραμμών (στηλών) του A.

ii) Πολλαπλασιασμός μίας γραμμής (στήλης) του A με έναν μη μηδενικό αριθμό.

iii) Πολλαπλασιασμός μίας γραμμής (στήλης) του A με έναν αριθμό και πρόσθεσή της σε μία άλλη γραμμή (στήλη).

Παράδειγμα

Έστω $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 7 & 4 \\ -1 & -2 & 4 & 7 \end{pmatrix}$. Αντιμεταθέτοντας την πρώτη και την δεύτερη γραμμή του A προκύπτει ο πίνακας

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 7 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & -2 & 4 & 7 \end{pmatrix}.$$

Θα γράψουμε την παραπάνω πράξη με το αποτέλεσμα της συμβολικά ως εξής:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 7 & 4 \\ -1 & -2 & 4 & 7 \end{pmatrix} \begin{array}{l} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \end{array} \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & 7 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & -2 & 4 & 7 \end{pmatrix} \begin{array}{l} R_1 + R_2 \\ \\ \\ \end{array}.$$

Ορισμός 3.2. *Ένας $n \times n$ <u>στοιχειώδης πίνακας</u> είναι ένας πίνακας ο οποίος προκύπτει από τον ταυτοτικό πίνακα I_n με στοιχειώδεις πράξεις.*

Παραδείγματα
Οι παρακάτω στοιχειώδεις πίνακες προκύπτουν από τον I_3.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \end{array} \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} R_2 \\ R_1 \\ \\ \end{array},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \end{array} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} -2R_3 + R_1 \\ \\ \\ \end{array}.$$

Θεώρημα 3.1. *Έστω $A \in \mathsf{M}_{m\times n}(\mathbb{F})$ και B ένας πίνακας που προκύπτει από τον A με μία στοιχειώδη πράξη στις γραμμές (στήλες). Τότε υπάρχει ένας $m \times m$ ($n \times n$) στοιχειώδης πίνακας E τέτοιος ώστε $B = EA$ ($B = AE$). Επιπλέον, ο E προκύπτει από τον I_m (I_n) με την ίδια στοιχειώδη πράξη στις γραμμές (στήλες) που προέκυψε ο B από τον A. Αντίστροφα, εάν E είναι ένας στοιχειώδης $m \times m$ ($n \times n$) πίνακας, τότε ο πίνακας EA (AE) μπορεί να προκύψει από τον A με την ίδια στοιχειώδη πράξη στις γραμμές (στήλες) που προέκυψε ο E από τον ταυτοτικό I_m (I_n).*

Παράδειγμα
Έστω

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & -1 & 3 \\ 4 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{array}{l} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \end{array} \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{array}{l} R_2 \\ R_1 \\ \\ \end{array} = B.$$

Τότε αν

$$I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \end{array} \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} R_2 \\ R_1 \\ \\ \end{array} = E$$

τότε $B = EA$.

Θεώρημα 3.2. *Οι στοιχειώδεις πίνακες είναι αντιστρέψιμοι και ο αντίστροφος ενός στοιχειώδους πίνακα είναι στοιχειώδης πίνακας του ίδιου τύπου (δηλ. προκύπτει με την ίδια στοιχειώδη πράξη).*

3.2 Υπολογισμός του αντιστρόφου ενός πίνακα

Ο υπολογισμός του αντιστρόφου ενός πίνακα στηρίζεται στο εξής θεώρημα, όχι ιδιαίτερα εύκολο στην απόδειξη.

Θεώρημα 3.3. *Κάθε αντιστρέψιμος πίνακας ισούται με ένα γινόμενο στοιχειωδών πινάκων.*

Ορισμός 3.3. *Έστω A και B $m \times n$ και $m \times p$ πίνακες αντίστοιχα. Ο <u>επαυξημένος</u> (augmented) πίνακας $(A|B)$ είναι ο $m \times (n+p)$ πίνακας $(A\ B)$.*

Παράδειγμα
Έστω $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$. Τότε $(A|B) = \left(\begin{array}{cc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 1 & 0 & 3 \end{array}\right)$.

Άσκηση
Έστω A, B πίνακες με n γραμμές και M ένας $m \times n$ πίνακας. Τότε $M(A|B) = (MA|MB)$.

Έστω τώρα A ένας αντιστρέψιμος πίνακας. Θεωρούμε τον πίνακα $B = (A|I_n)$. Τότε από την προηγούμενη άσκηση είναι

$$A^{-1}B = (A^{-1}A|A^{-1}I_n) = (I_n|A^{-1}). \tag{3.1}$$

Από το Θεώρημα 3.3 ο πίνακας A^{-1} γράφεται ως γινόμενο στοιχειωδών πινάκων $A^{-1} = E_p E_{p-1} \cdots E_1$, άρα η (3.1) γράφεται ως

$$E_p E_{p-1} \cdots E_1 (A|I_n) = (I_n|A^{-1}). \tag{3.2}$$

Συνεπώς, εάν ο A είναι ένας $n \times n$ αντιστρέψιμος πίνακας, τότε ο πίνακας $(A|I_n)$ είναι δυνατόν να μετασχηματιστεί στον πίνακα $(I_n|A^{-1})$ χρησιμοποιώντας έναν πεπερασμένο αριθμό από στοιχειώδεις πράξεις στις γραμμές.

Επίσης, προκύπτει ότι εάν ο A είναι ένας $n \times n$ αντιστρέψιμος πίνακας και ο πίνακας $(A|I_n)$ μετασχηματιστεί σε έναν πίνακα της μορφής $(I_n|B)$ με στοιχειώδεις πράξεις στις γραμμές, τότε $B = A^{-1}$.

Παραδείγματα

1) Να εξετασθεί αν ο πίνακας $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 12 \end{pmatrix}$ είναι αντιστρέψιμος.

Έχουμε

$$(A|I_2) = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 4 & 1 & 0 \\ 3 & 12 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{c} R_1 \\ R_2 \end{array} \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ R_2 - 3R_1 \end{array}.$$

Επειδή ο πίνακας $\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ δεν είναι ο μοναδιαίος, ο πίνακας A δεν είναι αντιστρέψιμος.

2) Να εξεταστεί αν ο πίνακας $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ είναι αντιστρέψιμος.

Έχουμε

$$(B|I_3) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ R_1 + R_2 \\ -R_1 + R_3 \end{array}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & -2 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \frac{1}{3}R_2 \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 1 \end{array}\right) \begin{array}{c} -2R_2 + R_1 \\ \\ 2R_2 + R_3 \end{array}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ \\ \frac{1}{2}R_3 \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{6} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \end{array}\right).$$

Συνεπώς, ο B είναι αντιστρέψιμος και

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

3.3 Τάξη ενός πίνακα και μιας γραμμικής απεικόνισης

Ίσως, η πιο σημαντική αναλλοίωτη ποσότητα μιας γραμμικής απεικόνισης είναι η τάξη της. Ο υπολογισμός της ανάγεται στον υπολογισμό της τάξης του αντίστοιχου πίνακα.

