Τίτλος Μαθήματος : Γραμμική Άλγεβρα Ι

Ενότητα: Διανυσματικοί Χώροι

Όνομα Καθηγητή: Ανδρέας Αρβανιτογεώργος

Τμήμα: Μαθηματικών

Άδειες Χρήσης

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Πατρών**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Κεφάλαιο 1

Διανυσματικοί Χώροι

1.1 Ορισμός - Ιδιότητες

Το βασικό αντικείμενο μελέτης της γραμμικής άλγεβρας είναι ο διανυσματικός χώρος. Ο αναγνώστης μπορεί να έχει κατά νου το σύνολο των συνηθισμένων διανυσμάτων με τις συνήθεις πράξεις πρόσθεσης και βαθμωτού πολλαπλασιασμού, παρόλα αυτά θα μελετήσουμε σύνολα πιο γενικά, των οποίων τα στοιχεία θα υπακούν σε ιδιότητες παρόμοιες με αυτές των διανυσμάτων (π.χ. σύνολα πινάκων, πολυωνύμων, Ευκλείδειοι χώροι). Αυτό το οποίο μας ενδιαφέρει προς μελέτη είναι η "γραμμική δομή" του χώρου.

Στα παρακάτω θα συμβολίζουμε με $\mathbb{F}$ το σώμα (field) των πραγματικών αριθμών $\mathbb{R}$ ή των μιγαδικών αριθμών $\mathbb{C}$.

Ορισμός 1.1. *Ένας διανυσματικός χώρος (vector space) επί του $\mathbb{F}$ είναι ένα μη κενό σύνολο V (τα στοιχεία του οποίου θα ονομάζονται διανύσματα) εφοδιασμένο με δύο πράξεις*

$$\begin{aligned} + \;:\;& V \times V \longrightarrow V \\ & (x,y) \longmapsto x+y \quad \text{“πρόσθεση”} \\ \cdot \;:\;& \mathbb{F} \times V \longrightarrow V \\ & (\lambda, x) \longmapsto \lambda \cdot x \equiv \lambda x \quad \text{“βαθμωτός πολλαπλασιασμός ή γινόμενο”}, \end{aligned}$$

οι οποίες ικανοποιούν τις εξής ιδιότητες:

i) $x+y=y+x$ *για κάθε* $x,y \in V$.

ii) $(x+y)+z=x+(y+z)$ *για κάθε* $x,y,z \in V$.

iii) *Υπάρχει ένα στοιχείο* $0 \in V$ *(μηδενικό διάνυσμα) τέτοιο ώστε* $x+0=x$ *για κάθε* $x \in V$.

iv) *Για κάθε στοιχείο* $x \in V$ *υπάρχει ένα στοιχείο* $y \in V$ *τέτοιο ώστε* $x + y = 0$*.*

v) $1 \cdot x = x$ *για κάθε* $x \in V$*.*

vi) $(\lambda + \mu) \cdot x = \lambda \cdot x + \mu \cdot x$ *για κάθε* $\lambda, \mu \in \mathbb{F}, x \in V$*.*

vii) $(\lambda\mu) \cdot x = \lambda \cdot (\mu \cdot x)$ *για κάθε* $\lambda, \mu \in \mathbb{F}, x \in V$*.*

viii) $\lambda \cdot (x + y) = \lambda \cdot x + \lambda \cdot y$ *για κάθε* $\lambda \in \mathbb{F}, x, y \in V$*.*

Παρατηρήσεις

1) Ο ορισμός εξαρτάται από το σώμα $\mathbb{F}$. Η έννοια του διανυσματικού χώρου ορίζεται για οποιαδήποτε σώμα $\mathbb{F}$, αλλά εμείς θα περιοριστούμε στην περίπτωση που $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ ή $\mathbb{C}$ χωρίς ιδιαίτερη απώλεια της γενικότητας της όλης θεωρίας.

2) Αν $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ ο V ονομάζεται πραγματικός διανυσματικός χώρος ενώ αν $\mathbb{F} = \mathbb{C}$ ο V ονομάζεται μιγαδικός διανυσματικός χώρος.

Παραδείγματα

1) Το σύνολο $\mathbb{F}^n = \{x = (a_1, \ldots, a_n) : a_i \in \mathbb{F}\}$ αποτελεί διανυσματικό χώρο επί του $\mathbb{F}$ με πράξεις πρόσθεση και πολλαπλασιασμό κατά συντεταγμένη. Αν $x = (a_1, \ldots, a_n)$, $y = (b_1, \ldots, b_n)$, $\lambda \in \mathbb{F}$ τότε $x + y = (a_1 + b_1, \ldots, a_n + b_n)$, $\lambda x = (\lambda a_1, \ldots, \lambda a_n)$. Ένα στοιχείο με την ιδιότητα *iii)* του Ορισμού 1.1 είναι το $0 = (0, 0, \ldots, 0)$. Ένα διάνυσμα του $\mathbb{F}^n$ θα μπορεί να γράφεται είτε ώς ένα διάνυσμα-γραμμή $(a_1, \ldots, a_n)$ είτε ως ένα διάνυσμα-στήλη $\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$.

Έτσι το $\mathbb{R}^3$ είναι διανυσματικός χώρος επί του $\mathbb{R}$, όπου για παράδειγμα

$$(-2, 3, 4) + (1, -1, 8) = (-1, 2, 12)$$

και

$$-3(4, 0, -1) = (-12, 0, 3)$$

και το $\mathbb{C}^2$ είναι διανυσματικός χώρος επί του $\mathbb{C}$ όπου για παράδειγμα

$$(2 + 3i, 1) + (1 - i, 4i) = (3 - 2i, 1 + 4i)$$

και

$$i(2 + i, 3) = (-1 + 2i, 3i).$$

2) Το $\mathbb{C}$ είναι διανυσματικός χώρος επί του $\mathbb{R}$.

3) Το σύνολο των συνήθων διανυσμάτων με πράξεις τη γεωμετρική πρόσθεση $\vec{v}+\vec{w}$ και βαθμωτό πολλαπλασιασμό $\lambda\vec{v}$ ($\lambda \in \mathbb{R}$) όπως τις γνωρίζουμε από την αναλυτική γεωμετρία αποτελεί διανυσματικό χώρο.

4) Το σύνολο των ακολουθιών $\mathbb{F}^{\infty} = \{(a_1, a_2, \dots) : a_i \in \mathbb{F}\}$ επί του $\mathbb{F}$ με τις ίδιες πράξεις όπως στο Παράδειγμα 1.

5) Έστω $A \neq \emptyset$ και $V = \{f : A \to \mathbb{F}\}$. Ορίζουμε πράξεις στο V ως $(f+g)(x) = f(x)+g(x)$, $(\lambda f)(x) = \lambda f(x)$, $\lambda \in \mathbb{F}$. Τότε το σύνολο V είναι διανυσματικός χώρος επί του $\mathbb{F}$.

6) Ένας $m \times n$ <u>πίνακας</u> (matrix) με στοιχεία από το σώμα $\mathbb{F}$ είναι μια ορθογώνια διάταξη της μορφής

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

όπου κάθε στοιχείο a_{ij} ($1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n$) είναι ένα στοιχείο του $\mathbb{F}$. Συμβολίζουμε τον παραπάνω πίνακα και ως $A = (a_{ij})$. Τα στοιχεία $a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in}$ συνιστούν την <u>i-γραμμή</u> του πίνακα A και τα στοιχεία $a_{1j}, a_{2j}, \dots, a_{mj}$ συνιστούν την <u>j-στήλη</u> του πίνακα A. Τα στοιχεία a_{ij} με $i = j$ ονομάζονται <u>διαγώνια στοιχεία</u> του πίνακα A. Εάν $m = n$ τότε ο πίνακας $A \in \mathsf{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ ονομάζεται <u>τετραγωνικός</u>. Ο $n \times n$ πίνακας με όλα τα στοιχεία $0 \in \mathbb{F}$ ονομάζεται <u>μηδενικός πίνακας</u> και συμβολίζεται με $\mathbf{0}$.

