Τίτλος Μαθήματος : Γραμμική Άλγεβρα Ι

Ενότητα: Γραμμικές απεικονίσεις

Όνομα Καθηγητή: Ανδρέας Αρβανιτογεώργος

Τμήμα: Μαθηματικών

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Πατρών**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο

ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ

ΕΣΠΑ
2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Κεφάλαιο 2

Γραμμικές απεικονίσεις

Το επόμενο βήμα μετά τον ορισμό μιας αλγεβρικής δομής (π.χ. ομάδα, δακτύλιος) είναι να ορίσουμε απεικονίσεις οι οποίες διατηρούν τη δομή των αντίστοιχων χώρων. Στην περίπτωση των διανυσματικών χώρων οι ιδιαίτερες αυτές συναρτήσεις ονομάζονται γραμμικές απεικονίσεις (καμία φορά και μετασχηματισμοί ή ομομορφισμοί).

2.1 Γραμμικές απεικονίσεις, πυρήνας, εικόνα.

Ορισμός 2.1. *Έστω V, W διανυσματικοί χώροι (επί του σώματος $\mathbb{F}$). Μία απεικόνιση $T : V \to W$ ονομάζεται γραμμική (linear) εάν για κάθε $x, y \in V$, $\lambda \in \mathbb{F}$ ισχύουν τα εξής:*

1) $T(x + y) = T(x) + T(y)$.

2) $T(\lambda x) = \lambda T(x)$.

Άμεσες συνέπειες του ορισμού (Άσκηση)
Έστω $T : V \to W$ γραμμική. Τότε
1) $T(0) = 0$.

2) $T(-x) = -T(x)$.

3) $T(\lambda x + y) = \lambda T(x) + T(y)$.

4) $T(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i T(x_i)$ για κάθε $x_1, \ldots, x_n \in V$, $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{F}$.

Παραδείγματα (Ασκήσεις)
1) Η μηδενική απεικόνιση $0 : V \to W$ με $0(x) = 0$ και η ταυτοτική απεικόνιση

$\mathsf{Id}_V : V \to V$ με $\mathsf{Id}_V(x) = x$ είναι γραμμικές.

2) Η απεικόνιση απεικόνιση $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2,\ T(a_1, a_2, a_3) = (2a_1 - a_2 + 3a_3, 7a_1 + 5a_2 - 6a_3)$ είναι γραμμική. Πιο γενικά, η απεικόνιση $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m,\ T(x_1, \dots, x_n) = (a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n, \dots, a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n)$. Αποδεικνύεται ότι κάθε γραμμική απεικόνιση $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ έχει την παραπάνω μορφή.

3) Έστω $T : \mathsf{P}(\mathbb{R}) \to \mathsf{P}(\mathbb{R})$ με $T(p(x)) = p'(x)$ (παράγωγος). Από τις ιδιότητες της παραγώγου προκύπτει ότι η T είναι γραμμική.

4) $T : \mathsf{P}(\mathbb{R}) \to \mathsf{P}(\mathbb{R}),\ T(p(x)) = x^2 p(x)$.

5) Έστω $V = \mathsf{C}(\mathbb{R}) = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f \text{ συνεχής}\}$ και $T : V \to \mathbb{R}$ με $T(f) = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ $(a < b)$. Η T είναι γραμμική.

6) $T : \mathbb{R}^\infty \to \mathbb{R}^\infty,\ T(x_1, x_2, \dots) = T(x_2, x_3, \dots)$.

7) $T : \mathsf{M}_{m\times n}(\mathbb{F}) \to \mathbb{F},\ T(A) = A^t$.

8) Η απεικόνιση $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ T(a_1, a_2) = (a_1, a_2^2)$ δεν είναι γραμμική, επειδή π.χ. για $(a_1, a_2) = (0, 1)$ και $\lambda = 2$ είναι $T(\lambda(a_1, a_2)) = T(0, 2) = (0, 4) \neq (0, 2) = \lambda T(a_1, a_2)$.

9) Έστω $0 \leq \theta < 2\pi$. Η γραμμική απεικόνιση $T_\theta : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ με $T_\theta(a_1, a_2) = (a_1 \cos\theta - a_2 \sin\theta, a_1 \sin\theta + a_2 \cos\theta)$ ονομάζεται <u>στροφή κατά γωνία θ</u> (rotation).

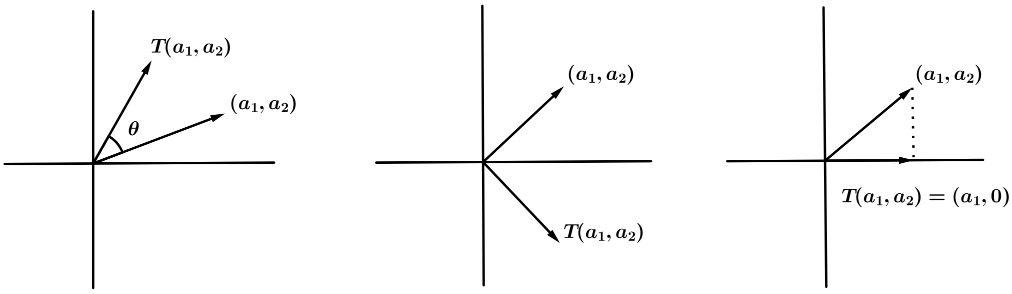
10) Η γραμμική απεικόνιση $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ T(a_1, a_2) = (a_1, -a_2)$ ονομάζεται <u>ανάκλαση στον άξονα x</u> (reflection).

11) Η γραμμική απεικόνιση $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ με $T(a_1, a_2) = (a_1, 0)$ ονομάζεται <u>προβολή</u> (projection) στον άξονα x.

Πρόταση 2.1. *1) Έστω $T : V \to W,\ S : W \to U$ γραμμικές. Τότε η σύνθεση $S \circ T : V \to U$ είναι γραμμική.*

2) Αν η $T : V \to W$ αντιστρέφεται τότε η $T^{-1} : W \to V$ είναι γραμμική.

Πρόταση 2.2. *Κάθε γραμμική απεικόνιση $T : V \to W$ καθορίζεται από τις τιμές της σε μία βάση του V.*



στροφή κατά γωνία θ *ανάκλαση στον άξονα x* *προβολή στον άξονα x*

Παράδειγμα

Έστω $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ και $\mathrm{B} = \{e_1, e_2\}$ η κανονική βάση του $\mathbb{R}^2$. Υποθέτουμε ότι $T(e_1) = (1, 2, 3)$, $T(e_2) = (0, 4, -1)$. Θα βρούμε τον τύπο της T. Έστω $x = a_1e_1 + a_2e_2 \in \mathbb{R}^2$ (τα $a_1, a_2 \in \mathbb{F}$ θεωρούνται γνωστοί αριθμοί). Τότε

$$\begin{aligned} T(x) &= T(a_1, a_2) = T(a_1e_1 + a_2e_2) \\ &= a_1T(e_1) + a_2T(e_2) = a_1(1, 2, 3) + a_2(0, 4, -1) \\ &= (a_1, 2a_1, 3a_1) + (0, 4a_2, -a_2) \\ &= (a_1, 2a_1 + 4a_2, 3a_1 - a_2). \end{aligned}$$

Συμβολίζουμε με $\mathcal{L}(V, W)$ το σύνολο όλων των γραμμικών απεικονίσεων από το διανυσματικό χώρο V στον W. Τότε το $\mathcal{L}(V, W)$ είναι διανυσματικός χώρος επί του $\mathbb{F}$ με πράξεις

$$\begin{aligned} (T + S)(x) &= T(x) + S(x), \\ (\lambda T)(x) &= \lambda T(x), \end{aligned}$$

όπου $x \in V,\ \lambda \in \mathbb{F}$.