Ορισμός 3.4. *1) Έστω $T : V \to W$ γραμμική απεικόνιση. Η τάξη (rank) της T είναι η διάσταση της εικόνας της, δηλαδή $\mathrm{rk}(T) = \dim(\mathrm{ImT})$.*

2) Έστω $A \in \mathsf{M}_{m\times n}(\mathbb{F})$. Η τάξη του A είναι η τάξη της γραμμικής απεικόνισης $L_A : \mathbb{F}^n \to \mathbb{F}^m,\ L_A(x) = AX$.

Πρόταση 3.1. *Έστω $T \in \mathcal{L}(V,W)$ και B, Γ διατεταγμένες βάσεις των V, W. Τότε $\mathrm{rk}(T) = \mathrm{rk}([T]_{\mathrm{B}}^{\Gamma})$.*

Το ερώτημα συνεπώς που πρέπει να απαντήσουμε είναι, πώς βρίσκουμε την τάξη ενός πίνακα. Χρειαζόμαστε ένα τεχνικό μεν αποτέλεσμα, αλλά ιδιαίτερα χρήσιμο στην γραμμική άλγεβρα.

Πρόταση 3.2. *Έστω A ένας $m \times n$ πίνακας. Αν P, Q είναι αντιστρέψιμοι $m \times n$ και $n \times n$ πίνακες αντίστοιχα, τότε ισχύουν τα εξής:*

1) $\mathrm{rk}(AQ) = \mathrm{rk}(A)$.

2) $\mathrm{rk}(PA) = \mathrm{rk}(A)$.

3) $\mathrm{rk}(PAQ) = \mathrm{rk}(A)$.

Απόδειξη. Θα αποδείξουμε την πρώτη σχέση. Είναι

$$\mathrm{Im}(L_{AQ}) = \mathrm{Im}(L_A \circ L_Q) = (L_A \circ L_Q)(\mathbb{F}^n) = L_A(L_Q(\mathbb{F}^n)) = L_A(\mathbb{F}^n) = \mathrm{Im}(L_A),$$

όπου η προτελευταία ισότητα προέκυψε επειδή ο Q είναι αντιστρέψιμος, άρα η L_Q είναι επί. Συνεπώς,

$$\mathrm{rk}(AQ) = \dim(\mathrm{Im}(L_{AQ})) = \dim(\mathrm{Im}(L_A)) = \mathrm{rk}(A).$$

□

Πόρισμα 3.1. *Η τάξη ενός πίνακα παραμένει αναλλοίωτη κάτω από στοιχειώδεις μετασχηματισμούς σε έναν πίνακα (είτε στις γραμμές είτε στις στήλες του).*

Το κεντρικό αποτέλεσμα είναι το παρακάτω θεώρημα:

Θεώρημα 3.4. *Η τάξη ενός πίνακα ισούται με το μέγιστο πλήθος των γραμμικώς ανεξάρτητων στηλών του, είναι δηλαδή η διάσταση του υπόχωρου που παράγεται από τις στήλες του.*

Απόδειξη. Έστω $A \in \mathsf{M}_{m\times n}(\mathbb{F})$. Τότε

$$\mathrm{rk}(A) = \mathrm{rk}(L_A) = \dim(\mathrm{Im}(L_A)).$$

Έστω $\mathrm{B} = \{e_1, \ldots, e_n\}$ η κανονική διατεταγμένη βάση του $\mathbb{F}^n$. Τότε

$$\mathrm{Im}(L_A) = \mathrm{spam}\{L_A(e_1), \ldots, L_A(e_n)\}.$$

Αλλά $L_A(e_1) = Ae_1 = A\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = A^{(1)}$ (η πρώτη στήλη του A) και αντίστοιχα για τα $L_A(e_2), \ldots, L_A(e_n)$. Συνεπώς, $\mathrm{rk}(A) = \dim \mathrm{Im}(L_A) = \dim(\mathrm{span}\{A^{(1)}, \ldots, A^{(n)}\})$. □

Παράδειγμα

1) Έστω $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$. Παρατηρούμε ότι οι δύο πρώτες στήλες του A είναι γραμμικώς ανεξάρτητες και για την τρίτη στήλη $A^{(3)}$ ισχύει $A^{(3)} = 3A^{(1)} + A^{(2)}$. Συνεπώς,

$$\mathrm{rk}(A) = \dim(\mathrm{span}\{A^{(1)}, A^{(2)}, A^{(3)}\}) = \dim(\mathrm{span}\{A^{(1)}, A^{(2)}\}) = 2$$

2) Αν και οι στοιχειώδεις πράξεις σε έναν πίνακα μπορούν να τον απλουστεύσουν προκειμένου να βρούμε την τάξη του, δεν είναι πάντα σαφής ο εντοπισμός του μέγιστου πλήθους των γραμμικών ανεξάρτητων στηλών. Για παράδειγμα, αν εφαρμόσουμε στοιχειώδεις πράξεις στις γραμμές του πίνακα

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \\ -1 & 0 & -3 & -1 \end{pmatrix}$$

θα προκύψει ο πίνακας

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Δεν είναι εντελώς σαφές ότι το μέγιστο πλήθος γραμμικώς ανεξάρτητων στηλών είναι εν προκειμένω 2. Συνεπώς, χρειαζόμαστε ένα τελευταίο αποτέλεσμα το οποίο θα μας οδηγεί με ασφαλή και άμεσο τρόπο στον εντοπισμό της τάξης ενός πίνακα.

Θεώρημα 3.5. *Έστω A ένας $m \times n$ πίνακας τάξης r. Τότε $r \leq m$ και $r \leq n$ και μετά από στοιχειώδεις πράξεις στις γραμμές και στις στήλες, ο A είναι δυνατόν να μετασχηματιστεί σε έναν πίνακα της μορφής*

$$D = \begin{pmatrix} I_r & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix},$$

όπου $I_r = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{pmatrix}$.

Πόρισμα 3.2. *Έστω A ένας $m \times n$ πίνακας. Τότε*

1) $\mathrm{rk}(A^t) = \mathrm{rk}(A)$

2) Η τάξη του A ισούται με το μέγιστο πλήθος των γραμμικώς ανεξάρτητων γραμμών του.

Ορισμός 3.5. *Ένας πίνακας ονομάζεται <u>κλιμακωτός</u> (echelon) εάν <u>δεν</u> περιέχει δύο διαδοχικές γραμμές της μορφής*

$$0\ 0\ \cdots\ x_1\ x_2\ \cdots$$

$$0\ 0\ \cdots\ y_1\ y_2\ \cdots$$

με $y_1 \neq 0$.

Δηλαδή κάθε γραμμή αρχίζει με μηδενικά τα οποία αυξάνουν όσο προχωράμε προς την τελευταία γραμμή και όλες οι υπόλοιπες γραμμές περιέχουν ενδεχομένως μηδενικά.

Παραδείγματα

$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ κλιμακωτός, $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ όχι κλιμακωτός,

$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \end{pmatrix}$ όχι κλιμακωτός, $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 4 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ κλιμακωτός.