Δύο $m \times n$ πίνακες $A = (a_{ij}), B = (b_{ij})$ ονομάζονται <u>ίσοι</u> εάν τα αντίστοιχα στοιχεία τους είναι ίσα, δηλαδή $a_{ij} = b_{ij}$ για κάθε $1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m$.

Συμβολίζουμε με $\mathsf{M}_{m\times n}(\mathbb{F})$ το σύνολο όλων των $m \times n$ πινάκων με στοιχεία από το $\mathbb{F}$. Ορίζουμε δύο πράξεις στο σύνολο $\mathsf{M}_{m\times n}(\mathbb{F})$ <u>πρόσθεση</u> και <u>βαθμωτό πολλαπλασιασμό</u> ως εξής: Έστω $A = (a_{ij}), B = (b_{ij}) \in \mathsf{M}_{m\times n}(\mathbb{F})$ και $\lambda \in \mathbb{F}$. Τότε $(A+B)_{ij} = (a_{ij} + b_{ij})$ και $(\lambda A)_{ij} = (\lambda a_{ij})$. Για παράδειγμα, στο σύνολο $\mathsf{M}_{2\times 3}(\mathbb{R})$ είναι

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 0 & 4 \\ 3 & -1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 7 \\ 7 & 4 & 4 \end{pmatrix}$$

και
$$-4\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 \\ -8 & 12 & -16 \end{pmatrix}.$$
Με τις παραπάνω πράξεις το σύνολο $\mathsf{M}_{m\times n}(\mathbb{F})$ αποτελεί έναν διανυσματικό χώρο επί του $\mathbb{F}$.

7) Ένα πολυώνυμο με συντελεστές στο σώμα $\mathbb{F}$ είναι μία έκφραση της μορφής

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0, \tag{1.1}$$

όπου n μη αρνητικός ακέραιος. Τα στοιχεία $a_i \in \mathbb{F}$ ονομάζονται συντελεστές του πολυωνύμου. Αν $p(x) = 0$, δηλαδή $a_n = a_{n-1} = \cdots = a_1 = a_0$, το $p(x)$ ονομάζεται μηδενικό πολυώνυμο. Ο βαθμός του πολυωνύμου είναι ο μέγιστος εκθέτης του x που εμφανίζεται στην έκφραση (1.1). Στο μηδενικό πολυώνυμο θέτουμε συμβατικά βαθμό -1 (ή και $-\infty$ μερικές φορές).

Δυό πολυώνυμα

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

και

$$q(x) = b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0$$

ονομάζονται ίσα εάν $m = n$ και $a_i = b_i$ για $i = 0, 1, \ldots, n$. Ένας αριθμός $x_0 \in \mathbb{F}$ ονομάζεται ρίζα (root) του πολυωνύμου $p(x)$ εάν $p(x_0) = 0$. Γενικά μπορούμε να θεωρήσουμε ένα πολυώνυμο ως μια συνάρτηση $p : \mathbb{F} \to \mathbb{F}$ με τύπο (1.1). Συμβολίζουμε με $\mathsf{P}(\mathbb{F})$ το σύνολο όλων των πολυωνύμων με συντελεστές στο σύνολο $\mathbb{F}$. Θα ορίσουμε δύο πράξεις στο $\mathsf{P}(\mathbb{F})$ ως εξής: Έστω

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

και

$$q(x) = b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0$$

δύο στοιχεία του $\mathsf{P}(\mathbb{F})$. Υποθέτουμε ότι $m \le n$ και ορίζουμε $b_{m+1} = b_{m+2} = \cdots = b_n = 0$ οπότε το $q(x)$ γράφεται ως

$$q(x) = b_n x^n + \cdots + b_1 x + b_0.$$

Ορίζουμε

$$p(x) + q(x) = (a_n + b_n)x^n + (a_{n-1} + b_{n-1})x^{n-1} + \cdots + (a_1 + b_1)x + (a_0 + b_0)$$

και για κάθε $\lambda \in \mathbb{F}$

$$\lambda p(x) = \lambda a_n x^n + \lambda a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + \lambda a_1 x + \lambda a_0.$$

Με τις πράξεις αυτές το σύνολο $\mathsf{P}(\mathbb{F})$ αποκτά δομή διανυσματικού χώρου.

8) Θεωρούμε το σύνολο $V = \{(a_1, a_2) : a_1, a_2 \in \mathbb{R}\}$ και ορίζουμε δύο πράξεις ως εξής:

$$(a_1, a_2) + (b_1, b_2) = (a_1 + b_1, a_2 - b_2)$$

και

$$\lambda(a_1, a_2) = (\lambda a_1, \lambda a_2), \ (\lambda \in \mathbb{R}).$$

Το σύνολο V δεν είναι διανυσματικός χώρος επειδή οι ιδιότητες i), ii),vi) του ορισμού δεν ισχύουν γενικά. Για παράδειγμα, για $(a_1, a_2) = (1, 0)$ και $(b_1, b_2) = (0, 1)$ είναι

$$(1, 0) + (0, 1) = (1, -1) \neq (1, 1) = (0, 1) + (1, 0).$$

Σημειώνουμε ότι ένα σύνολο V <u>δεν</u> είναι διανυσματικός χώρος όταν δεν ισχύει τουλάχιστον μία από τις ιδιότητες i) - $viii$) και τότε θα πρέπει (όπως κάναμε πιο πάνω) να βρούμε ένα πολύ συγκεκριμένο <u>αντιπαράδειγμα</u> (counter-example).

Ιδιότητες διανυσματικών χώρων

Με χρήση των ιδιοτήτων i) - $viii$) του Ορισμού 1.1 είναι δυνατόν να αποδειχθούν οι παρακάτω ιδιότητες (άσκηση).

1) Το διάνυσμα *0* της ιδιότητας iii) είναι μοναδικό και θα ονομάζεται το <u>μηδενικό διάνυσμα</u> του V.

2) Το διάνυσμα y της ιδιότητας iv) είναι μοναδικό. Θα συμβολίζεται με $-x$ και θα ονομάζεται το <u>αντίθετο του x</u>.

3) Για κάθε $x \in V$ και $\lambda \in \mathbb{F}$ ισχύουν τα εξής:

$$0x = \mathit{0}, \ x\mathit{0} = \mathit{0}$$

και

$$(-\lambda)x = -(\lambda x) = \lambda(-x).$$

1.2 Υπόχωροι

Είναι συνηθισμένη πρακτική στην άλγεβρα όταν ορίζεται ένα αλγεβρικό αντικείμενο (π.χ. ομάδα, δακτύλιος) είναι να ορίσουμε ένα υποσύνολό του το οποίο να έχει την αντίστοιχη πράξη (π.χ. υποομάδα, υποδακτύλιος).

Ορισμός 1.2. *Ένα υποσύνολο W ενός διανυσματικού χώρου V επί του $\mathbb{F}$ ονομάζεται (διανυσματικός) υπόχωρος (subspace) του V εάν το W είναι διανυσματικός χώρος επί του $\mathbb{F}$ με τις ίδιες πράξεις της πρόσθεσης και βαθμωτού πολλάπλασιασμού του V. Συμβολισμός: $W < V$.*

Παρατηρήσεις

1) Κάθε διανυσματικός χώρος, V έχει δύο υποχώρους, τον V και τον μηδενικό (ή τετριμμένο) υπόχωρο $\{0\}$.