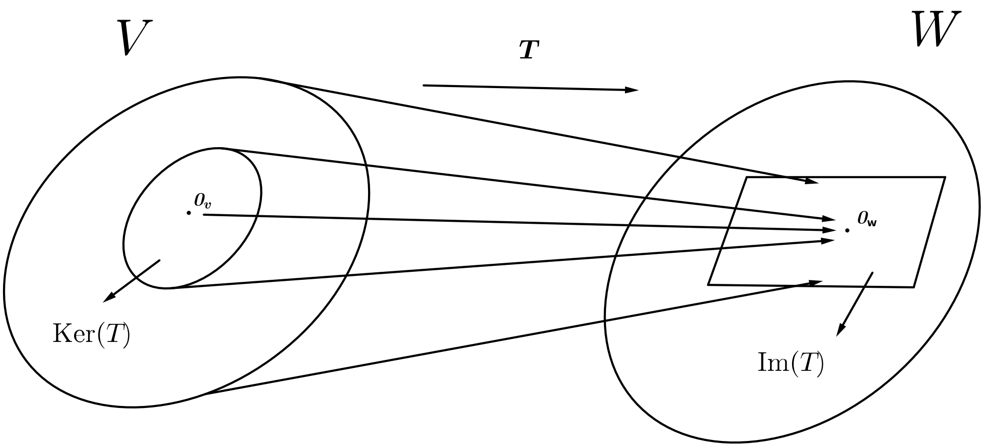
Αν $V = W$ γράφουμε $\mathcal{L}(V, V) = \mathcal{L}(V) = \mathrm{End}(V)$ και τα στοιχεία του $\mathcal{L}(V, V)$ ονομάζονται <u>γραμμικοί τελεστές</u> (linear operators) ή <u>ενδομορφισμοί</u> (endomorphisms). Το σύνολο $GL(V) = \{T \in \mathcal{L}(V) : T \text{ αντιστρέφεται}\}$ έχει επιπλέον δομή ομάδας με πράξη την σύνθεση απεικονίσεων και ονομάζεται <u>γενική γραμμική ομάδα</u>.

Προκειμένου να εξετάσουμε βαθύτερα τις ιδιότητες των γραμμικών απεικονίσεων θα ορίσουμε κάποια σημαντικά υποσύνολα που σχετίζονται με αυτές.

Ορισμός 2.2. *Έστω $T : V \to W$ γραμμική*

1) Ο πυρήνας (kernel ή null space) της T ορίζεται ως $\mathrm{Ker}T = \{x \in V : T(x) = 0\} \subset V$.

2) Η εικόνα (image) της T ορίζεται ως $\mathrm{Im}T = \{T(x) : x \in V\} \subset W$.



Παράδειγμα
Έστω $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ με $T(a_1, a_2, a_3) = (a_1 + a_2, 4a_3)$. Τότε $\mathrm{Ker}T = \{(a, -a, 0) : a \in \mathbb{R}\}$ και $\mathrm{Im}T = \mathbb{R}^2$.

Θεώρημα 2.1. *Έστω $T : V \to W$ γραμμική απεικόνιση. Τότε ο πυρήνας $\mathrm{Ker}T$ και η εικόνα $\mathrm{Im}T$ είναι υπόχωροι του V και W αντίστοιχα.*

Με το παρακάτω θεώρημα μπορούμε να ελέγξουμε αν μία γραμμική απεικόνιση είναι $1-1$.

Θεώρημα 2.2. *Έστω $T : V \to W$ γραμμική. Τότε η T είναι $1-1$ εάν και μόνο εάν $\mathrm{Ker}T = \{0\}$.*

Απόδειξη. Για το ευθύ, είναι $0 \in \mathrm{Ker}T$ επειδή $T(0) = 0$. Έστω $v \in \mathrm{Ker}T$. Τότε $T(v) = 0 = T(0)$ και επειδή η T είναι $1-1$ προκύπτει ότι $v = 0$, άρα $\mathrm{Ker}T = \{0\}$. Αντίστροφα, έστω $u, v \in V$ με $T(u) = T(v)$. Τότε λόγω της γραμμικότητας είναι $0 = T(u) - T(v) = T(u - v)$, συνεπώς $u - v \in \mathrm{Ker}T = \{0\}$, άρα $u = v$. □

Το πιο δύσκολο κάπως ερώτημα είναι πώς μπορούμε να προσδιορίσουμε την εικόνα μίας γραμμικής απεικόνισης. Το παρακάτω θεώρημα μας βοηθάει για αυτό το σκοπό.

Θεώρημα 2.3. *Έστω* $T : V \to W$ *γραμμική και* $\mathrm{B} = \{\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n\}$ *μία βάση του* V*. Τότε* $\mathrm{Im}T = \mathrm{span}\{T(\beta_1), \ldots, T(\beta_n)\}$.

Απόδειξη. Κατά αρχάς $T(\beta_i) \in \mathrm{Im}T$ για κάθε $i = 1, \ldots, n$. Επειδή $\mathrm{Im}T < V$ τότε $\mathrm{span}\{T(\beta_1), \ldots, T(\beta_n)\} \subset \mathrm{Im}T$ (κατανοήστε το βήμα αυτό). Έστω τώρα $y \in \mathrm{Im}T$. Τότε $y = T(x)$ για κάποιο $x \in V$, το οποίο γράφεται ως $x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \beta_i$. Συνεπώς, $y = T(x) = T(\sum \lambda_i \beta_i) = \sum \lambda_i T(\beta_i) \in \mathrm{span}\{T(\beta_1), \ldots, T(\beta_n)\}$. □

Παράδειγμα

Έστω $T : \mathsf{P}_2(\mathbb{R}) \to \mathsf{P}_2(\mathbb{R})$ με τύπο

$$T(p(x)) = \begin{pmatrix} p(1) - p(2) & 0 \\ 0 & p(0) \end{pmatrix}.$$

Θεωρούμε την κανονική βάση $\mathrm{B} = \{1, x, x^2\}$ του $\mathsf{P}_2(\mathbb{R})$. Τότε

$$\begin{aligned} \mathrm{Im}T &= \mathrm{span}\{T(\mathrm{B})\} = \mathrm{span}\{T(1), T(x), T(x^2)\} \\ &= \mathrm{span}\{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\} \\ &= \mathrm{span}\{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\} \text{ (γιατί;).} \end{aligned}$$

Επίσης,

$$\begin{aligned} \mathrm{Ker}T &= \{p(x) : \ T(p(x)) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\} \\ &= \{p(x) : \begin{pmatrix} p(1) - p(2) & 0 \\ 0 & p(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\}. \end{aligned}$$

Έστω ότι $p(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma \in \mathsf{P}_2(\mathbb{R})$. Λόγω των $p(1) = p(2)$, $p(0) = 0$ προκύπτει άμεσα ότι $\gamma = 0$, $\beta = -3\alpha$, συνεπώς $\mathrm{Ker}T = \{\alpha(x^2 - 3x) : \alpha \in \mathbb{R}\}$. Παρατηρήστε ότι $\dim(\mathrm{Im}T) = 2$, $\dim(\mathrm{Ker}T) = 1$ και ότι $3 = \dim \mathsf{P}_2(\mathbb{R}) = \dim \mathrm{Ker}T + \dim \mathrm{Im}T$. Αυτό δεν είναι τυχαίο όπως φαίνεται παρακάτω:

Θεώρημα 2.4. *(Θέωρημα διάστασης) Έστω* V *διανυσματικός χώρος πεπερασμένης διάστασης και* $T \in \mathcal{L}(V, W)$*. Τότε*

$$\dim V = \dim(\mathrm{Ker}T) + \dim(\mathrm{Im}T).$$

Απόδειξη. Αναζητείστε την στην βιβλιογραφία. □

Πόρισμα 2.1. *Έστω V, W διανυσματικοί χώροι πεπερασμένης διάστασης.*

1) Αν $\dim V > \dim W$ τότε δεν υπάρχει γραμμική απεικόνιση $T : V \to W$ η οποία να είναι $1-1$.