Θεώρημα 3.6. *Κάθε πίνακας είναι δυνατόν να μετασχηματιστεί σε κλιμακωτή μορφή, χρησιμοποιώντας στοιχειώδεις πράξεις.*

Πρόταση 3.3. *Αν ένας πίνακας A είναι κλιμακωτός τότε η τάξη του ισούται με το πλήθος των μη μηδενικών γραμμών του.*

Παραδείγματα

1) Έστω $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. Είναι

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -2 & -2 \end{pmatrix}.$$

Ο τελευταίος πίνακας είναι κλιμακωτός, άρα $\mathrm{rk}(A) = 2$.

2) Έστω $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Είναι

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & -3 & -5 & -3 \\ 0 & -3 & -2 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & -3 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ο τελευταίος πίνακας είναι κλιμακωτός, άρα $\mathrm{rk}(B) = 3$.

3) Να προσδιορίσετε κατά πόσον τα διανύσματα $(1,1,2), (2,3,1)$ και $(4,5,5)$ του $\mathbb{R}^3$ είναι γραμμικώς εξαρτημένα.

Θεωρούμε τον πίνακα $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 5 \\ 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}$ (δεν έχει σημασία αν βάλλουμε τα διανύσματα ως στήλες ή ως γραμμές του πίνακα αυτού). Μετά από γραμμοπράξεις προκύπτει ότι

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 5 \\ 2 & 1 & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

άρα $\mathrm{rk}(A) = 2$, οπότε το μέγιστο πλήθος γραμμικώς ανεξάρτητων στηλών είναι 2, άρα τα διανύσματα είναι γραμμικώς εξαρτημένα.

4) Έστω $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & -4 & -1 \end{pmatrix}$ και η αντίστοιχη γραμμική απεικόνιση $T = L_A : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ με $L_A(x) = AX$. Θέλουμε να βρούμε τους υποχώρους $\mathrm{Ker}T, \mathrm{Im}T$ καθώς και την τάξη $\mathrm{rk}(T) = \mathrm{rk}(A)$.

Πρώτα φέρνουμε τον πίνακα A σε κλιμακωτή μορφή μιας και όλοι οι υπολογισμοί μας θα βασιστούν σε αυτό. Είναι

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & -4 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -3 & -2 \\ 1 & 3 & -4 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -3 & -2 \\ 0 & 2 & -6 & -4 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = B.$$

Άρα $\mathrm{rk}(A) = \mathrm{rk}(B) = 2$, οπότε $\mathrm{rk}(T) = 2$. Επιπλέον

$$\mathrm{Im}(L_B) = \mathrm{span}\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\} \text{ (γιατί;)}.$$

Παρατηρούμε επίσης, ότι από το θεώρημα Διάστασης είναι

$$4 = \dim(\mathrm{Ker}T) + \dim(\mathrm{Im}T) = \dim(\mathrm{Ker}T) + 2,$$

άρα $\dim(\mathrm{Ker}T) = 2$. Θα βρούμε τώρα τους υποχώρους $\mathrm{Im}(T)$ και $\mathrm{Ker}(T)$.

Έστω E_3, E_2, E_1 οι στοιχειώδεις πίνακες που αντιστοιχούν στις στοιχειώδεις πράξεις που κάναμε στον πίνακα A. Τότε

$$E_1E_2E_3A = EA = B.$$

Επίσης,

$$E = E_1E_2E_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Άρα

$$\begin{aligned} E^{-1} &= E_3^{-1}E_2^{-1}E_1^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 12 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Συνεπώς,

$$\begin{aligned}\mathrm{Im}T &= \mathrm{Im}L_A = \mathrm{span}\{E^{-1}L_B\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, E^{-1}L_B\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\} \\ &= \mathrm{span}\{\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}\},\end{aligned}$$

και μάλιστα το παραπάνω σύνολο αποτελεί μία βάση της $\mathrm{Im}(L_A)$. Εδώ χρησιμοποιήσαμε το γεγονός ότι $L_{EA} = L_E \circ L_A = L_B$ άρα $L_A = L_{E^{-1}} \circ L_B$. Εναλλακτικά, ϑα μπορούσαμε να εργαστούμε ως εξής:
Θεωρούμε τα διανύσματα

$$L_A(e_1) = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, L_A(e_2) = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}, \cdots$$

και τον πίνακα

$$\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\1 & 2 & 3\\2 & -1 & -4\\3 & 1 & -1\end{pmatrix},$$

ο οποίος μετά από γραμμοπράξεις γίνεται

$$\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\0 & 1 & 2\\0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0\end{pmatrix} = \Gamma.$$

Όπως αναμένουμε είναι $\mathrm{rk}(\Gamma) = 2$ και οι δύο πρώτες γραμμές του πίνακα Γ αποτελούν μία βάση της εικόνας $\mathrm{Im}T$ (γιατί συμβαίνει αυτό;). Τέλος, για τον πυρήνα $\mathrm{Ker}L_A$ έχουμε ότι $\mathrm{Ker}L_A = \mathrm{Ker}L_B$. Πράγματι,

$$Av = 0 \Leftrightarrow EAv = 0 \Leftrightarrow Bv = 0.$$

Συνεπώς,

$$\begin{aligned}
\mathrm{Ker}L_B &= \{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\} \\
&= \{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} : x + y + 2z + 3w = 0 \text{ και } y - 3z - 2w = 0\} \\
&= \{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} : x = -y - 2z - 3w \text{ και } y = 3z + 2w\} \\
&= \{\begin{pmatrix} -5z - 5w \\ 3z + 2w \\ z \\ w \end{pmatrix} : z, w \in \mathbb{R}\} \\
&= \{z\begin{pmatrix} -5 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + w\begin{pmatrix} -5 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} : z, w \in \mathbb{R}\}.
\end{aligned}$$

Μία βάση του πυρήνα της L_A είναι το σύνολο

$$\{\begin{pmatrix} -5 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\}.$$

3.4 Η πόλη των εκκεντρικών κατοίκων

Σε μία πόλη n κατοίκων οι κάτοικοι αρέσκοντο να δημιουργούν διάφορες ομάδες ιδιαίτερης απασχόλησης (clubs), οι οποίες όμως άρχισαν να δημιουργούν προβλήματα στην ομαλή λειτουργία της πόλης, λόγω του υπέρμετρου αριθμού τους. Κατόπιν αυτού, το δημοτικό συμβούλιο της πόλης, στην προσπάθειά του να περιοριστεί ο αριθμός αυτός των ομάδων, έβαλε τους εξής απλούς (κατά την άποψή του) κανόνες.

i) Κάθε ομάδα κατοίκων πρέπει να έχει περιττό αριθμό μελών.

ii) Κάθε δύο ομάδες πρέπει να έχουν άρτιο αριθμό κοινών μελών.