2) Κάθε υπόχωρος W του διανυσματικού χώρου V περιέχει το μηδενικό διάνυσμα 0 του V. Πράγματι, για κάθε $w \in W$ είναι $W \ni 0w = 0$. Για να ελέγχουμε ότι ένα υποσύνολο W ενός διανυσματικού χώρου V είναι υπόχωρος αρκεί να χρησιμοποιούμε το παρακάτω κριτήριο.

Πρόταση 1.1. *Έστω W ένα μη κενό υποσύνολο ενός διανυσματικού χώρου V. Το W είναι υπόχωρος του V εάν και μόνο εάν ισχύουν τα εξής:*

1) $x + y \in W$ *για κάθε* $x, y \in W$,

2) $\lambda x \in W$ *για κάθε* $\lambda \in \mathbb{F}, x \in W$.

Απόδειξη. Το ευθύ είναι άμμεσο από τον ορισμό. Για το αντίστροφο, επειδή οι ιδιότητες $i) - viii)$ ισχύουν λόγω του ότι $W \subset V$, αρκεί να αποδείξουμε ότι $0 \in W$ και ότι για κάθε $x \in W$ ισχύει $-x \in W$. Πράγματι, λόγω της 2) είναι $0w = 0 \in W$ για κάθε $w \in W \subset V$. Επίσης, $W \ni (-1)x = -x$ για κάθε $x \in W$. $\square$

Παρατήρηση

Ένας συνηθισμένος τρόπος να ελέγχουμε ότι το W είναι μη κενό σύνολο, είναι δείχνοντας ότι $0 \in W$.

Παραδείγματα

1) Έστω $W = \{(x_1, x_2, 0) : x_i \in \mathbb{F}\} \subset \mathbb{F}^3$. Τότε το W είναι υπόχωρος του $\mathbb{F}^3$. Πράγματι, επειδή $(0, 0, 0) \in W$ είναι $W \neq \emptyset$. Έστω $(x_1, x_2, 0)$, $(y_1, y_2, 0) \in W$ και $\lambda \in \mathbb{F}$. Τότε

$$(x_1, x_2, 0) + (y_1, y_2, 0) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, 0) \in W$$

και

$$\lambda(x_1, x_2, 0) = (\lambda x_1, \lambda x_2, 0) \in W.$$

2) Έστω $W = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{F}^4 : x_3 = x_4 + 2\}$. Τότε το W δεν είναι υπόχωρος του $\mathbb{F}^4$. Πρέπει να δώσουμε ένα αντιπαράδειγμα που να δείχνει ότι δεν ικανοποιείται μία από τις απαιτήσεις της Πρότασης 1.1. Πράγματι, για το στοιχείο $(1, 0, 3, 1) \in W$ και για $\lambda = 2$ είναι $2(1, 0, 3, 1) = (2, 0, 6, 2) \notin W$ (επειδή $6 \neq 2 + 2$).

3) Έστω n μη αρνητικός ακέραιος και συμβολίζουμε με $\mathsf{P}_n(\mathbb{F})$ το σύνολο όλων των πολυωνύμων στο σύνολο $\mathsf{P}(\mathbb{F})$ βαθμού το πολύ n. Τότε $\mathsf{P}_n(\mathbb{F}) < \mathsf{P}(\mathbb{F})$.

4) Έστω $W = \{p \in \mathsf{P}(\mathbb{F}) : p(2) = 0\}$. Τότε $W < \mathsf{P}(\mathbb{F})$.

5) Μερικοί υπόχωροι του $\mathbb{R}^2$ είναι οι $\{(0, 0)\}$, $\mathbb{R}^2$ και οι ευθείες που διέρχονται από την αρχή των αξόνων. Υπάρχουν άλλοι; Μερικοί υπόχωροι του $\mathbb{R}^3$ είναι οι $\{0, 0, 0)\}$, $\mathbb{R}^3$, οι ευθείες που διέρχονται από την αρχή καθώς και τα επίπεδα που διέρχονται από την αρχή. Υπάρχουν άλλοι υπόχωροι;

6) Ο <u>ανάστροφος</u> (transpose) A^t ενός $m \times n$ πίνακα είναι ο $n \times m$ πίνακας που προκύπτει από τον A εναλλάσοντας γραμμές και στήλες. Για παράδειγμα,

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 4 & 1 & 0 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 1 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$$

και

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Ένας πίνακας ονομάζεται <u>συμμετρικός</u> εάν $A^t = A$ και <u>αντισυμμετρικός</u> εάν $A^t = -A$. Παρατηρήστε ότι συμμετρικοί και αντισυμμετρικοί πίνακες είναι αναγκαστικά τετραγωνικοί πίνακες. Εύκολα προκύπτουν οι σχέσεις $(A + B)^t = A^t + B^t$, $(\lambda A)^t = \lambda A^t$. Συνεπώς, τα σύνολα των συμμετρικών και αντισυμμετρικών πινάκων αποτελούν υποχώρους του διανυσματικού χώρου $\mathsf{M}_{n\times n}(\mathbb{F})$.

7) Ένας $n \times n$ πίνακας $A = (a_{ij})$ ονομάζεται <u>διαγώνιος</u> εάν $a_{ij} = 0$ για κάθε $i \neq j$, δηλαδή έχει τη μορφή

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Τότε το σύνολο όλων των διαγώνιων πινάκων είναι διανυσματικός υπόχωρος του $\mathsf{M}_{n\times n}(\mathbb{F})$.

8) Το ίχνος (trace) ενός $n \times n$ πίνακα $A = (a_{ij})$ είναι ο αριθμός

$$\mathrm{tr}A = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn} \in \mathbb{F}.$$

Για κάθε $A, B \in \mathsf{M}_{n\times n}(\mathbb{F})$ και $\lambda, \mu \in \mathbb{F}$ ισχύει ότι $\mathrm{tr}(\lambda A + \mu B) = \lambda \mathrm{tr}A + \mu \mathrm{tr}B$. Συνεπώς, το σύνολο

$$W = \{A \in \mathsf{M}_{n\times n}(\mathbb{F}) : \mathrm{tr}A = 0\}$$

είναι υπόχωρος του $\mathsf{M}_{n\times n}(\mathbb{F})$ (άσκηση).

1.3 Δημιουργία υποχώρων από άλλους

Θα δούμε τώρα πως μπορούμε να δημιουργήσουμε διανυσματικούς υποχώρους από άλλους διανυσματικούς χώρους.

Πρόταση 1.2. *Αν W_1, W_2 είναι υπόχωροι του V τότε η τομή $W_1 \bigcap W_2$ είναι υπόχωρος του V.*

Η ένωση υποχώρων δεν είναι πάντα υπόχωρος (δώστε αντιπαράδειγμα). Ισχύει όμως το εξής:

Πρόταση 1.3. *Έστω W_1, W_2 υπόχωροι του V. Τότε η ένωση $W_1 \bigcup W_2$ είναι υπόχωρος του V εάν και μόνο εάν είτε $W_1 \subset W_2$ είτε $W_2 \subset W_1$.*

Ορισμός 1.3. *Έστω $W_1, W_2, \ldots, W_n$ υπόχωροι του V. Το άθροισμα ορίζεται ως $W_1 + W_2 + \cdots + W_n = \{w_1 + w_2 + \cdots + w_n : w_i \in W_i\}$.*

Το άθροισμα είναι ένας υπόχωρος του V.

Παραδείγματα

1) Έστω $W_1 = \{(x, 0, 0) : x \in \mathbb{F}\}, W_2 = \{(0, y, 0) : y \in \mathbb{F}\}$. Τότε $W_1 + W_2 = \{(x, y, 0) : x, y \in \mathbb{F}\}$.

2) Έστω $W_1 = \{(x, 0, 0) : x \in \mathbb{F}\}, W_2 = \{(y, y, 0) : y \in \mathbb{F}\}$. Τότε $W_1 + W_2 = \{(z, y, 0) : z, y \in \mathbb{F}\}$.