2) Αν $\dim V < \dim W$ τότε δεν υπάρχει γραμμική απεικόνιση $T : V \to W$ η οποία να είναι επί.

Απόδειξη. 1) Έστω $T \in \mathcal{L}(V, W)$. Τότε $\dim(\mathrm{Ker}T) = \dim V - \dim(\mathrm{Im}T) \geq \dim V - \dim W > 0$, συνεπώς επειδή $\dim(\mathrm{Ker}T) \neq 0$, η T δεν είναι $1-1$.

2) Έστω $T \in \mathcal{L}(V, W)$. Τότε $\dim(\mathrm{Im}T) = \dim V - \dim(\mathrm{Ker}T) \leq \dim V < \dim W$ άρα $\mathrm{Im}T \neq W$, συνεπώς η T δεν είναι επί.

□

Θεώρημα 2.5. *Έστω T, W διανυσματικοί χώροι με $\dim V = \dim W$ και $T \in \mathcal{L}(V, W)$. Τότε T είναι $1-1$ εάν και μόνο εάν η T είναι επί.*

Απόδειξη. Η T είναι $1-1 \Leftrightarrow \mathrm{Ker}T = \{0\} \Leftrightarrow \dim(\mathrm{Ker}T) = 0 \Leftrightarrow \dim(\mathrm{Im}T) = \dim V \Leftrightarrow \dim(\mathrm{Im}T) = \dim W \Leftrightarrow \mathrm{Im}T = W \Leftrightarrow$ η T είναι επί, όπου στην προτελευταία συνεπαγωγή χρησιμοποιήσαμε το γεγονός ότι $\mathrm{Im}T < W$. □

Ορισμός 2.3. *Μία γραμμική απεικόνιση $T : V \to W$ ονομάζεται <u>ισομορφισμός</u> (isomorphism) εάν είναι γραμμική, $1-1$ και επί. Στην περίπτωση αυτή οι V, W ονομάζονται <u>ισόμορφοι</u> και συμβολίζουμε με $V \cong W$.*

Συνοψίζοντας έχουμε τα εξής:

Θεώρημα 2.6. *Έστω $T : V \to W$ γραμμική απεικόνιση με $\dim V = \dim W$. Τα εξής είναι ισοδύναμα:*

1) Η T είναι $1-1$.

2) Η T είναι επί.

3) Η T είναι ισομορφισμός.

4) Η T απεικονίζει μία βάση του V σε μία βάση του W.

Το επόμενο θεώρημα αναφέρει ότι κάθε διανυσματικός χώρος πεπερασμένης διάστασης είναι ισόμορφος με τον διανυσματικό χώρο $\mathbb{F}^n$.

Θεώρημα 2.7. *Έστω V διανυσματικός χώρος επί του σώματος $\mathbb{F}$ με $\dim V = n$. Τότε $V \cong \mathbb{F}^n$.*

Απόδειξη. Έστω $\mathrm{B} = \{\beta_1, \ldots, \beta_n\}$ μία βάση του V. Ορίζουμε την απεικόνιση $T : V \to \mathbb{F}^n$ ως εξής: Αν $x = \sum \lambda_i \beta_i \in V$, τότε $T(x) = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$. Αφήνουμε στον αναγνώστη να αποδείξει ότι η T είναι γραμμική, $1-1$ και επί. □

Σημείωση

Ο παραπάνω ισομορφισμός δεν είναι " κανονικός ", υπό την έννοια ότι εξαρτάται από την επιλογή της βάσης B.

Πόρισμα 2.2. *Έστω V, W διανυσματικοί χώροι πεπερασμένης διάστασης. Τότε $V \cong W$ εάν και μόνο εάν* $\dim V = \dim W$.

Απόδειξη. Άσκηση. □

Θα δούμε τώρα κάποιες σημαντικές εφαρμογές των παραπάνω, οι οποίες αποτελούν κάποια πρώτα αποτελέσματα στα γραμμικά συστήματα.

Έστω $T : \mathbb{F}^n \to \mathbb{F}^m$ η γραμμική απεικόνιση με τύπο $T(x_1, \ldots, x_n) = (\sum_{k=1}^n \alpha_{1k} x_k, \ldots, \sum_{k=1}^n \alpha_{mk} x_k)$, $(\alpha_{jk} \in \mathbb{F})$. Θεωρούμε την εξίσωση $T(x_1, \ldots, x_n) = (0, \ldots, 0)$, η οποία ισοδυναμεί με το παρακάτω ομογενές γραμμικό σύστημα m εξισώσεων με n αγνώστους $x_1, \ldots, x_n$:

$$\begin{cases} \sum_{k=1}^n \alpha_{1k} x_k & = 0 \\ \vdots & \vdots \\ \sum_{k=1}^n \alpha_{mk} x_k & = 0 \end{cases}.$$

Μία προφανής λύση του συστήματος αυτού είναι η τετριμμένη λύση $x_1 = \cdots = x_n = 0$. Το ερώτημα είναι εάν υπάρχουν και άλλες λύσεις του συστήματος αυτού, το οποίο ισοδυναμεί με το κατά πόσον $\mathrm{Ker}T \neq \{0\}$. Από το Θεώρημα 2.2 αυτό συμβαίνει όταν η T δεν είναι $1-1$, συνεπώς απο το Πόρισμα 2.1 θα πρέπει να ισχύει $n > m$.

Συμπέρασμα

Ένα ομογενές γραμμικό σύστημα έχει μη τετριμμένη λύση εάν ο αριθμός των αγνώστων είναι μεγαλύτερος από τον αριθμό των εξισώσεων.

Για παράδειγμα, το σύστημα

$$\begin{cases} -2x_1 + 7x_2 + 4x_3 & = 0 \\ x_1 - 8x_2 + 10x_3 & = 0 \end{cases}$$

έχει μία τουλάχιστον μη τετριμμένη λύση.

2.2 Πίνακες

Θυμίζουμε ότι το σύνολο $\mathsf{M}_{m\times n}(\mathbb{F})$ όλων των $m \times n$ πινάκων αποτελεί έναν διανυσματικό χώρο διάστασης mn με πράξεις το άθροισμα πινάκων και βαθμωτό πολλαπλασιασμό ενός αριθμού $\lambda \in \mathbb{F}$ με έναν πίνακα $A \in \mathsf{M}_{m\times n}(\mathbb{F})$.

Θα ορίσουμε τώρα το γινόμενο δύο πινάκων με τρόπο κάπως μη αναμενόμενο, αλλά αυτός θα εξηγηθεί σύντομα.

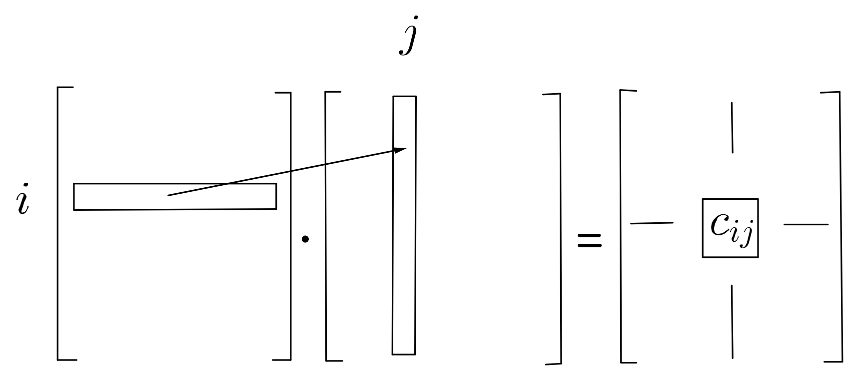
Ορισμός 2.4. *Έστω $A = (\alpha_{ij}) \in \mathsf{M}_{m\times n}(\mathbb{F})$ και $B = (\beta_{ij}) \in \mathsf{M}_{n\times k}(\mathbb{F})$. Το γινόμενο AB είναι ο πίνακας $\mathsf{M}_{m\times k}(\mathbb{F})$ του οποίου το στοιχείο c_{ij} δίνεται ως*

$$c_{ij} = \alpha_{i1}\beta_{1j} + \cdots + \alpha_{in}\beta_{nj}.$$

Παράδειγμα

Έστω $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 1 \end{pmatrix}$ και $B = \begin{pmatrix} 7 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. Τότε

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 9 & 15 \\ 23 & 16 & 26 \end{pmatrix}.$$



Παρατηρήσεις

1) Γενικά είναι $AB \neq BA$. Πράγματι, έστω $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Τότε

$$AB = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 12 & 3 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 5 & 8 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = BA.$$

2) Είναι δυνατόν να έχουμε $AB = \mathbf{0}$ ενώ $A, B \neq \mathbf{0}$. Πράγματι, για $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ είναι $AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Ισχύουν οι εξής ιδιότητες (άσκηση):

1) $A(B+C) = AB + AC$.