Υπό αυτές τις προϋποθέσεις προκύπτει το εξής:

Θεώρημα 3.7. *Αν ισχύουν τα i) και ii) και ο αριθμός των κατοίκων της πόλης ειναι n, τότε δεν είναι δυνατόν να σχηματιστούν περισσότερες απο n ομάδες κατοίκων.*

Απόδειξη. Έστω $1, 2, 3, \ldots, n$ οι κάτοικοι της πόλης και $C_1, C_2, \ldots, C_m$ οι ομάδες που σχηματίζουνται. Ορίζουμε τον $m \times n$ πίνακα $A = (a_{ij})$ με στοιχεία στο σώμα $\mathbb{F}_2 = \{0, 1\}$ ως εξής:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & , j \in C_i \\ 0 & , j \notin C_i \end{cases}.$$

Άρα οι γραμμές του πίνακα αντιστοιχούν στις ομάδες κατοίκων και οι στήλες αντιστοιχούν στους κατοίκους. Προφανώς $\mathrm{rk}(A) \leq n$. Θέλουμε να δείξουμε ότι $m \leq n$. Θεωρούμε το γινόμενο AA^t. Αυτός είναι ένας $m \times m$ πίνακας με το (i, j)-στοιχείο να είναι $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} a_{kj}$ άρα μετρά τον αριθμό των κατοίκων στην τομή $C_i \bigcap C_j$. Επειδή το σώμα είναι το $\mathbb{F}_2$, ο αριθμός αυτός είναι 1 εάν $|C_i \bigcap C_k|$ = περιττός και 0 εάν $|C_i \bigcap C_j|$ = άρτιος (εδώ $|k|$ =αριθμός των στοιχείων στο σύνολο K). Άρα σύμφωνα με τους κανόνες του δημοτικού συμβουλίου είναι $AA^t = I_m$, συνεπώς $\mathrm{rk}(AA^t) = m$.

Λήμμα 3.1. *Αν A, B δύο πίνακες τότε*

$$\mathrm{rk}(AB) \leq \mathrm{rk}(A) \text{ και } \mathrm{rk}(AB) \leq \mathrm{rk}(B).$$

Συνεπώς, $\mathrm{rk}(AA^t) \leq \mathrm{rk}(A)$, άρα $\mathrm{rk}(A) \geq m$ και τελικά $m \leq \mathrm{rk}(A) \leq n$, από όπου προκύπτει το ζητούμενο. □

Αναφορά

L.Babai-P.Frank: *Linear Algebra Methods in Combinatorics* (prel. ver. 2), Dept. of Computer Science, The University of Chicago, 1992.

3.5 Γραμμικά Συστήματα - Θεωρητικό υπόβαθρο

Η πιο σημαντική εφαρμογή της γραμμικής άλγεβρας είναι στην επίλυση γραμμικών συστημάτων. Θα μελετήσουμε αρχικά τα θέματα που αφορούν την περιγραφή των λύσεων ενός τέτοιου συστήματος και στην επόμενη παράγραφο θα παρουσιάσουμε υπολογιστικά θέματα.

Το σύστημα των εξισώσεων

$$\left.\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}\right\} (\Sigma),$$

όπου a_{ij}, b_i $(1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n)$ αριθμοί που ανήκουν στο σώμα $\mathbb{F}$ και $x_1, \ldots x_n$ μεταβλητές που παίρνουν τιμές στο $\mathbb{F}$ ονομάζεται γραμμικό σύστημα m εξισώσεων με n αγνώστους (επί του σώματος $\mathbb{F}$).

Ο $m \times n$ πίνακας

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

ονομάζεται πίνακας των συντελεστών του συστήματος (Σ). Αν θέσουμε

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \text{ και } B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix},$$

τότε το σύστημα (Σ) μπορεί να γραφεί ισοδύναμα ως

$$Ax = B.$$

Μία λύση του συστήματος (Σ) είναι ένα διάνυσμα

$$s = \begin{pmatrix} s_1 \\ \vdots \\ s_n \end{pmatrix} \in \mathbb{F}^n,$$

με την ιδιότητα $As = B$.

Το σύστημα (Σ) ονομάζεται συμβατό (consistent) εάν το σύνολο των λύσεων είναι μη κενό, διαφορετικά ονομάζεται μη συμβατό.

Παραδείγματα

1) Θεωρούμε το σύστημα

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 4 \\ x_1 - x_2 &= 2. \end{aligned}$$

Είναι άμεσο να βρούμε ότι η μοναδική λύση του είναι $x_1 = 3, x_2 = 1$, άρα

$$s = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Το σύστημα αυτό γράφεται σε μορφή πινάκων ως

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

άρα $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$.

2) Έστω το σύστημα

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 &= 7 \\ x_1 - x_2 - x_3 &= -4, \end{aligned}$$

το οποίο γράφεται ως

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

Το σύστημα αυτό έχει πολλές λύσεις, μερικές από τις οποίες είναι οι

$$s = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}, s = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

3) Το σύστημα

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 &= 0 \\ x_1 + 3x_2 &= 5, \end{aligned}$$

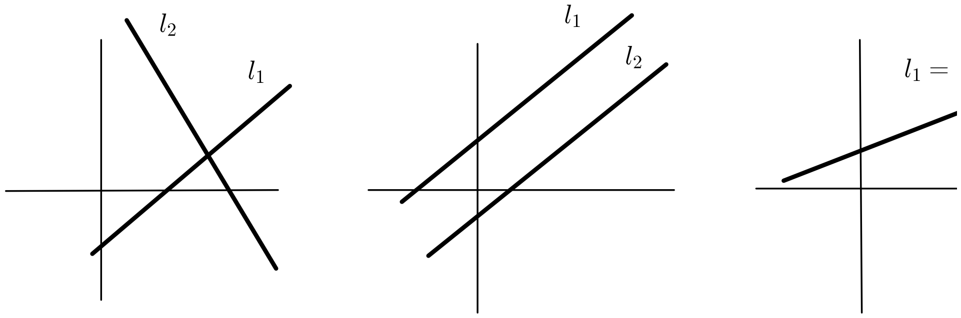
το οποίο γράφεται ως

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \end{pmatrix}$$

δεν έχει καμμία λύση.

Παρατήρηση
Βλέπουμε ότι ένα γραμμικό σύστημα είναι δυνατόν να έχει μία, καμμία ή πολλές λύσεις.

Στην περίπτωση απλών συστημάτων αυτό μπορούμε να το καταλάβουμε και γεωματρικά με απλές γνώσεις αναλυτικής γεωμετρίας. Για παράδειγμα, στην περίπτωση των παραδειγμάτων 1) και 3) το σύστημα παριστά δύο ευθείες l_1, l_2 στο επίπεδο $\mathbb{R}^2$ οι οποίες μπορεί να έχουν τις εξής δυνατές θέσεις με αντίστοιχο αριθμό λύσεων του συστήματος.



μία λύση *καμία λύση* *άπειρες λύσει*

Αντίστοιχα το σύστημα του παραδείγματος 3) παριστά δύο επίπεδα στον χώρο $\mathbb{R}^3$, τα οποία είτε τέμνονται (άπειρες λύσεις) είτε είναι παράλληλα (καμία λύση). Μέσω της θεωρίας της γραμμικής άλγεβρας είμαστε σε θέση να λύσουμε γραμμικά συστήματα για τα οποία δεν έχουμε την γεωμετρική εποπτεία των χαμηλών διαστάσεων όπως παραπάνω.