Παρατήρηση
Αποδεικνύεται ότι το άθροισμα $W_1 + W_2 + \cdots + W_n$ είναι ο μικρότερος υπόχωρος (ως υποσύνολο) του V που να περιέχει τους υποχώρους $W_1, W_2, \ldots, W_n$.

Ορισμός 1.4. *Έστω $U_1, U_2, \ldots, U_m$ υπόχωροι του V. Αν κάθε $v \in V$ γράφεται κατά μοναδικό τρόπο ως*

$$x = u_1 + u_2 + \cdots + u_m, \quad u_i \in U,$$

τότε ο V ονομάζεται <u>ευθύ άθροισμα</u> (direct sum) των U_i και γράφουμε $V = U_1 \oplus U_2 \oplus \cdots \oplus U_m$.

Παραδείγματα
1) Έστω

$$\begin{aligned} U_1 &= \{(x, y, 0) \in \mathbb{F}^3 : x, y \in \mathbb{F}\} \\ U_2 &= \{(0, 0, z) \in \mathbb{F}^3 : z \in \mathbb{F}\} \\ U_3 &= \{(0, y, y) \in \mathbb{F}^3 : y \in \mathbb{F}\}, \end{aligned}$$

υπόχωροι του $\mathbb{F}^3$. Τότε $\mathbb{F}^3 = U_1 + U_2 + U_3$, επειδή

$$(x, y, z) = (x, y, 0) + (0, 0, z) + (0, 0, 0),$$

αλλά $\mathbb{F} \neq U_1 \oplus U_2 \oplus U_3$. Πράγματι, το $(0, 0, 0)$ γράφεται με δύο τρόπους ως

$$\begin{aligned} (0, 0, 0) &= (0, 1, 0) + (0, 0, 1) + (0, -1, -1) \\ &= (0, 0, 0) + (0, 0, 0) + (0, 0, 0). \end{aligned}$$

2) Έστω $V = \mathsf{P}(\mathbb{F})$ και U_e, U_0 οι υπόχωροι του V με στοιχεία τα πολυώνυμα άρτιου και περιττού βαθμού αντίστοιχα. Τότε

$$\mathsf{P}(\mathbb{F}) = U_e \oplus U_0.$$

Πρόταση 1.4. *Έστω $U_1, U_2, \ldots, U_m$ υπόχωροι του V. Τότε $V = U_1 \oplus U_2 \oplus \cdots \oplus U_m$ εάν και μόνο εάν*

1) $V = U_1 + \cdots + U_m$.

2) Ο μόνος τρόπος να γραφτεί το $0 \in V$ ως άθροισμα $0 = u_1 + \cdots + u_m$ $(u_i \in U_i)$ είναι όταν όλα τα $u_i = 0$.

Απόδειξη. Το 1) είναι άμεσο από τον ορισμό. Για το 2) έστω ότι $0 = u_1 + \cdots + u_m$ για κάποια $u_i \in U_i$. Επειδή είναι και $0 = 0 + \cdots + 0$, από τον ορισμό του ευθέως αθροίσματος προκύπτει ότι $u_i = 0$. Αντίστροφα, έστω $v \in V$. Λόγω του 1) είναι

$$v = u_1 + \cdots + u_m \tag{1.2}$$

για κάποια $u_i \in U_i$, συνεπώς

$$V = U_1 + \cdots + U_m.$$

Για την μοναδικότητα, έστω ότι έχουμε

$$v = w_1 + \cdots + w_m, \tag{1.3}$$

$w_i \in U_i$. Με αφαίρεση των (1.2) και (1.3) προκύπτει ότι

$$0 = (u_1 - w_1) + \cdots + (u_m - w_m),$$

όπου $u_i - w_i \in U_i$, συνεπώς από το 2) προκύπτει ότι $u_i - w_i = 0$ για κάθε $i = 1, \ldots, m$, άρα $u_i = w_i$. □

Η παρακάτω ειδική περίπτωση έχει ενδιαφέρον.

Πρόταση 1.5. *Έστω W_1, W_2 υπόχωροι του V. Τότε $V = W_1 \oplus W_2$ εάν και μόνο εάν $V = W_1 + W_2$ και $W_1 \bigcap W_2 = \{0\}$.*

Απόδειξη. Άσκηση. □

1.4 Γραμμικοί συνδυασμοί - Γεννήτορες διανυσματικών χώρων

Ορισμός 1.5. *1) Έστω V διανυσματικός χώρος και $v_1, v_2, \ldots, v_m \in V$. Ένας γραμμικός συνδυασμός των $v_1, v_2, \ldots, v_m$ είναι ένα διάνυσμα της μορφής*

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_m v_m, \quad \lambda_i \in \mathbb{F}.$$

2) Το σύνολο όλων των γραμμικών συνδυασμών του συνόλου $\{v_1, v_2, \ldots, v_m\}$ συμβολίζεται ως

$$\operatorname{span}\{v_1, \ldots, v_m\} = \{\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_m v_m : \lambda_i \in \mathbb{F}\}.$$

(Μερικά βιβλία το συμβολίζουν με $\langle v_1, \ldots, v_m \rangle$)

Παράδειγμα

Έστω $V = \mathbb{F}^3$. Τότε

$$(7,2,9) = 2(2,1,3) + 3(1,0,1),$$

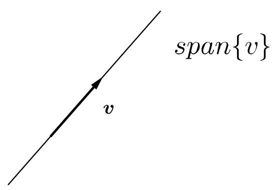
άρα $(7,2,9) \in \text{span}\{(2,1,3),(1,0,1)\}$.

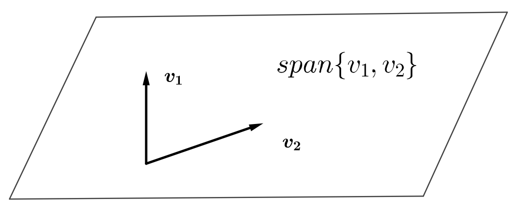
Ισχύουν τα εξής: (Άσκηση)

1) Το σύνολο $\text{span}\{v_1,\ldots,v_m\}$ είναι υπόχωρος του V και ονομάζεται ο υπόχωρος που παράγεται από τα διανύσματα $v_1,\ldots,v_m$ ή γραμμική θήκη του $\{v_1,\ldots,v_m\}$.

2) Ο υπόχωρος $\text{span}\{v_1,\ldots,v_m\}$ είναι ο μικρότερος υπόχωρος του V που περιέχει όλα τα διανύσματα $v_1,\ldots,v_m$. Συνεπώς, $\text{span}\{\emptyset\} = \{0\}$.

Παράδειγμα





Ορισμός 1.6. *1) Αν* $\text{span}\{v_1,\ldots,v_m\} = V$ *τότε λέμε ότι το σύνολο* $\{v_1,\ldots,v_m\}$ *παράγει τον διανυσματικό χώρο* V*, ή ότι τα διανύσματα* $v_1,\ldots,v_m$ *είναι γεννήτορες του* V*.*

2) Ο διανυσματικός χώρος V *ονομάζεται πεπερασμένης διάστασης (finite dimensional) εάν παράγεται από κάποιο (πεπερασμένο) σύνολο διανυσμάτων* $v_1,\ldots,v_m$*. Διαφορετικά ο* V *ονομάζεται άπειρης διάστασης (infinite dimensional).*

Παραδείγματα

1) Ο διανυσματικός χώρος $\mathbb{F}^n$ είναι πεπερασμένης διάστασης. Το σύνολο

$$\{(1,0,\ldots,0),(0,1,\ldots,0),\ldots,(0,0,\ldots,1)\}$$

παράγει τον $\mathbb{F}^n$ (γιατί;).