2) $(A+B)C = AC + BC$.

3) $A(BC) = (AB)C$.

4) $\lambda(AB) = (\lambda A)B = A(\lambda B)$.

για πίνακες A, B, C ώστε τα γινόμενα να ορίζονται. Παρατηρήστε επίσης τις παρακάτω ταυτίσεις για πίνακες - γραμμές και πίνακες - στήλες με στοιχεία του $\mathbb{F}^n$.

$$\mathsf{M}_{1\times n}(\mathbb{F}) \ni \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{pmatrix} \longleftrightarrow (a_1, a_2, \ldots, a_n) \in \mathbb{F}^n,$$

$$\mathsf{M}_{n\times 1}(\mathbb{F}) \ni \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \longleftrightarrow (a_1, a_2, \ldots, a_n) \in \mathbb{F}^n.$$

Ορισμός 2.5. *Ένας πίνακας $A \in \mathsf{M}_{n\times n}(\mathbb{F})$ ονομάζεται αντιστρέψιμος εάν υπάρχει πίνακας $B \in \mathsf{M}_{n\times n}(\mathbb{F})$ τέτοιος ώστε $AB = BA = I_n$. Εδώ $I_n = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$ είναι ο ταυτοτικός πίνακας.*

Παρατηρήσεις

1) Αποδεικνύεται (εύκολα) ότι ο πίνακας B είναι μοναδικός. Τον συμβολίζουμε με A^{-1} και ονομάζεται ο αντίστοφος (inverse) του A.

2) Αποδεικνύεται (κάπως πιο δύσκολα) ότι ο A είναι αντιστρέψιμος εάν και μόνο εάν υπάρχει πίνακας B ώστε $AB = I_n$.

Παράδειγμα

Έστω $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$. Τότε $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$. Ανακύπτει άμεσα ένα πρόβλημα το πώς βρίσκουμε τον αντίστροφο ενός πίνακα, το οποίο θα επιλυθεί αργότερα.

Ιδιότητες του αντιστρόφου

1) $(A^{-1})^{-1} = A$.

2) Αν A, B είναι αντιστρέψιμοι, τότε ο AB είναι αντιστρέψιμος και $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

3) Γενικά ισχύει $(A_1A_2 \cdots A_n)^{-1} = A_n^{-1} \cdots A_2^{-1}A_1^{-1}$.

Θυμίζουμε ότι ο <u>ανάστροφος</u> ενός $m \times n$ πίνακα A είναι ο $n \times m$ πίνακας A^t που προκύπτει από τον A αντιμεταθέτοντας γραμμές και στήλες.

Ιδιότητες του αναστρόφου

1) $(A + B)^t = A^t + B^t$.

2) $(\lambda A)^t = \lambda A^t$.

3) $(AB)^t = B^tA^t$.

4) $(A^t)^t = A$.

5) Αν ο A είναι αντιστρέψιμος τότε ο A^t είναι αντιστρέψιμος και $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$.

2.3 Πίνακες και γραμμικές απεικονίσεις

Η παράγραφος αυτή αποτελεί ένα από τα πιο κεντρικά σημεία της Γραμμικής Άλγεβρας. Θα δούμε ότι υπάρχει μία $1-1$ και επί αντιστοιχία μεταξύ γραμμικών απεικονίσεων και πινάκων, συνεπώς, το κατά κάποιον τρόπο, δύσκολο πρόβλημα της μελέτης γραμμικών απεικονίσεων ανάγεται σε καθαρά υπολογιστικό πρόβλημα μεταξύ πινάκων.

Ορισμός 2.6. *Μία <u>διατεταγμένη βάση</u> ενός διανυσματικού χώρου V πεπερασμένης διάστασης είναι μία βάση του V στην οποία έχουμε καθορίσει την σειρά διάταξης των* *στοιχείων της.*

Παράδειγμα
Έστω $V = \mathbb{F}^3$. Τα σύνολα $\mathrm{B} = \{e_1, e_2, e_3\}$ και $\Gamma = \{e_2, e_1, e_3\}$ είναι δύο διατεταγμένες βάσεις του V και ως τέτοια σύνολα $\mathrm{B} \neq \Gamma$.

Αν $\mathrm{B} = \{\beta_1, \dots, \beta_n\}$ είναι μία διατεταγμένη βάση του V και $V \ni x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \beta_i$, τότε οι αριθμοί $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{F}$ ονομάζονται οι <u>συντεταγμένες</u> του x ως προς την βάση B και γράφουμε $[x]_{\mathrm{B}} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}$.

Έστω τώρα V, W διανυσματικοί χώροι διαστάσεων n και m με διατεταγμένες βάσεις $\mathrm{B} = \{\beta_1, \dots, \beta_n\}$, $\Gamma = \{\gamma_1, \dots, \gamma_m\}$ αντίστοιχα. Έστω $T : V \to W$ γραμμική απεικόνιση. Τότε ισχύει

$$\begin{aligned} T(\beta_1) &= \alpha_{11}\gamma_1 + \alpha_{21}\gamma_2 + \cdots + \alpha_{m1}\gamma_m, \\ T(\beta_2) &= \alpha_{12}\gamma_1 + \alpha_{22}\gamma_2 + \cdots + \alpha_{m2}\gamma_m, \\ &\vdots \\ T(\beta_n) &= \alpha_{1n}\gamma_1 + \alpha_{2n}\gamma_2 + \cdots + \alpha_{mn}\gamma_m, \end{aligned}$$

για κάποια $\alpha_{ij} \in \mathbb{F}$.

Ο $m \times n$ πίνακας

$$A = [T]_{\mathrm{B}}^{\Gamma} = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \cdots & \alpha_{mn} \end{pmatrix}$$

ονομάζεται <u>ο πίνακας της T ως προς τις (διατεταγμένες) βάσεις B και Γ</u>. Εάν $\mathrm{B} = \Gamma$ γράφουμε $[T]_{\mathrm{B}}$. Έτσι λοιπόν είναι

$$[T]_{\mathrm{B}}^{\Gamma} = \begin{pmatrix} \uparrow & \uparrow & & \uparrow \\ T(\beta_1) & T(\beta_2) & \cdots & T(\beta_n) \\ \downarrow & \downarrow & & \downarrow \end{pmatrix}.$$

Παραδείγματα
1) Θα βρούμε τον πίνακα της γραμμικής απεικόνισης $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $T(a_1, a_2, a_3) = (2a_1 + 3a_2 - a_3, a_1 + a_3)$ ως προς τις κανονικές διατεταγμένες B και Γ βάσεις των $\mathbb{R}^3$, $\mathbb{R}^2$, αντίστοιχα.

Έστω $\mathrm{B} = \{e_1, e_2, e_3\} = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$ και $\Gamma = \{f_1, f_2\} = \{(1,0), (0,1)\}$. Τότε

$$\begin{aligned} T(e_1) &= (2,0) = 2f_1 + 0f_2, \\ T(e_2) &= (3,0) = 3f_1 + 0f_2, \\ T(e_3) &= (-1,1) = -f_1 + f_2. \end{aligned}$$

Συνεπώς, $[T]_{\mathrm{B}}^{\Gamma} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathsf{M}_{2\times 3}(\mathbb{R})$.