Ορισμός 3.6. *Ένα γραμμικό σύστημα $Ax = B$ m εξισώσεων με n αγνώστους ονομάζεται <u>ομογενές</u> (homogeneous) εάν $B = 0$, διαφορετικά ονομάζεται <u>μη ομογενές</u>.*

Παρατηρήστε ότι ένα ομογενές σύστημα έχει πάντα την μηδενική λύση $s = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ η οποία ονομάζεται η <u>τετριμμένη</u> (trivial) λύση.

Πρόταση 3.4. *Έστω $Ax = 0$ ομογενές σύστημα m εξισώσεων με n αγνώστους επι του σώματος $\mathbb{F}$. Έστω S το σύνολο όλων των λύσεων του $Ax = 0$. Τότε $S = \mathrm{Ker}(L_A)$ άρα το S είναι ένας υπόχωρος του $\mathbb{F}^n$ διάστασης $n - \mathrm{rk}(L_A) = n - \mathrm{rk}(A)$.*

Απόδειξη. Είναι
$$S = \{s \in \mathbb{F}^n : As = 0\} = \mathrm{Ker}(L_A) < \mathbb{F}^n.$$
Από το Θεώρημα Διάστασης προκύπτει ότι $\dim S = n - \mathrm{rk}(L_A)$. □

Πόρισμα 3.3. *Αν $m < n$ τότε το σύστημα $Ax = 0$ έχει μία μη τετριμμένη λύση.*

Απόδειξη. Είναι $\mathrm{rk}(A) = \mathrm{rk}(L_A) \leq m$ (θυμίζουμε ότι $L_A : \mathbb{F}^n \to \mathbb{F}^m$) □

Συνεπώς,
$$\dim S = n - \mathrm{rk}(A) \geq n - m > 0,$$
όπου $S = \mathrm{Ker}(L_A)$. Επειδή $\dim S > 0$ είναι $S \neq \{0\}$ (γιατί;), υπάρχει ένα μη μηδενικό διάνυσμα $s \in S$, άρα υπάρχει μη μηδενική λύση του $Ax = 0$.

Παραδείγματα

1) Έστω το σύστημα
$$\begin{aligned} 3x_1 - 3x_2 - 6x_3 - 2x_4 &= 0 \\ x_1 - x_2 - 2x_3 + 5x_4 &= 0. \end{aligned}$$
Αν
$$A = \begin{pmatrix} 3 & -3 & -6 & -2 \\ 1 & -1 & -2 & 5 \end{pmatrix},$$
τότε εύκολα βρίσκουμε ότι $\mathrm{rk}(A) = 2$, άρα αν S είναι το σύνολο λύσεων τότε $\dim S = 3 - 2 = 1$. Συνεπώς, κάθε μη μηδενική λύση αποτελεί βάση του S. Για παράδειγμα, επειδή μία λύση είναι η
$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$
τότε κάθε διάνυσμα στο S είναι της μορφής
$$\lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \\ \lambda \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \lambda \in \mathbb{R}.$$

2) Έστω το σύστημα που αποτελείται από μία μόνο εξίσωση $x_1 - 4x_2 + x_3 = 0$ (δηλαδή ένα επίπεδο στον $\mathbb{R}^3$). Αν $A = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 1 \end{pmatrix}$ τότε $\mathrm{rk}(A) = 1$ άρα $\dim S = 3 - 1 = 2$.

Τα διανύσματα $\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ και $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ είναι δύο γραμμικώς ανεξάρτητα διανύσματα στο S, άρα αποτελούν μία βάση του S (γιατί;). Συνεπώς,

$$S = \{(\lambda_1 \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} : \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}\}.$$

Θα μελετήσουμε τώρα μη ομογενή γραμμικά συστήματα. Αν $Ax = B$ είναι ένα τέτοιο σύστημα, τότε το σύστημα $Ax = 0$ ονομάζεται το <u>αντίστοιχο ομογενές σύστημα</u>.

Θεώρημα 3.8. *Έστω S το σύνολο των λύσεων του συστήματος $Ax = B$ και S_0 το σύνολο των λύσεων του αντίστοιχου ομογενούς. Τότε για κάθε λύση s του $Ax = B$ ισχύει ότι*

$$S = \{s\} + S_0 = \{s + s_0 : s_0 \in S_0\}.$$

Απόδειξη. Έστω s μία λύση του $Ax = B$. Θα δείξουμε την ισότητα συνόλων $S = \{s\} + S_0$. Έστω $w \in S$. Τότε $Aw = B$, συνεπώς

$$A(w - s) = Aw - As = B - B = 0,$$

άρα $w - s \in S_0$. Αυτό σημαίνει ότι υπάρχει $s_0 \in S_0$ τέτοιο ώστε $w - s = s_0$, άρα $w = s_0 + s \in \{s\} + S_0$. Αντίστροφα, έστω $w \in \{s\} + S_0$. Τότε $w = s + s_0$ για κάποιο $s_0 \in S_0$. Άρα

$$Aw = A(s + s_0) = As + As_0 = B + 0 = B$$

συνεπώς $w \in S$. □

Παραδείγματα

1) Θεωρούμε το σύστημα

$$\begin{aligned} 3x_1 - 3x_2 - 6x_3 - 2x_4 &= 1 \\ x_1 - x_2 - 2x_3 + 5x_4 &= 6. \end{aligned}$$

Σχετικά εύκολα βλέπουμε ότι μία λύση του συστήματος είναι η

$$s = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Επειδή έχουμε βρει σε προηγούμενο παράδειγμα το σύνολο των λύσεων του αντίστοιχου ομογενούς συστήματος, είναι

$$S = \{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} : \lambda \in \mathbb{R}\}.$$

2) Έστω το σύστημα $x_1 - 4x_2 + x_3 = 5$. Μία λύση του συστήματος είναι η

$$s = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Λαμβάνοντας υπόψη τη γενική λύση του αντίστοιχου ομογενούς που έχουμε βρει σε προηγούμενο παράδειγμα παίρνουμε ότι

$$S = \{ \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} + \lambda_1 \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} : \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}\}.$$

Παρατηρήσεις

1) Πολλές φορές ονομάζουμε το σύνολο των λύσεων $S = \{s\} + S_0$ ως τη γενική λύση του συστήματος $Ax = B$ και την λύση s ως μία ειδική λύση αυτού.