2) Το σύνολο $\{(1,2),(7,-5)\}$ παράγει τον διανυσματικό χώρο $\mathbb{R}^2$ (γιατί;).

3) Ο διανυσματικός χώρος $\mathsf{P}_n(\mathbb{F})$ των πολυωνύμων βαθμού το πολύ n είναι πεπερασμένης διάστασης. Πράγματι, $\mathsf{P}_n(\mathbb{F}) = \operatorname{span}\{1, z, \ldots, z^n\}$.

4) Οι διανυσματικοί χώροι $\mathsf{P}(\mathbb{F})$ και $\mathbb{F}^\infty$ είναι άπειρης διάστασης (άσκηση κάπως δύσκολη).

5) $\operatorname{span}\{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\} = \mathsf{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ (γιατί;).

Παρατήρηση

Είναι δυνατόν να οριστεί υπόχωρος ενός διανυσματικού χώρου V που παράγεται από ένα μη κενό υποσύνολο S του V (ενδεχομένως και άπειρο). Τότε κάθε στοιχείο του V γράφεται ως πεπερασμένος γραμμικός συνδυασμός στοιχείων του S. Ο υπόχωρος αυτός ονομάζεται υπόχωρος που παράγεται από το S και συμβολίζεται με $\operatorname{span}(S)$. Για παράδειγμα, έστω $S = \{(\cos\theta, \sin\theta) : \theta \in \mathbb{R}\}$ το σύνολο των διανυσμάτων του $\mathbb{R}^2$ που σχηματίζουν τον μοναδιαίο κύκλο $\mathbb{S}^1$. Τότε $\operatorname{span}(S) = \mathbb{R}^2$.

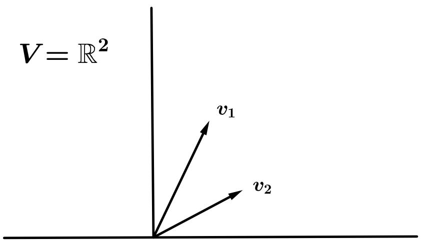
1.5 Γραμμική εξάρτηση και γραμμική ανεξαρτησία

Έστω $v_1, \ldots, v_n$ διανύσματα ενός διανυσματικού χώρου V και $v \in \operatorname{span}\{v_1, \ldots, v_n\}$. Τότε υπάρχουν $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{F}$ τέτοια ώστε $v = a_1 v_1 + \cdots + a_n v_n$. Το ερώτημα είναι κατά πόσον η έκφραση αυτή είναι μοναδική. Αν δεν είναι μοναδική, τότε θα έχουμε ότι $v = a_1' v_1 + \cdots + a_n' v_n$ ($a_i' \in \mathbb{F}$) συνεπώς $0 = (a_1 - a_1')v_1 + \cdots + (a_n - a_n')v_n$.

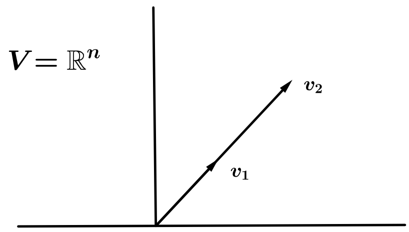
Εάν το $0 \in V$ γράφεται ως γραμμικός συνδιασμός των $v_1, \ldots, v_n$ μόνον όταν $a_i - a_i' = 0$, άρα η επιλογή των a_i είναι μοναδική, τότε θα λέμε ότι τα $v_1, \ldots, v_n$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα.

Ορισμός 1.7. *1) Τα διανύσματα $v_1 \ldots, v_n$ του διανυσματικού χώρου V ονομάζονται γραμμικώς ανεξάρτητα (linearly independent) εάν ο μοναδικός τρόπος για να γραφτεί το $0 \in V$ ως $a_1 v_1 + \cdots + a_n v_n = 0$ ($a_i \in \mathbb{F}$) είναι όταν $a_1 = \cdots = a_n = 0 \in \mathbb{F}$.*

2) Τα $v_1, \dots, v_n$ θα ονομάζονται γραμμικώς εξαρτημένα (linearly dependent) εάν δεν είναι γραμμικώς ανεξάρτητα. Δηλαδή, υπάρχουν $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{F}$ όχι όλα μηδέν τέτοια ώστε $a_1 v_1 + \cdots + a_n v_n = 0$.



γραμμικώς ανεξάρτητα



γραμμικώς εξαρτημένα

Παραδείγματα

1) Τα διανύσματα $\{(1,0,0,0),(0,1,0,0),(0,0,1,0)\}$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα στον $\mathbb{F}^4$.

2) Τα διανύσματα $\{1, x, x^2, \dots, x^n\}$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα στον $\mathsf{P}_n(\mathbb{F})$.

3) Τα διανύσματα $\{\begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -4 & 0 & 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 & 7 & 4 \\ 6 & -2 & -7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 & 3 & 11 \\ -1 & -3 & 2 \end{pmatrix}\}$ είναι γραμμικώς εξαρτημένα στον $\mathsf{M}_{2\times 3}(\mathbb{R})$, επειδή

$$5\begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -4 & 0 & 5 \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} -3 & 7 & 4 \\ 6 & -2 & -7 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} -2 & 3 & 11 \\ -1 & -3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ορισμός 1.8. *Ένα υποσύνολο (ενδεχομένως άπειρο) S ενός διανυσματικού χώρου V ονομάζεται γραμμικώς εξαρτημένο εάν υπάρχει πεπερασμένο πλήθος διανυσμάτων $v_1, v_2, \dots, v_n \in S$ και $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{F}$ όχι όλα μηδέν ώστε $a_1 v_1 + \cdots + a_n v_n = 0$. Διαφορετικά το S ονομάζεται γραμμικώς ανεξάρτητο.*

Άσκηση

Το υποσύνολο $S = \{(\cos\theta, \sin\theta) : \theta \in \mathbb{R}\}$ του $\mathbb{R}^2$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητο.

Παρατηρήσεις

1) Το κενό σύνολο είναι γραμμικώς ανεξάρτητο, επειδή δεν είναι δυνατόν να βρούμε στοιχεία $v_i \in \emptyset$, $a_i \in \mathbb{F}$ ώστε να ισχύει η ισότητα $\sum a_i v_i = 0$.

2) Έστω $S = \{v\}$ ένα μονοσύνολο. Αν $v \neq 0$ τότε το S είναι γραμμικώς ανεξάρτητο. Πράγματι, αν ήταν γραμμικώς εξαρτημένο θα υπήρχε $0 \neq \lambda \in \mathbb{F}$ τέτοιο ώστε $\lambda v = 0$. Τότε όμως θα είχαμε ότι $v = \lambda^{-1}(\lambda v) = \lambda^{-1} 0 = 0$ άτοπο. Αν $v = 0$ τότε το S είναι γραμμικώς εξαρτημένο, διότι $1 \cdot 0 = 0$.

3) Γενικά αν $S = \{0, v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ $(n \geq 1)$ τότε το S είναι γραμμικώς εξαρτημένο. Πράγματι, έστω ότι $v_1 \neq 0$. Τότε $1 \cdot 0 + 0 \cdot v_1 + 0 \cdot v_2 + \cdots + 0 \cdot v_n = 0$ με $1 \neq 0 \in \mathbb{F}$.

Είναι δυνατόν να αποδειχθεί το εξής.

Πρόταση 1.6. *1) Έστω $S_1 \subset S_2 \subset V$. Αν το S_1 είναι γραμμικώς εξαρτημένο τότε και το S_2 είναι γραμμικώς εξαρτημένο.*

2) Αν το S_2 είναι γραμμικώς ανεξάρτητο τότε και το S_1 είναι γραμμικώς ανεξάρτητο (Άμεσο από το 1)).