2) Έστω $T : \mathsf{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \to \mathsf{P}_2(\mathbb{R})$ με $T\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = (a+b) + (2d)x + bx^2$. Έστω $\mathrm{B} = \{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\}$ και $\Gamma = \{1, x, x^2\}$. Θα βρούμε τον πίνακα $[T]_{\mathrm{B}}^{\Gamma}$. Είναι

$$\begin{aligned} T\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} &= 1 = 1\cdot 1 + 0\cdot x + 0\cdot x^2, \\ T\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} &= 1 + x^2 = 1\cdot 1 + 0\cdot x + 1\cdot x^2, \\ T\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} &= 0 = 0\cdot 1 + 0\cdot x + 0\cdot x^2, \\ T\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} &= 2x = 0\cdot 1 + 2\cdot x + 0\cdot x^2. \end{aligned}$$

Συνεπώς, $[T]_{\mathrm{B}}^{\Gamma} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathsf{M}_{3\times 4}(\mathbb{R})$.

Παρατηρήσεις

1) Είναι σαφές ότι ο πίνακας μιας γραμμικής απεικόνισης εξαρτάται από την επιλογή των διατεταγμένων βάσεων. Θα διαπιστώσουμε όμως ότι αυτό δεν επηρεάζει την ανάπτυξη της θεωρίας της Γραμμικής Άλγεβρας.

2) Ο λόγος που παίρνουμε τον ανάστροφο του πίνακα που προκύπτει όταν γράφουμε τα στοιχεία $T(\beta_j)$ $(j = 1, \ldots, n)$ ως γραμμικούς συνδυασμούς των γ_i $(i = 1, \ldots, m)$, είναι καθαρά τεχνικός. Μια πρόχειρη εξήγηση είναι ότι αν $T : V \to W$ είναι γραμμική και $A = [T]_{\mathrm{B}}^{\Gamma}$, τότε ισχύει $[T(x)]_{\Gamma} = A[x]_{\mathrm{B}}$ (ως ισότητα $m \times 1$ πινάκων).

Αντίστροφα, αν $\mathrm{B} = \{\beta_1, \dots, \beta_n\}$ και $\Gamma = \{\gamma_1, \dots, \gamma_m\}$ είναι διατεταγμένες βάσεις των V, W αντίστοιχα και $A \in \mathsf{M}_{m\times n}(\mathbb{F})$ τότε αποδεικνύεται ότι υπάρχει μοναδική γραμμική απεικόνιση $T : V \to W$ τέτοια ώστε $T(\beta_i) = \gamma_i$ $(i = 1, \dots, n)$, συνεπώς $[T]_{\mathrm{B}}^{\Gamma} = A$. Συνεπώς, υπάρχει μία $1-1$ και επί απεικόνιση

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(V, W) &\longrightarrow \mathsf{M}_{m\times n}(\mathbb{F}), \\ T &\longmapsto [T]_{\mathrm{B}}^{\Gamma}, \end{aligned}$$

η οποία είναι επιπλέον γραμμική λόγω του παρακάτω θεωρήματος:

Θεώρημα 2.8. *Έστω $T, U : V \to W$ γραμμικές, B, Γ διατεταγμένες βάσεις των V, W αντίστοιχα. Τότε*

1) $[T + U]_{\mathrm{B}}^{\Gamma} = [T]_{\mathrm{B}}^{\Gamma} + [U]_{\mathrm{B}}^{\Gamma}$,

2) $[\lambda T]_{\mathrm{B}}^{\Gamma} = \lambda [T]_{\mathrm{B}}^{\Gamma}$ $(\lambda \in \mathbb{F})$.

Πόρισμα 2.3. $\dim \mathcal{L}(V, W) = mn$.

2.4 Σύνθεση γραμμικών απεικονίσεων και πολλαπλασιασμός πινάκων.

Θα δούμε τώρα ότι ο τρόπος που ορίστηκε ο πολλαπλασιασμός πινάκων εξηγείται κατά φυσικό τρόπο από τη μορφή του πίνακα της σύνθεσης δύο γραμμικών απεικονίσεων.

Θεώρημα 2.9. *Έστω V, W, Z διανυσματικοί χώροι επί του ίδιου σώματος $\mathbb{F}$ και έστω $T : V \to W$, $U : W \to Z$ γραμμικές. Τότε η σύνθεση $U \circ T : V \to Z$ είναι γραμμική.*

Θεώρημα 2.10. *Έστω $T, U_1, U_2 : V \to V$ γραμμικές απεικονίσεις. Τότε ισχύουν τα εξής:*

1) $T \circ (U_1 + U_2) = T \circ U_1 + T \circ U_2$, $(U_1 + U_2) \circ T = U_1 \circ T + U_2 \circ T$,

2) $T \circ (U_1 \circ U_2) = (T \circ U_1) \circ U_2$,

3) $T \circ \mathsf{Id}_V = \mathsf{Id}_V \circ T = T$,

4) $\lambda(U_1 \circ U_2) = (\lambda U_1) \circ U_2 = U_1 \circ (\lambda U_2)$ *για κάθε* $\lambda \in \mathbb{F}$.

Το βασικό αποτέλεσμα είναι το εξής:

Θεώρημα 2.11. *Έστω V, W, Z διανυσματικοί χώροι πεπερασμένης διάστασης με αντίστοιχες διατεταγμένες βάσεις* $\mathrm{A}, \mathrm{B}, \Gamma$. *Έστω* $T \in \mathcal{L}(V, W), S \in \mathcal{L}(W, Z)$. *Τότε* $[S \circ T]_{\mathrm{A}}^{\Gamma} = [S]_{\mathrm{B}}^{\Gamma}[T]_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}}$.

Μία ιδιαίτερα χρήσιμη απεικόνιση που μας βοηθάει να κατανοήσουμε την ακριβή σχέση μεταξύ γραμμικών απεικονίσεων και πινάκων είναι η αριστερή μεταφορά, $L_A : \mathbb{F}^n \to \mathbb{F}^m, L_A(x) = Ax$, όπου $A \in \mathsf{M}_{m\times n}(\mathbb{F})$.

Παράδειγμα

Έστω $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} \in \mathsf{M}_{2\times 3}(\mathbb{R})$. Τότε $L_A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ και για $x = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ έχουμε

$$L_A(x) = Ax = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ 8 \end{pmatrix}.$$

Για κάθε $A \in \mathsf{M}_{m\times n}(\mathbb{F})$ η απεικόνιση $L_A : \mathbb{F}^n \to \mathbb{F}^m$ ικανοποιεί τις εξής ιδιότητες:

1) $[L_A]_{\mathrm{B}}^{\Gamma} = A$, όπου B, Γ οι κανονικές διατεταγμένες βάσεις των $\mathbb{F}^n, \mathbb{F}^m$ αντίστοιχα.

2) $L_A = L_B$ εάν και μόνο εάν $A = B$.

3) $L_{A+B} = L_A + L_B$, $L_{\lambda A} = \lambda L_A$ $(\lambda \in \mathbb{F})$.

4) Αν $T \in \mathcal{L}(\mathbb{F}^n, \mathbb{F}^m)$, τότε ο πίνακας $A = [T]_{\mathrm{B}}^{\Gamma}$ είναι ο μοναδικός $m \times n$ πίνακας που ικανοποιεί την $T = L_A$.

5) Αν $E \in \mathsf{M}_{n\times p}(\mathbb{F})$, τότε $L_{AE} = L_A L_E$.

6) Αν $m = n$, τότε $L_{I_n} = \mathsf{Id}_{\mathbb{F}^n}$.

7) Αν ο A είναι αντιστρέψιμος, τότε η L_A είναι αντιστρέψιμη και $(L_A)^{-1} = L_{A^{-1}}$.