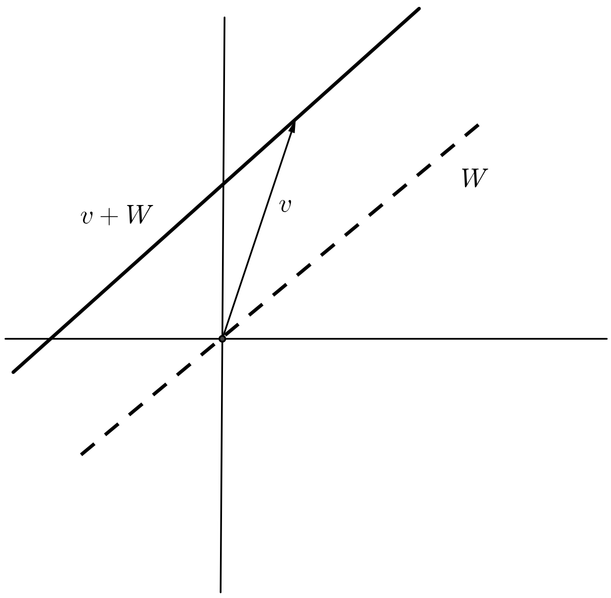
2) Ο αναγνώστης ενδεχομένως να διερωτάται ποιά είναι ακριβώς η δομή του συνόλου $\{s\} + S_0$ (π.χ. αν είναι διανυσματικός χώρος). Αν και δεν θα αναπτύξουμε εκτενώς εδώ το θέμα αυτό, το σύνολο αυτό ονομάζεται ένα σύμπλοκο (coset) του διανυσματικού χώρου S_0. Το σύνολο αυτό είναι της μορφής $v + W$ όπου W υπόχωρος ενός διανυσματικού χώρου V και $v \in V$.

Για παράδειγμα, στο παρακάτω σχήμα φαίνεται ένα σύμπλοκο του $W = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = 3x\}$ (υπόχωρος του $\mathbb{R}^2$).

Το σύνολο όλων των συμπλόκων του W συμβολίζεται με V/W και ονομάζεται χώρος πηλίκο.

Αυτό που πρέπει τελικώς να συγκρατήσει ο αναγνώστης είναι ότι το σύνολο των λύσεων ενός ομογενούς γραμμικού συστήματος είναι διανυσματικός χώρος κάτι το οποίο δεν συμβαίνει για το σύνολο των λύσεων ενός μη ομογενούς γραμμικού συστήματος.

Το παρακάτω αποτέλεσμα αφορά συστήματα με τον ίδιο αριθμό εξισώσεων και αγνώστων.



Θεώρημα 3.9. *Έστω $Ax = B$ ένα γραμμικό σύστημα n εξισώσεων με n αγνώστους. Εάν ο πίνακας A είναι αντιστρέψιμος τότε το σύστημα έχει μοναδική λύση την $x = A^{-1}B$. Αντίστροφα, εάν το σύστημα έχει μοναδική λύση τότε ο A είναι αντιστρέψιμος.*

Απόδειξη. Έστω ότι ο A είναι αντιστρέψιμος. Τότε αντικαθιστώντας τον πίνακα $A^{-1}B$ στο σύστημα παίρνουμε $A(A^{-1}B) = (AA^{-1})B = B$ άρα ο $A^{-1}B$ είναι λύση. Έστω τώρα s μία οποιαδήποτε άλλη λύση του $Ax = B$. Τότε $(A^{-1}A)s = A^{-1}B$ άρα $s = A^{-1}B$, συνεπώς το σύστημα έχει μοναδική λύση.

Αντίστροφα, έστω ότι το $Ax = B$ έχει μοναδική λύση, έστω s και έστω S_0 το σύνολο των λύσεων του αντίστοιχου ομογενούς $Ax = 0$. Τότε $\{s\} = \{s\} + S_0$ άρα $S_0 = \{0\}$ συνεπώς $\mathrm{Ker}(L_A) = \{0\}$ άρα ο πίνακας A είναι αντιστρέψιμος (γιατί ακριβώς;). □

Το παρακάτω θεώρημα είναι το κεντρικό αποτέλεσμα της θεωρίας των γραμμικών συστημάτων.

Θεώρημα 3.10. *Το γραμμικό σύστημα $Ax = B$ έχει τουλάχιστον μία λύση εάν και μόνο εάν $\mathrm{rk}(A) = \mathrm{rk}(A|B)$. Ο πίνακας $(A|B)$ ονομάζεται <u>επαυξημένος πίνακας</u> (augmented) του συστήματος.*

Απόδειξη. Το σύστημα $Ax = B$ έχει λύση εάν και μόνο εάν $B \in \mathrm{Im}(L_A)$. Έστω $A = (A^{(1)}, A^{(2)}, \ldots, A^{(n)})$ (ο πίνακας A με μορφή στηλών). Τότε $\mathrm{Im}(L_A) = \mathrm{span}\{A^{(1)}, A^{(2)}, \ldots, A^{(n)}\}$. Συνεπώς, το σύστημα έχει λύση εάν και μόνο εάν $B \in$

$\text{span}\{A^{(1)}, A^{(2)}, \ldots, A^{(n)}\}$ το οποίο ισοδυναμεί με το ότι $\text{span}\{A^{(1)}, A^{(2)}, \ldots, A^{(n)}\} = \text{span}\{A^{(1)}, A^{(2)}, \ldots, A^{(n)}B\}$ (γιατί;). Η τελευταία ισότητα ισοδυναμεί με το ότι

$$\dim(\text{span}\{A^{(1)}, A^{(2)}, \ldots, A^{(n)}\}) = \dim\{A^{(1)}, A^{(2)}, \ldots, A^{(n)}B\}.$$

(γιατί ακριβώς; ιδιαιτέρως να διερεωτηθεί το αντίστροφο). Η τελευταία ισότητα ισοδυναμεί με το ότι $\text{rk}(A) = \text{rk}(A|B)$ (να διερευνηθεί και αυτό). □

Παράδειγμα
Θεωρούμε το σύστημα

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 &= 0 \\ x_1 + 3x_2 &= 1. \end{aligned}$$

Είναι $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ και $(A|B) = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \end{array}\right)$ με $\text{rk}(A) = 1 \neq \text{rk}(A|B) = 2$. Άρα το σύστημα δεν έχει λύση.

Πόρισμα 3.4. *Έστω $Ax = B$ γραμμικό σύστημα με n εξισώσεις και n αγνώστους. Το σύστημα έχει μοναδική λύση εάν και μόνο εάν $\text{rk}(A) = n$.*

Απόδειξη. Άσκηση.
Υπόδειξη: Αρκεί να δειχθεί ότι A είναι αντιστρέψιμος. □

3.6 Γραμμικά συστήματα - Αλγόριθμος επίλυσης

Το θέμα της επίλυσης ενός γραμμικού συστήματος δεν είναι μόνο ένα τεχνικό κεφάλαιο της γραμμικής άλγεβρας αλλά έχει δημιουργήσει και υποκλάδους αυτής, όπως για παράδειγμα η υπολογιστική γραμμική άλγεβρα και η ανάλυση πινάκων. Η αιτία προέρχεται κυρίως απο τις εφαρμογές που προκύπτουν. Για παράδειγμα πως μπορούμε να χειριστούμε ένα γραμμικό σύστημα 10.000 εξισώσεων με 10.000 αγνώστους το οποίο μπορεί να προέρχεται από προβλήματα τεχνολογίας, διοίκησης κ.τ.λ.