1.6 Βάση - Διάσταση

Θα ορίσουμε ένα πολύ σημαντικό υποσύνολο ενός διανυσματικού χώρου, την βάση του, το οποίο θα έχει την ιδιότητα ότι κάθε στοιχείο του διανυσματικού χώρου εκφράζεται κατά μονδικό τρόπο ως γραμμικός συνδυασμός των στοιχείων της βάσης. Το πλήθος των στοιχείων σε μία πεπερασμένη βάση θα ονομαστεί η διάσταση του διανυσματικού χώρου και αποτελεί μία σημαντική αναλλοίωτη ποσότητά του.

Ορισμός 1.9. *Μία βάση (basis) ενός διανυσματικού χώρου V είναι ένα υποσύνολο* B *του V με τις ιδιότητες.*

1) Το B *είναι γραμμικώς ανεξάρτητο*

2) Το B *παράγει τον V, δηλαδή $V = \mathrm{span}(\mathrm{B})$.*

Τίθεται αμέσως το ερώτημα: Έχει κάθε διανυσματικός χώρος μία βάση; Θα συζητήσουμε το ερώτημα αυτό παρακάτω.

Παραδείγματα

1) Το κενό σύνολο $\emptyset$ είναι μία βάση του μηδενικού διανυσματικού χώρου $\{0\}$, επειδή το $\emptyset$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητο και $\text{span}\{\emptyset\} = \{\mathit{0}\}$.

2) Η βάση ενός διανυσματικού χώρου δεν είναι μοναδική. Πράγματι, τα σύνολα $\mathrm{B}_1 = \{(1,0),(0,1)\}$ και $\mathrm{B}_2 = \{(1,3),(7,-4)\}$ αποτελούν δύο βάσεις του διανυσματικού χώρου $\mathbb{R}^2$.

3) Έστω $e_1 = (1,0,\ldots,0), e_2 = (0,1,\ldots,0),\ldots,e_n = (0,0,\ldots,1)$. Τότε το σύνολο $\mathrm{B} = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ είναι μία βάση του $\mathbb{F}^n$ που ονομάζεται η κανονική βάση του $\mathbb{F}^n$.

4) Μία βάση του διανυσματικού χώρου $\mathsf{P}_n(\mathbb{F})$ είναι το σύνολο $\mathrm{B} = \{1, x, x^2, \ldots, x^n\}$, το οποίο ονομάζεται η κανονική βάση του $\mathsf{P}_n(\mathbb{F})$.

5) Παρατηρήστε ότι $\text{span}\{(1,2),(3,5),(4,7)\} = \mathbb{R}^2$, αλλά το σύνολο $\{(1,2),(3,5),(4,7)\}$ δεν είναι βάση του $\mathbb{R}^2$ (γιατί;).

6) Έστω E_{ij} ο $m \times n$ πίνακας με όλα τα στοιχεία του 0 εκτός από το στοιχείο στην (i,j)-θέση που είναι 1. Τότε το σύνολο $\{E_{ij} : 1 \le i \le m, 1 \le j \le n\}$ αποτελεί μία βάση του $\mathsf{M}_{m\times n}(\mathbb{F})$.

7) Μία βάση του διανυσματικού χώρου $\mathsf{P}(\mathbb{F})$ είναι το σύνολο $\mathrm{B} = \{1, x, x^2, \ldots\}$. Παρατηρείστε ότι το B είναι άπειρο σύνολο.

8) Αν V είναι ο διανυσματικός χώρος των διανυσμάτων του χώρου $\mathbb{R}^3$ τότε οποιαδήποτε τρία μη παράλληλα προς το ίδιο επίπεδο διανύσματα αποτελούν μία βάση του V.

Θεώρημα 1.1. *Έστω $\mathrm{B} = \{\beta_1, \ldots, \beta_n\}$ ένα υποσύνολο του διανυσματικού χώρου V. Τότε το B είναι μία βάση του V εάν και μόνο εάν κάθε $v \in V$ γράφεται $v = \lambda_1\beta_1 + \cdots + \lambda_n\beta_n$ ($\lambda_i \in \mathbb{F}$) κατά μοναδικό τρόπο.*

Απόδειξη. Για το ευθύ, αρκεί να δείξουμε την μοναδικότητα. Έστω $v = \lambda_1'\beta_1 + \cdots + \lambda_n'\beta_n$ ($\lambda_i' \in \mathbb{F}$) μία άλλη έκφραση του v ως γραμμικός συνδυασμός των $\beta_1, \ldots, \beta_n$. Τότε $\mathit{0} = (\lambda_1 - \lambda_1')\beta_1 + \cdots + (\lambda_n - \lambda_n')\beta_n$ και επειδή το B είναι γραμμικώς ανεξάρτητο παίρνουμε ότι $\lambda_i = \lambda_i'$ $(i = 1, \ldots, n)$.

Αντίστροφα, επειδή από υπόθεση $\text{span}(\mathrm{B}) = V$, θα δείξουμε ότι το B είναι γραμμικώς ανεξάρτητο . Πράγματι, έστω $\lambda_1\beta_1 + \cdots + \lambda_n\beta_n = \mathit{0}$ για κάποια $\lambda_i \in \mathbb{F}$. Τότε λόγω της μοναδικότητας της γραφής του $\mathit{0}$ ως $\mathit{0} = 0\cdot\beta_1 + \cdots + 0\cdot\beta_n$ προκύπτει ότι $\lambda_i = 0 \in \mathbb{F}$ $(i = 1, \ldots, n)$. □

Το παρακάτω θεώρημα είναι ουσιαστικά το κλειδί προκειμένου να δειχθεί ότι κάθε διανυσματικός χώρος πεπερασμένης διάστασης έχει μία βάση.

Θεώρημα 1.2. *Αν το σύνολο $V = \{v_1, \ldots, v_n\}$ παράγει τον διανυσματικό χώρο V τότε υπάρχει ένα υποσύνολο του S που είναι βάση του V.*

Το θεώρημα ουσιαστικά λέει ότι είναι δυνατόν να "διώξουμε" διανύσματα από το σύνολο S ώστε τα υπόλοιπα να είναι γραμμικώς ανεξάρτητα και να παράγουν τον V. Για την απόδειξή του παραπέμπουμε στη βιβλιογραφία, η ιδέα της όμως αναδεικνύεται στο παρακάτω παράδειγμα.

Παράδειγμα

Τα διανύσματα $(2,-3,5),(8,-12,20),(1,0,-2),(0,2,-1)$ και $(7,2,0)$ παράγουν τον $\mathbb{R}^3$ (άσκηση). Επιλέγουμε το πρώτο διάνυσμα $(2,-3,5)$. Επειδή $(8,-12,20) = 4(2,-3,5)$ τα διανύσματα $\{(2,-3,5),(8,-12,20)\}$ είναι γραμμικώς εξαρτημένα. Στη συνέχεια ελέγχουμε ότι τα διανύσματα $\{(2,-3,5),(1,0,-2)\}$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα. Παίρνουμε το επόμενο, π.χ. το $(0,2,-1)$ και κοιτάζουμε αν τα $\{(2,-3,5),$ $(1,0,-1),\ (0,2,-1)\}$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα ή όχι. Προκύπτει ότι πράγματι είναι, και παίρνουμε το τελευταίο διάνυσμα $(7,2,0)$. Είναι $2(2,-3,5)+3(1,0,-2)+4(0,2,-1)-(7,2,0)=(0,0,0)$ άρα είναι γραμμικώς εξαρτημένα, συνεπώς το σύνολο $S = \{(2,-3,5),(1,0,$
$-2),(0,2,-1)\}$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητο και παράγει τον $\mathbb{R}^3$.