Θυμίζουμε ότι κάθε διανυσματικός χώρος V επί του $\mathbb{F}$ διάστασης n είναι ισόμορφος με τον διανυσματικό χώρο $\mathbb{F}^n$. Ο ισομορφισμός αυτός εξαρτάται από επιλογή μιας διατεταγμένης βάσης $\mathrm{B} = \{\beta_1, \ldots, \beta_n\}$ στον V και δίνεται ως εξής:

Έστω $x = \sum \lambda_i \beta_i \in V$ και $[x]_{\mathrm{B}} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}$. Τότε $\phi_{\mathrm{B}} : V \to \mathbb{F}^n$, $\phi_{\mathrm{B}}(x) = [x]_{\mathrm{B}}$.

Αν τώρα V, W είναι δύο διανυσματικοί χώροι διάστασης n, m αντίστοιχα, και $T \in \mathcal{L}(V, W)$, τότε το παρακάτω διάγραμμα είναι μεταθετικό, δηλαδή ισχύει $L_{\mathrm{A}} \circ \phi_{\mathrm{B}} = \phi_{\Gamma} \circ T$:

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{T} & W \\ {\scriptstyle \phi_{\mathrm{B}}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \phi_{\Gamma}} \\ \mathbb{F}^n & \xrightarrow{L_A} & \mathbb{F}^m \end{array}$$

Άσκηση

Έστω $T : \mathsf{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \to \mathsf{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ η γραμμική απεικόνιση με $T(M) = M^t$. Θεωρούμε την κανονική βάση $\mathrm{B} = \{E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22}\}$ του $\mathsf{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ όπου E_{ij} ο 2×2 πίνακας με 1 στην (i, j) θέση και 0 στις άλλες θέσεις.

i) Αποδείξτε ότι $[T]_{\mathrm{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

ii) Πιστοποιήστε την ισότητα $(L_A \circ \phi_{\mathrm{B}})(M) = (\phi_{\mathrm{B}} \circ T)(M)$, όπου $A = [T]_{\mathrm{B}}$ και $M = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

2.5 Αντιστρεψιμότητα γραμμικών απεικονίσεων και πινάκων.

Το ερώτημα κατά πόσον μία γραμμική απεικόνιση είναι αντιστρέψιμη, μεταφέρεται πλέον με φυσικό τρόπο στο ερώτημα κατά πόσον ο πίνακας της γραμμικής απεικόνισης (ως προς κάποιες βάσεις αλλά όπως θα δούμε σύντομα και ως προς οποιεσδήποτε βάσεις) είναι αντιστρέψιμος.

Ορισμός 2.7. *Έστω $T \in \mathcal{L}(V, W)$. Μία απεικόνιση $S : W \to V$ ονομάζεται αντίστροφη (inverse) της T εάν $T \circ S = \mathsf{Id}_W$ και $S \circ T = \mathsf{Id}_V$. Εάν η T έχει αντίστροφη τότε η T ονομάζεται αντιστρέψιμη (invertible).*

Παρατηρήσεις

1) Εάν η T είναι αντιστρέψιμη, τότε η αντίστροφή της είναι μοναδική και συμβολίζεται με T^{-1}.

2) Ισχύουν οι ιδιότητες:

i) $(T \circ S)^{-1} = S^{-1} \circ T^{-1}$.

ii) $(T^{-1})^{-1} = T$. Άρα η T^{-1} είναι αντιστρέψιμη.

iii) Έστω V, W διανυσματικοί χώροι με $\dim V = \dim W < \infty$ και $T \in \mathcal{L}(V, W)$. Λόγω του Θεωρήματος 2.5 η T είναι αντιστρέψιμη εάν και μόνο εάν $\dim(\mathrm{Im}(T)) = \dim V$.

Θεώρημα 2.12. *Έστω $T \in \mathcal{L}(V, W)$ και έστω ότι η T είναι αντιστρέψιμη. Τότε η $T^{-1} : W \to V$ είναι γραμμική.*

Πρόταση 2.3. *Έστω $T \in \mathcal{L}(V, W)$ αντιστρέψιμη. Τότε ο διανυσματικός χώρος V είναι πεπερασμένης διάστασης εάν και μόνο εάν ο W είναι πεπερασμένης διάστασης. Στην περίπτωση που συμβαίνει ένα από τα πιο πάνω είναι $\dim V = \dim W$.*

Απόδειξη. Έστω ότι V είναι πεπερασμένης διάστασης και έστω $\mathrm{B} = \{\beta_1, \ldots, \beta_n\}$ μία βάση του V. Τότε $\mathrm{span}(T(\beta)) = \mathrm{Im}(T) = W$, άρα ο W είναι πεπερασμένης διάστασης. Αντίστροφα, αν ο W είναι πεπερασμένης διάστασης με ανάλογο τρόπο (χρησιμοποιώντας την T^{-1}) προκύπτει ότι ο V είναι πεπερασμένης διάστασης. Ας υποθέσουμε τώρα ότι οι V, W είναι πεπερασμένης διάστασης. Επειδή η T είναι $1-1$ και επί είναι $\dim(\mathrm{Ker}T) = \{0\}$ και $\dim(\mathrm{Im}T) = \dim W$. Από το Θεώρημα 2.4 (Διάστασης) προκύπτει ότι $\dim V = \dim W$. □

Ερχόμαστε τώρα να δούμε τη σχέση μεταξύ αντιστρεψιμότητας γραμμικών απεικονίσεων και πινάκων. Θυμίζουμε ότι δεν έχουμε αναπτύξει ακόμα μία αποτελεσματική μέθοδο υπολογισμού του αντίστροφου ενός πίνακα, αλλά αυτό θα γίνει στο επόμενο κεφάλαιο.

Θεώρημα 2.13. *Έστω V, W διανυσματικοί χώροι πεπερασμέμης διάστασης με διατεταγμένες βάσεις B και Γ αντίστοιχα. Έστω $T \in \mathcal{L}(V, W)$. Τότε η T είναι αντιστρέψιμη εάν και μόνο εάν ο πίνακας $[T]_{\mathrm{B}}^{\Gamma}$ είναι αντιστρέψιμος. Επιπλέον, $[T^{-1}]_{\Gamma}^{\mathrm{B}} = ([T]_{\mathrm{B}}^{\Gamma})^{-1}$.*

Πόρισμα 2.4. *Έστω A ένας $n \times n$ πίνακας. Τότε ο A είναι αντιστρέψιμος εάν και μόνο εάν η απεικόνιση $L_A : \mathbb{F}^n \to \mathbb{F}^n$ είναι αντιστρέψιμη. Επιπλέον, $(L_A)^{-1} = L_{A^{-1}}$.*

Παραδείγματα

1) Έστω $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ με $T(a_1, a_2) = (a_1 - 2a_2, a_2, 3a_1 + 4a_2)$. Επειδή $\dim \mathbb{R}^2 \neq \dim \mathbb{R}^3$ η T δεν είναι αντιστρέψιμη (γιατί;).

2) Έστω $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ με $T(a_1, a_2, a_3) = (3a_1 - 2a_3, a_2, 3a_1 + 4a_2)$. Υπολογίζουμε τον πυρήνα της T. Είναι $(a_1, a_2, a_3) \in \mathrm{Ker}T$ εάν και μόνο εάν $\{3a_1 - 2a_3 = 0, a_2 = 0, 3a_1 + 4a_2 = 0\}$, από όπου άμεσα προκύπτει ότι $(a_1, a_2, a_3) = (0, 0, 0)$, συνεπώς η T είναι $1 - 1$. Επειδή η T είναι γραμμική απεικόνιση μεταξύ χώρων ίσης διάστασης, η T είναι αντιστρέψιμη.

3) Έστω $T : \mathsf{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \to \mathsf{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ με $T\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+b & a \\ c & c+d \end{pmatrix}$. Η T είναι γραμμική απεικόνιση μεταξύ χώρων ίσης διάστασης, η οποία είναι $1-1$ ($\mathrm{Ker}T = \{0\}$) συνεπώς η T είναι αντιστρέψιμη.