Στην παράγραφο αυτή θα παρουσιάσουμε την πιο κλασσική μέθοδο επίλυσης απλών γραμμικών συστημάτων γνωστή ως μέθοδος απαλοιφής του Gauss.

Η βασική ιδέα της μεθόδου είναι η εξής:
Δοθέντος ενός γραμμικού συστήματος $Ax = B$ θεωρούμε τον επαυξημένο πίνακα $(A|B)$ και χρησιμοποιώντας στοιχειώδεις πράξεις στις γραμμές προσπαθούμε να τον μετασχηματίσουμε σε έναν πίνακα $(A'|B')$ ο οποίος να είναι ανηγμένος κλιμακωτός (reduced echelon). Ο ανηγμένος κλιμακωτός πίνακας είναι ένας πίνακας στον οποίο

το πρώτο μη μηδενικό στοιχείο κάθε γραμμής είναι 1 και αυτό το στοιχείο να είναι το μόνο μη μηδενικό στοιχείο της στήλης στην οποία ανήκει. Για παράδειγμα, οι παρακάτω πίνακες

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

<u>δεν</u> είναι ανηγμένοι κλιμακωτοί. Ενώ οι πίνακες

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 7 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

είναι ανηγμένοι κλιμακωτοί.

Για ένα κλιμακωτό πίνακα οι μεταβλητές που αντιστοιχούν στις στήλες με 1 ονομάζονται <u>βασικές μεταβλητές</u> ενώ οι υπόλοιπες ονομάζονται <u>ελεύθερες μεταβλητές</u>. Αν ο αριθμός των μεταβλητών είναι n τότε ο αριθμός των ελεύθερων μεταβλητών ισούται με $n - \mathrm{rk}(A)$. Για παράδειγμα, για τον πίνακα

$$\begin{array}{c} \begin{matrix} x & y & z & w \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 7 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

οι μεταβλητές x, y είναι βασικές ενώ οι z, w είναι ελεύθερες. Οι βασικές μεταβλητές μπορούν να εκφραστούν συναρτήσει των ελεύθερων μεταβλητών.

Όταν ο πίνακας $(A|B)$ έχει μετασχηματιστεί σε έναν ανηγμένο κλιμακωτό πίνακα $(A'|B')$, η λύση του προσδιορίζεται εύκολα χρησιμοποιώντας τη γενική θεωρία επίλυσης που αναπτύχθηκε στην προηγούμενη ενότητα. Το βασικό χαρακτηριστικό της μεθόδου είναι ότι κατά την διαδικασία μετασχηματισμού του πίνακα $(A|B)$ στον ανηγμένο κλιμακωτό $(A'|B')$ οι λύσεις του αρχικού συστήματος με αυτές που προκύπτουν από τον πίνακα $(A'|B')$ είναι οι ίδιες, δηλαδή τα συστήματα είναι <u>ισοδύναμα</u>.

Τα παραπάνω συνοψίζονται στα εξής:

Θεώρημα 3.11. *Έστω $Ax = B$ ένα γραμμικό σύστημα εξισώσεων και έστω Γ ένας αντιστρέψιμος πίνακας. Τότε το σύστημα $(\Gamma A)x = \Gamma B$ είναι ισοδύναμο με το $Ax = B$.*

Πόρισμα 3.5. *Έστω $Ax = B$ ένα γραμμικό σύστημα εξισώσεων. Εάν ο πίνακας $(A|B)$ μετασχηματιστεί στον $(A'|B')$ μέσω στοιχειωδών πράξεων στις γραμμές, τότε το σύστημα $A'x = B'$ είναι ισοδύναμο με το αρχικό.*

Παραδείγματα

1) Να λυθεί το συστήμα

$$\left.\begin{aligned} x+y-2z &= -1 \\ -x+z &= -1 \\ -x+y+4z &= -3 \end{aligned}\right\}.$$

Ο επαυξημένος πίνακας του συστήματος είναι ο

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 4 & -3 \end{array}\right).$$

Στη συνέχεια, φέρνουμε τον πίνακα σε ανηγμένη κλιμακωτή μορφή

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 4 & -3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & 2 & 6 & -4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x & y & z \end{array} \\ \sim\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right). \end{array}$$

Η τάξη του τελευταίου πίνακα είναι $2 = \mathrm{rk}(A)$, άρα το σύστημα έχει λύση. Ο αριθμός των ελεύθερων μεταβλητών είναι $3-2=1$. Οι βασικές μεταβλητές είναι οι x, y και η ελεύθερη μεταβλητή η z. Συνεπώς, έχουμε ότι

$$x = 1+z,\ y = -2-3z.$$

Άρα το σύνολο λύσεων του συστήματος είναι

$$\{(1+z, -2-3z, z) : z \in \mathbb{R}\} = \{(1,-2,0) + z(1,-3,1) : z \in \mathbb{R}\}.$$

Σημείωση

Ο λόγος που επιλέγουμε την μεταβλητή z ως την ελεύθερη μεταβλητή είναι καθαρά τεχνικός. Θα μπορούσαμε να επιλέξουμε οποιαδήποτε άλλη μεταβλητή (από τις x, y) ως ελεύθερη, απλώς θα έπρεπε να κάνουμε επιπλέον πράξεις. Μάλιστα, δεν είναι και απαραίτητο να φέρουμε τον πίνακα σε ανηγμένη κλιμακωτή μορφή, αλλά απλώς σε κλιμακωτή μορφή. Έτσι, θα μπορούσαμε να σταματήσουμε τις πράξεις στον πίνακα

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

για τον οποίο επίσης ισχύει $\mathrm{rk}(A'|B') = \mathrm{rk}(A') = 2$, άρα το σύστημα έχει λύση. Επειδή η διάσταση του χώρου των λύσεων του αντίστοιχου ομογενούς είναι $n - \mathrm{rk}(A') = n - \mathrm{rk}(A) = 3 - 2 = 1$, οποιαδήποτε από τις μεταβλητές x, y, z μπορεί να είναι ελεύθερη. Προφανώς διευκολύνει να θεωρήσουμε ως ελεύθερη μεταβλητή την z.