Πόρισμα 1.1. *Κάθε διανυσματικός χώρος πεπερασμένης διάστασης περιέχει μία βάση.*

Απόδειξη. Εξ ορισμού υπάρχει πεπερασμένο υποσύνολο S του V τέτοιο ώστε $\mathrm{span}(S)$ $= v$. Λόγω του προηγούμενου θεωρήματος υπάρχει ένα υποσύνολο του S που να είναι βάση του V. □

Παρατηρήσεις

1) Μία βάση του $V = \{0\}$ είναι το κενό σύνολο $\emptyset$.

2) Αποδεικνύεται ότι και κάθε διανυσματικός χώρος άπειρης διάστασης έχει μία βάση. Η απόδειξη χρησιμοποιεί το Λήμμα του Zorn (ισοδύναμο του αξιώματος επιλογής στη θεωρία συνόλων).

Το παρακάτω θεώρημα αποτελεί κατά κάποιον τρόπο το δυϊκό του προηγούμενου θεωρήματος.

Θεώρημα 1.3. *Κάθε γραμμικώς ανεξάρτητο υποσύνολο ενός διανυσματικού χώρου πεπερασμένης διάστασης μπορεί να επεκταθεί σε μία βάση. Συγκεκριμένα, έστω* B *μία βάση του διανυσματικού χώρου* V *με* n *στοιχεία και έστω* $S = \{y_1, \ldots, y_m\}$ *ένα γραμμικώς ανεξάρτητο υποσύνολο του* V, $m \leq n$. *Τότε υπάρχει* $S_1 \subset \mathrm{B}$ *με* $n - m$ *στοιχεία ώστε το* $S \bigcup S_1$ *να είναι βάση του* V.

Παράδειγμα

Έστω $V = \mathsf{P}_2(\mathbb{R})$ και $S = \{x^2-4, x+4\}$ γραμμικώς ανεξάρτητο (άσκηση). Θεωρούμε τη βάση $\mathrm{B} = \{1, x, x^2\}$ του V και έστω $S_1 = \{x\} \subset \mathrm{B}$. Τότε το σύνολο $\mathrm{B}' = \{x^2 - 4, x + 4, x\}$ αποτελεί βάση του V. Αποδείξτε ότι $\mathrm{span}(\mathrm{B}') = V$ και ότι το B' είναι γραμμικώς ανεξάρτητο.

Παραθέτουμε μερικές συνέπειες των παραπάνω θεωρημάτων.

Πόρισμα 1.2. *Έστω* B *μία βάση του* V *με* n *στοιχεία. Τότε κάθε γραμμικώς ανεξάρτητο υποσύνολο του* V *με* n *στοιχεία είναι μία βάση του* V.

Πόρισμα 1.3. *Έστω* V *διανυσματικός χώρος και* B *μία βάση του* V *με* n *στοιχεία. Τότε κάθε υποσύνολο του* V *με περισσότερα από* n *στοιχεία είναι γραμμικώς εξαρτημένο. Συνεπώς, κάθε γραμμικώς ανεξάρτητο υποσύνολο του* V *περιέχει* n *το πολύ στοιχεία.*

Πόρισμα 1.4. *Όλες οι βάσεις ενός διανυσματικού χώρου πεπερασμένης διάστασης έχουν το ίδιο πλήθος στοιχείων.*

Έτσι οδηγούμαστε στον παρακάτω σημαντικό ορισμό.

Ορισμός 1.10. *Η διάσταση (dimension) ενός διανυσματικού χώρου πεπερασμένης διάστασης είναι το πλήθος των στοιχείων μίας βάσης του. Αν ο* V *δεν είναι πεπερασμένης διάστασης τότε λέμε ότι ο* V *έχει άπειρη διάσταση.*

Συμβολίζουμε με $\dim_{\mathbb{F}} V$ ή $\dim V$ την διάσταση του διανυσματικού χώρου V επί του σώματος $\mathbb{F}$.

Στον παρακάτω πίνακα δίνονται μερικοί διανυσματικοί χώροι που χρησιμοποιούνται πιο τακτικά στην Γραμμική Άλγεβρα με την αντίστοιχη διάστασή τους. Προτρέπουμε τον αναγνώστη να βρεί αντίστοιχες βάσεις.

V	$\dim V$
$\{0\}$	0
$\mathbb{F}^n$	n
$\mathsf{M}_{m\times n}(\mathbb{F})$	mn
$\mathsf{P}_n(\mathbb{F})$	$n+1$
$\mathsf{P}(\mathbb{F})$	∞

Δύο ενδιαφέρουσες ειδικές περιπτώσεις είναι, $\dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C} = 1$ με βάση $\mathrm{B} = \{1\}$ και $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = 2$ με $\mathrm{B} = \{1, i\}$, $(i = \sqrt{-1})$.

Μερικά αποτελέσματα σχετικά με τη διάσταση
Υποθέτουμε ότι ο V είναι πεπερασμένης διάστασης.

1) Αν $W < V$, τότε $\dim W \leq \dim V$. Εάν $\dim W = \dim V$ τότε $W = V$.

2) Κάθε υποσύνολο του V που παράγει τον V και περιέχει $\dim V$ το πλήθος στοιχεία, είναι βάση του V.

3) Κάθε γραμμικώς ανεξάρτητο υποσύνολο του V που περιέχει $\dim V$ στοιχεία είναι μία βάση του V.

4) Αν $W_1 < V$, τότε υπάρχει $W_2 < V$ τέτοιος ώστε $V = W_1 \oplus W_2$.

5) Αν W_1, W_2 υπόχωροι του V τότε

$$\dim(W_1 + W_2) = \dim W_1 + \dim W_2 - \dim(W_1 \bigcap W_2).$$

Συνεπώς, το άθροισμα $W_1 + W_2$ είναι ευθύ εάν και μόνο εάν $\dim(W_1 + W_2) = \dim W_1 + \dim W_2$.

Παραδείγματα
1) Έστω W ο υπόχωρος του $\mathsf{M}_{n\times n}(\mathbb{F})$ που αποτελείται από όλους τους διαγώνιους πίνακες. Μία βάση του W ειναι η $\mathrm{B} = \{D_{11}, D_{22}, \ldots, D_{nn}\}$, όπου D_{ii} ο $n \times n$ πίνακας που έχει παντού 0 εκτός από την (i,i)-θέση που έχει 1. Συνεπώς, $\dim W = n$.

2) Έστω W ο υπόχωρος του $\mathsf{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ που αποτελείται από όλους τους συμμετρικούς πίνακες. Μία βάση του W είναι η $\mathrm{B} = \{A_{ij} : 1 \leq i < j \leq n\}$ όπου A_{ij} ο $n \times n$

πίνακας ο οποίος έχει παντού 0 εκτός από τις θέσεις (i, j) και (j, i) που έχει και στις δύο 1. Δείξτε ότι $\dim W = \frac{n(n+1)}{2}$.

3) Το υποσύνολο $\{(1,1,0),(0,1,1),(0,0,1)\}$ του $\mathbb{R}^3$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητο, άρα αποτελεί μία βάση του $\mathbb{R}^3$.

4) Το υποσύνολο $\{(1,2),(3,4)\}$ του $\mathbb{R}^2$ παράγει τον $\mathbb{R}^2$, άρα είναι μία βάση του $\mathbb{R}^2$.

1.7 Ασκήσεις

1) Δίνονται τα διανύσματα

$$a_1 = (1,-3,0,2), a_2 = (-2,1,1,1), a_3 = (-1,-2,1,3) \in \mathbb{R}^4.$$

Να εξετασθεί αν τα a_1, a_2, a_3 είναι γραμμικώς εξαρτημμένα. Να βρεθεί μία βάση καθώς και η διάσταση του υπόχωρου $\operatorname{span}\{a_1, a_2, a_3\}$.