2.6 Αλλαγή βάσεων

Έχουμε δει ότι ένας διανυσματικός χώρος πεπερασμένης διάστασης μπορεί να έχει πολλές βάσεις. Η επιλογή της βάσης, προκειμένου να μελετήσουμε γραμμικές απεικονίσεις καθώς και αναλλοίωτες ποσότητες που σχετίζονται με αυτές (π.χ. πίνακας γραμμικής απεικόνισης, ορίζουσα κ.λ.π.), δεν έχει σημασία. Όπως θα δούμε δύο βάσεις σχετίζονται με έναν πίνακα μετάβασης, συνεπώς η ανάπτυξη της θεωρίας της γραμμικής άλγεβρας αναπτύσσεται ανεξάρτητα από την επιλογή βάσεων.

Ορισμός 2.8. *Έστω B, B' δύο βάσεις σε έναν διανυσματικό χώρο V πεπερασμένης διάστασης και θεωρούμε την ταυτοτική απεικόνιση $\mathsf{Id}_V : V \to V$. Ο πίνακας $Q = [\mathsf{Id}_V]_{\mathrm{B}}^{\mathrm{B}'}$ ονομάζεται πίνακας αλλαγής βάσης ή πίνακας μετάβασης από την βάση B στην βάση B'.*

Πρόταση 2.4. *1) Ο πίνακας Q όπως ορίστηκε παραπάνω είναι αντιστρέψιμος και $Q^{-1} = [\mathsf{Id}_V]_{\mathrm{B}'}^{\mathrm{B}}$.*

2) Για κάθε $v \in V$ ισχύει $[v]_{\mathrm{B}'} = Q[v]_{\mathrm{B}}$.

Θεώρημα 2.14. *Έστω V, W διανυσματικοί χώροι πεπερασμένης διάστασης και έστω $T \in \mathcal{L}(V, W)$. Έστω $\mathrm{B}_1, \mathrm{B}_2$ δύο βάσεις του V, Γ_1, Γ_2 δύο βάσεις του W και έστω $[T]_{\mathrm{B}_1}^{\Gamma_1}, [T]_{\mathrm{B}_2}^{\Gamma_2}$ οι πίνακες της T ως προς τις αντίστοιχες βάσεις. Τότε ισχύει*

$$[T]_{\mathrm{B}_2}^{\Gamma_2} = Q[T]_{\mathrm{B}_1}^{\Gamma_1} P,$$

όπου Q ο πίνακας μετάβασης από την Γ_1 στην Γ_2 και Q ο πίνακας μετάβασης από την B_2 στην B_1.

Πόρισμα 2.5. *Έστω $T \in \mathcal{L}(V)$ και B, B' δύο βάσεις του V με πίνακα μετάβασης $Q = [T]_{\mathrm{B}'}^{\mathrm{B}}$. Τότε ισχύει*

$$[T]_{\mathrm{B}'} = Q^{-1}[T]_{\mathrm{B}} Q.$$

Πόρισμα 2.6. *Έστω $A \in \mathsf{M}_{n\times n}(\mathbb{F})$ και $\Gamma = \{\gamma_1, \dots, \gamma_n\}$ μία διατεταγμένη βάση του $\mathbb{F}^n$. Τότε ισχύει $[L_A]_\Gamma = Q^{-1}AQ$, όπου Q είναι ο $n \times n$ πίνακας του οποίου η j-στήλη είναι το διάνυσμα γ_j.*

Παραδείγματα

1) Έστω $V = \mathbb{R}^2$. Βρείτε τον πίνακα αλλαγής βάσης από την $\mathrm{B} = \{(1,0),(0,1)\}$ στην $\mathrm{B}' = \{(2,5),(-1,-3)\}$. Είναι ευκολότερο να βρούμε πρώτα τον πίνακα αλλαγής από την B' στην B και μετά να βρούμε τον αντίστροφο αυτού. Είναι

$$\begin{aligned} \mathsf{Id}_V(2,5) &= (2,5) = 2(1,0) + 5(0,1), \\ \mathsf{Id}_V(-1,-3) &= (-1,-3) = -1(1,0) - 3(0,1). \end{aligned}$$

Συνεπώς, $[\mathsf{Id}]_{\mathrm{B}'}^{\mathrm{B}} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}$. Εύκολα προκύπτει ότι $[\mathsf{Id}]_{\mathrm{B}}^{\mathrm{B}'} = ([\mathsf{Id}]_{\mathrm{B}'}^{\mathrm{B}})^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}$.

<u>Σημείωση</u>

Επειδή δεν έχουμε δει ακόμα ένα γενικό τρόπο υπολογισμού του αντίστροφου ενός πίνακα, για την απλή περίπτωση ενός 2×2 πίνακα όπως εδώ, κάνουμε το εξής: Αναζητούμε έναν 2×2 πίνακα $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ με την ιδιότητα

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 5 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

και λύνουμε το απλό γραμμικό σύστημα.

2) Έστω $T : \mathsf{P}_1(\mathbb{R}) \to \mathsf{P}_1(\mathbb{R})$ με $T(p(x)) = p'(x)$. Έστω $\mathrm{B} = \{1, x\}$ και $\mathrm{B}' = \{1+x, 1-x\}$. Λαμβάνοντας υπόψη το γεγονός ότι $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$ υπολογίστε τον πίνακα $[T]_{\mathrm{B}'}$. Θα βρούμε πρώτα τον πίνακα αλλαγής βάσης από την B' στην B. Είναι

$$\begin{aligned} 1 + x &= 1 \cdot 1 + 1 \cdot x, \\ 1 - x &= 1 \cdot 1 - 1 \cdot x, \end{aligned}$$

συνεπώς, $Q = [\mathsf{Id}]_{\mathrm{B}'}^{\mathrm{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$. Στη συνέχεια, θα βρούμε τον πίνακα $[T]_{\mathrm{B}}$. Είναι

$$T(1) = 0 = 0 \cdot 1 + 0 \cdot x,$$

$$T(x) = 1 = 1 \cdot 1 + 0 \cdot x,$$

συνεπώς, $[T]_{\mathrm{B}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Άρα από το Πόρισμα 2.5 και την υπόθεση είναι

$$[T]_{\mathrm{B}'} = Q^{-1}[T]_{\mathrm{B}}Q = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Ορισμός 2.9. *Δύο πίνακες $A, B \in \mathsf{M}_{n\times n}(\mathbb{F})$ ονομάζονται όμοιοι (similar) εάν υπάρχει αντιστρέψιμος πίνακας Q τέτοιος ώστε $B = Q^{-1}AQ$. Συμβολισμός $A \sim B$.*

Σημείωση

Η σχέση ομοιότητας πινάκων είναι σχέση ισοδυναμίας, δηλαδή ισχύουν τα εξής:

i) $A \sim A$.

ii) Αν $A \sim B$ τότε $B \sim A$.

iii) Εάν $A \sim B$ και $B \sim \Gamma$ τότε $A \sim \Gamma$.

2.7 Ασκήσεις

1) Έστω $\{a_1, a_2, a_3\}$ μία βάση του διανυσματικού χώρου V με $\dim V = 3$. Έστω $T \in \mathcal{L}(V)$ για τον οποίο έχουμε

$$T(a_1) = a_1, T(a_2) = a_1 + a_2, T(a_3) = a_1 + a_2 + a_3.$$

   i) Να δειχθεί ότι ο T είναι αντιστρέψιμος.

   ii) Να βρεθεί ο T^{-1}.

   iii) Να βρεθεί ο $2T - T^{-1}$.