2) Να λυθεί το γραμμικό σύστημα

$$\left.\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 + x_3 + 4x_4 - 9x_5 &= 17 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 - 3x_5 &= 6 \\ x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 - 5x_5 &= 8 \\ 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 3x_4 - 8x_5 &= 14 \end{aligned}\right\}.$$

Καλείται ο αναγνώστης να πιστοποιήσει ότι ο επαυξημένος πίνακας του συστήματος είναι ισοδύναμος με τον παρακάτω

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & 3 & 1 & 4 & -9 & 17 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -3 & 6 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & -5 & 8 \\ 2 & 2 & 2 & 3 & -8 & 14 \end{array}\right) \end{array} \sim \cdots \sim \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 2 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \end{array}.$$

Ο αριθμός των ελεύθερων μεταβλητών είναι $5 - \mathrm{rk}(A) = 5 - 3 = 2$, επιλέγουμε τις x_3, x_5. Άρα η λύση του συστήματος είναι

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2x_3 + 2x_5 + 3 \\ x_3 - x_5 + 1 \\ x_3 \\ 2x_5 + 2 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_5 \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, x_3, x_5 \in \mathbb{R}.$$

3) Να διερευνηθούν οι λύσεις του παρακάτω συστήματος για τις διάφορες τιμές των παραμέτρων a, b:

$$\left.\begin{aligned} ax_1 + bx_2 + 2x_3 &= 1 \\ ax_1 + (2b-1)x_2 + 3x_3 &= 1 \\ ax_1 + bx_2 + (b+3)x_3 &= 2b - 1 \end{aligned}\right\}.$$

Το πρώτο βήμα σε ασκήσεις αυτού του τύπου είναι να φέρουμε τον επαυξημένο πίνακα του συστήματος σε κλιμακωτή μορφή. Μετά από πράξεις παίρνουμε ότι

$$\left(\begin{array}{ccc|c} a & b & 2 & 1 \\ a & 2b-1 & 3 & 1 \\ a & b & b+3 & 2b-1 \end{array}\right) \sim \cdots \sim \left(\begin{array}{ccc|c} a & 1 & 1 & 1 \\ 0 & b-1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & b+1 & 2(b-1) \end{array}\right).$$

Σύμφωνα με το βασικό Θεώρημα 3.10 ύπαρξης λύσης το σύστημα έχει λύση εάν και μόνο εάν $\mathrm{rk}(A|B) = \mathrm{rk}(A)$. Καλείται ο αναγνώστης στο σημείο αυτό να κάνει την δική του ανάλυση πριν πιστοποιήσει τα παρακάτω:

- αν $b = 1$ υπάρχουν άπειρες λύσεις
- αν $b = 5, a = 0$ υπάρχουν άπειρες λύσεις
- αν $b = 5, a \neq 0$ μοναδική λύση
- αν $b = -1$ καμμία λύση
- αν $b \neq -1, 1, 5,\ a \neq 0$ μοναδική λύση
- αν $b \neq 1, 5,\ a = 0$ καμία λύση

3.7 Ασκήσεις

1) Να βρεθούν οι αντίστροφοι πίνακες των

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 0 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

2) Να βρεθεί ο αντίστροφος πίνακας του

$$V = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 \end{pmatrix},\ a_1 \neq a_2 \neq a_3 \neq a_1,$$

(ο V ονομάζεται πίνακας του Vandermonde).

3) Εάν η τάξη του 3×4 πίνακα A είναι 2, τότε να βρεθεί το t:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & t & 0 \\ 0 & -4 & 5 & 2 \end{pmatrix}.$$

4) Για ποιά τιμή του t η τάξη του ακόλουθου πίνακα A ισούται με 3;

$$A = \begin{pmatrix} t & 1 & 1 & 1 \\ 1 & t & 1 & 1 \\ 1 & 1 & t & 1 \\ 1 & 1 & 1 & t \end{pmatrix},$$

5) Να προσδιοριστούν οι τιμές του λ έτσι ώστε το ακόλουθο σύστημα γραμμικών εξισώσεων να έχει ως μοναδική λύση τη μηδενική.

$$\left.\begin{aligned} \lambda x_1 + x_2 + x_3 &= 0 \\ x_1 + \lambda x_2 + x_3 &= 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 &= 0 \end{aligned}\right\}.$$

6) Να προσδιοριστούν οι τιμές του λ έτσι ώστε το ακόλουθο σύστημα γραμμικών εξισώσεων να έχει μη μηδενική λύση.

$$\left.\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - 2x_3 &= 0 \\ 2x_1 - x_2 + \lambda x_3 &= 0 \\ 3x_1 + x_2 - x_3 &= 0 \end{aligned}\right\}.$$

7) Έστω A ένας τετραγωνικός πίνακας. Εάν $\mathrm{rk}(A) = \mathrm{rk}(A^2)$, τότε να δειχθεί ότι τα συστήματα των εξισώσεων $Ax = \mathit{0}$ και $A^2x = \mathit{0}$ έχουν τον ίδιο χώρο λύσεων.

8) Να βρεθούν οι τιμές των a και b έτσι ώστε οι ακόλουθοι πίνακες να είναι όμοιοι

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 2 & a & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}.$$

9) Να βρεθεί η τάξη των ακόλουθων πινάκων:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \; \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \end{pmatrix}, \; \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

10) Να βρεθεί η τάξη και ο αντίστροφος (αν υπάρχει) των ακόλουθων πινάκων:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \; \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

11) Να βρεθεί αν οι ακόλουθοι γραμμικοί τελεστές είναι αντιστρέψιμοι και να βρεθεί ο αντίστροφος (αν υπάρχει).

   i) $T : \mathsf{P}_2(\mathbb{R}) \to \mathsf{P}_2(\mathbb{R}),\ T(f) = f'' + 2f' - f$.

   ii) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,\ T(a_1, a_2, a_3) = (a_1 + 2a_2 + a_3, -a_1 + a_2 + 2a_3, a_1 + a_3)$.

12) Έστω

$$\left.\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - x_3 &= 0 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 &= 0 \end{aligned}\right\}.$$

Να βρεθεί η διάσταση και μία βάση του συνόλου των λύσεων του παραπάνω γραμμικού συστήματος. Στη συνέχεια, να βρεθούν όλες οι λύσεις αυτού.

13) Να εξετασθεί αν το παρακάτω γραμμικό σύστημα έχει λύση.

$$\left.\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 1 \\ x_1 + x_2 - x_3 &= 0 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 &= 3 \end{aligned}\right\}.$$

14) Να λύθει το ακόλουθο γραμμικό σύστημα χρησιμοποιώντας την απαλοιφή του Gauss.

$$\left.\begin{aligned} x_1 + 2x_2 \phantom{{}- x_3} + 2x_4 &= 6 \\ 3x_1 + 5x_2 - x_3 + 6x_4 &= 17 \\ 2x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 &= 12 \\ 2x_1 \phantom{{}+ 5x_2} - 7x_3 + 11x_4 &= 7 \end{aligned}\right\}.$$

Βιβλιογραφία

[1] S. Axler: *Linear Algebra Done Right*, 2nd Edition Springer, 1997.

[2] S. H. Friedberg - A. J. Insel - L. E. Spence: *Linear Algebra*, 4th Edition, Prentice Hall, 2003.

[3] Y. Katznelson - Y. R, Katznelson: *A (Terse) Introduction to Linear Algebra*, American Mathematical Society, 2008.

[4] S. Lipschutz - M. Lipson: *Linear Algebra*, 3rd Edition, Schaum's Outlines, 2003.

[5] H. E. Rose: *Linear Algebra: A Pure Mathematical Approach*, Birkhauser, 2002.

[6] F. Zhang: *Linear Algebra. Challenging Problems for Students*, 2nd Edition, The Johns Hopkings University Press, 2009.