2) Έστω $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$. Αν για τον T ισχύει ότι

$$T\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\3\\-1\end{pmatrix}, T\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\0\\-2\end{pmatrix}, T\begin{pmatrix}-2\\7\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\3\\-1\end{pmatrix},$$

τότε να βρεθούν η εικόνα $\mathrm{Im}(T)$, ο πίνακας $[T]_{\mathrm{B}}$ και ο τύπος του τελεστή T.

3) Έστω V ένας διανυσματικός χώρος με $\dim V = 4$ και έστω $\mathrm{B} = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ μία βάση αυτού. Έστω $T \in \mathcal{L}(V)$ τέτοιος ώστε

$$[T]_{\mathrm{B}} = \begin{pmatrix}1 & 0 & 2 & 1\\-1 & 2 & 1 & 3\\1 & 2 & 5 & 5\\2 & -2 & 1 & -2\end{pmatrix}.$$

   i) Να βρεθεί ο $\mathrm{Ker}(T)$.

   ii) Να βρεθεί η $\mathrm{Im}(T)$.

iii) Αφού επεκτείνετε μία βάση του $\mathrm{Ker}(T)$ σε μία βάση του V, να βρεθεί ο πίνακας του T ως προς αυτήν την βάση.

4) Έστω $E_{ij} \in \mathsf{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ τέτοιος ώστε η (i,j)-θέση να είναι 1 και όλες οι άλλες να είναι 0, $i,j = 1,2$. Αν
$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix},$$
τότε ορίζουμε την απεικόνιση $T : \mathsf{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \to \mathsf{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ ως
$$T(u) = Au,\ u \in \mathsf{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}).$$

i) Να δειχθεί ότι $T \in \mathcal{L}(\mathsf{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}))$.

ii) Να βρεθεί ο πίνακας $[T]_{\mathrm{B}}$, όπου Β είναι η βάση που αποτελείται από τους πίνακες $\{E_{ij},\ i,j = 1,2\}$.

iii) Να βρεθούν τα $\mathrm{Im}(T)$, $\dim(\mathrm{Im}(T))$ και μία βάση αυτής.

iv) Να βρεθούν τα $\mathrm{Ker}(T)$, $\dim(\mathrm{Ker}(T)$ και μία βάση αυτού.

5) Έστω ο διανυσματικός χώρος $\mathsf{P}_n(x)$ επί του $\mathbb{R}$. Ορίζουμε την απεικόνιση $T : \mathsf{P}_n(x) \to \mathsf{P}_n(x)$ από την
$$T(p(x)) = xp'(x) - p(x),\ p(x) \in \mathsf{P}_n(x).$$

i) Να δειχθεί ότι $\mathcal{L}(\mathsf{P}_n(x))$.

ii) Να βρεθούν οι υπόχωροι $\mathrm{Ker}(T)$ και $\mathrm{Im}(T)$.

iii) Να δειχθεί ότι $\mathsf{P}_n(x) = \mathrm{Ker}(T) \oplus \mathrm{Im}(T)$.

6) Για τις ακόλουθες απεικονίσεις $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, να δείξετε για ποιόν λόγο γιατί δεν είναι γραμμικές.

i) $T(a_1, a_2) = (1, a_2)$.

ii) $T(a_1, a_2) = (\sin a_1, 0)$.

iii) $T(a_1, a_2) = (|a_1|, a_2)$.

iv) $T(a_1, a_2) = (a_1 + 1, a_2)$.

7) Έστω $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ τέτοιος ώστε $T(1,0) = (1,4)$ και $T(1,1) = (2,5)$. Να βρεθεί η τιμή $T(2,3)$ και να εξετασθεί αν η T είναι $1-1$.

8) Υπάρχει γραμμική απεικόνιση $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ τέτοια ώστε $T(1,0,3) = (1,1)$ και $T(-2,0,-6) = (2,1)$;

9) Έστω $T : \mathsf{P}(\mathbb{R}) \to \mathsf{P}(\mathbb{R})$, $T(f)(x) = \int_0^x f(t)\mathrm{d}t$. Να δειχθεί ότι ο T είναι $1-1$ αλλά ότι δεν είναι επί.

10) Έστω V και W διανυσματικοί χώροι και V_1 και W_1 υπόχωροι αυτών, αντίστοιχα. Αν η $T : V \to W$ είναι γραμμική να δειχθεί ότι το $T(V_1)$ είναι ένας υπόχωρος του W και ότι το $\{x \in V : T(x) \in W_1\}$ είναι ένας υπόχωρος του V.

11) Έστω B και B' οι κανονικές βάσεις των διανυσματικών χώρων $\mathbb{R}^n$ και $\mathbb{R}^m$, αντίστοιχα. Να βρεθεί ο πίνακας $[T]_{\mathrm{B}}^{\mathrm{B}'}$ για τις παρακάτω περιπτώσεις:

   i) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2,\ T(a_1, a_2, a_3) = (2a_1 + 3a_2 - a_3, a_1 + a_3)$.

   ii) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R},\ T(a_1, a_2, a_3) = 2a_1 + a_2 - 3a_3$.

   iii) $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n,\ T(a_1, a_2, \ldots, a_n) = (a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1)$.

12) Έστω $T \in \mathcal{L}(V)$. Να δειχθεί ότι $T^2 = 0$ εάν και μόνο εάν $\mathrm{Im}(T) \subset \mathrm{Ker}(T)$.

13) Έστω $T \in \mathcal{L}(V)$, όπου ο διανυσματικός χώρος V είναι πεπερασμένης διάστασης. Να δειχθεί ότι αν $\dim(\mathrm{Im}(T)) = \dim(\mathrm{Im}(T^2))$, τότε $\mathrm{Im}(T) \bigcap \mathrm{Ker}(T) = \{\mathit{0}\}$. Συμπεράνετε ότι $V = \mathrm{Im}(T) \oplus \mathrm{Ker}(T)$.

14) Να δειχθεί ότι αν $A^2 = 0$, τότε ο πίνακας A δεν μπορεί να είναι αντιστρέψιμος.

15) Έστω
$$V = \{ \begin{pmatrix} a & a+b \\ 0 & c \end{pmatrix} : a, b, c \in \mathbb{F} \}.$$
Βρείτε έναν ισομορφισμό από τον διανυσματικό χώρο V στον $\mathbb{F}^3$.

16) Έστω B ένας $n \times n$ αντιστρέψιμος πίνακας. Έστω
$$T : \mathsf{M}_{n\times n}(\mathbb{F}) \to \mathsf{M}_{n\times n}(\mathbb{F}),\ T(A) = B^{-1}AB.$$
Να δειχθεί ότι ο T είναι ένας ισομορφισμός.

17) Έστω $\mathrm{B} = \{x^2 - x + 1, x + 1, x^2 + 1\}$ και $\mathrm{B}' = \{x^2 + x + 4, 4x^2 - 3x + 2, 2x^2 + 3\}$ διατεταγμένες βάσεις του $\mathsf{P}_2(\mathbb{R})$. Να βρεθεί ο πίνακας αλλαγής συντεταγμένων ο οποίος αλλάζει τις B'-συντεταγμένες στις B-συντεταγμένες.

18) Να δειχθεί ότι αν οι πίνακες A, B είναι όμοιοι, τότε $\mathrm{tr}(A) = \mathrm{tr}(B)$.

Βιβλιογραφία

[1] S. Axler: *Linear Algebra Done Right*, 2nd Edition Springer, 1997.

[2] S. H. Friedberg - A. J. Insel - L. E. Spence: *Linear Algebra*, 4th Edition, Prentice Hall, 2003.

[3] Y. Katznelson - Y. R, Katznelson: *A (Terse) Introduction to Linear Algebra*, American Mathematical Society, 2008.

[4] S. Lipschutz - M. Lipson: *Linear Algebra*, 3rd Edition, Schaum's Outlines, 2003.

[5] H. E. Rose: *Linear Algebra: A Pure Mathematical Approach*, Birkhauser, 2002.

[6] F. Zhang: *Linear Algebra. Challenging Problems for Students*, 2nd Edition, The Johns Hopkings University Press, 2009.