2) Έστω V ο υπόχωρος του διανυσματικού χώρου $\mathbb{R}^4$ ο οποίος παράγεται από τα διανύσματα

$$a_1 = (1,2,3,4), a_2 = (2,3,4,5), a_3 = (3,4,5,6), a_4 = (4,5,6,7).$$

Να βρεθεί μία βάση του V καθώς και η διάστασή του.

3) Έστω ότι τα a_1, a_2, a_3 είναι διανύσματα γραμμικώς ανεξάρτητα. Να βρεθεί για ποιά τιμή του k τα διανύσματα $a_2 - a_1, ka_3 - a_2, a_1 - a_3$ είναι γραμμικώς εξαρτημένα.

4) Έστω

$$W = \{\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} : a, b, c, \in \mathbb{R}\}.$$

i) Να δειχθεί ότι το W είναι ένας υπόχωρος του $\mathsf{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ επί του $\mathbb{R}$ και ότι οι πίνακες

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

αποτελούν μία βάση αυτού .

ii) Να βρεθούν οι συντεταγμένες του πίνακα $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$ ως προς την προηγούμενη βάση.

5) Έστω ότι το σύνολο $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ $(n \geq 2)$ αποτελεί μία βάση του διανυσματικού χώρου V.

   i) Να δειχθεί ότι το σύνολο $\{a_1, a_1+a_2, \ldots, a_1+a_2+\cdots+a_n\}$ αποτελεί επίσης μία βάση του V.

   ii) Ισχύει το ίδιο για το σύνολο $\{a_1+a_2, a_2+a_3, \ldots, a_{n-1}+a_n, a_n+a_1\}$;

6) Έστω V και W δύο διανυσματικοί χώροι επί του $\mathbb{F}$. Έστω $V \times W$ το σύνολο όλων των διατεταγμένων ζεύγων (v, w), όπου $v \in V$ και $w \in W$, και ορίζουμε

$$(v_1, w_1) + (v_2, w_2) = (v_1 + v_2, w_1 + w_2),$$

$$k(v, w) = (kv, kw), k \in \mathbb{F}.$$

   i) Να δειχθεί ότι το $V \times W$ είναι ένας διανυσματικός χώρος επί του $\mathbb{F}$.

   ii) Να δειχθεί ότι αν οι διανυσματικοί χώροι V και W είναι πεπερασμένης διάστασης, τότε το ίδιο ισχύει και για τον $V \times W$.

   iii) Αν $\dim V = m$, $\dim W = n$ να βρεθεί η διάσταση $\dim(V \times W)$.

   iv) Να εξηγηθεί γιατί ο διανυσματικός χώρος $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^2$ μπορεί να ταυτιστεί με τον $\mathbb{R}^3$.

   v) Να βρεθεί μία βάση του $\mathbb{R}^2 \times \mathsf{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$.

   vi) Ποιά είναι η διάσταση του $\mathsf{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \times \mathsf{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$;

7) Έστω $A \in \mathsf{M}_{n\times n}(\mathbb{F})$. Να δειχθεί ότι το σύνολο $V = \{X : AX = XA\}$ είναι ένας διανυσματικός χώρος επί του $\mathbb{F}$. Να βρεθούν όλοι οι πίνακες που μετατίθενται με τον A και να βρεθεί η διάσταση του διανυσματικού χώρου V, αν

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

8) Να βρεθεί ο διανυσματικός χώρος των πινάκων οι οποίοι μετατίθενται με τον πίνακα A, όπου

   i) $A = I_n$.

   ii) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

   iii) $A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}, a \neq b$.

iv) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

v) A ένας τυχαίος $n \times n$ πίνακας.

9) Έστω

$$W = \{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^4 : x_3 = x_1 + x_2 \text{ και } x_4 = x_1 - x_2 \}.$$

i) Να δειχθεί ότι ο W είναι ένας υπόχωρος του $\mathbb{C}^4$.

ii) Να βρεθεί μία βάση του W. Ποιά η διάσταση του W;

iii) Να δειχθεί ότι το σύνολο $\{k(1,0,1,1)^t : k \in \mathbb{C}\}$ είναι ένας υπόχωρος του W.

10) Να δειχθεί ότι $\mathsf{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) = W_1 \oplus W_2$, όπου

$$W_1 = \{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} : a, b \in \mathbb{R}\}$$

και

$$W_2 = \{ \begin{pmatrix} c & d \\ d & -c \end{pmatrix} : c, d \in \mathbb{R}\}.$$

Αν ο V_1 είναι ένας υπόχωρος του $\mathsf{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ ο οποίος αποτελείται από όλους τους $n \times n$ συμμετρικούς πίνακες, να βρεθεί ένας υπόχωρος V_2 του $\mathsf{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ ώστε να ισχύει $V_1 \oplus V_2 = \mathsf{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$.

11) Για κάθε ένα από τα ακόλουθα σύνολα πολυωνύμων του διανυσματικού χώρου $\mathsf{P}_3(\mathbb{R})$ να εξετασθεί αν το πρώτο πολυώνυμο μπορεί να εκφραστεί ως γραμμικός συνδυασμός των υπολοίπων.

i) $4x^3 + 2x^2 - 6, x^3 - 2x^2 + 4x + 1, 3x^3 - 6x^2 + x + 4$.

ii) $-2x^3 - 11x^2 + 3x + 2, x^3 - 2x^2 + 3x - 1, 2x^3 + x^2 + 3x - 2$.

12) Να δειχθεί ότι οι παρακάτω πίνακες παράγουν τον $\mathsf{M}_{2\times 2}(\mathbb{F})$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

13) Έστω
$$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, M_3 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$
Να δειχθεί ότι ο χώρος $\mathrm{span}\{M_1, M_2, M_3\}$ ισούται με το σύνολο όλων των συμμετρικών 2×2 πινάκων.

14) Έστω V ένας διανυσματικός χώρος επί ενός σώματος του οποίου η χαρακτηριστική είναι διάφορη του 2 (αναζητήστε στη βιβλιογραφία την έννοια της χαρακτηριστικής ενός σώματος).

    i) Να δειχθεί ότι το σύνολο $\{u, v\}$ $(u \neq v)$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητο εάν και μόνο εάν το σύνολο $\{u + v, u - v\}$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητο.

    ii) Να δειχθεί ότι το $\{u, v, w\}$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητο εάν και μόνο εάν το $\{u + v, u + w, v + w\}$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητο.

15) Να δειχθεί ότι ένα σύνολο S είναι γραμμικώς ανεξάρτητο εάν και μόνο εάν είτε $S = \{0\}$ είτε υπάρχουν διακεκριμμένα διανύσματα $y, x_1, x_2, \ldots, x_n$ του S τέτοια ώστε το y να είναι γραμμικός συνδυασμός των $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

16) Έστω M ένας πίνακας ο οποίος είναι άνω τριγωνικός και με διαγώνια στοιχεία διάφορα του 0. Να δειχθεί ότι οι στήλες του M είναι ένα γραμμικώς ανεξάρτητο σύνολο.

17) Να προσδιοριστεί ποιό από τα ακόλουθα σύνολα αποτελεί μία βάση του $\mathbb{R}^3$.

    i) $\{(2, -4, 1), (0, 3, -1), (6, 0, -1)\}$.

    ii) $\{(1, -3, -2), (-3, 1, 3), (-2, -10, -2)\}$.

18) Όπως η Άσκηση 17 για τον διανυσματικό χώρο $\mathsf{P}_2(\mathbb{R})$.

    i) $\{1 + 2x + x^2, 3 + x^2, x + x^2\}$.

    ii) $\{-1 - x + 2x^2, 2 + x - 2x^2, 1 - 2x + 4x^2\}$.

19) Έστω $\{x, y\}$ μία βάση ενός διανυσματικού χώρου V. Να δειχθεί ότι τα $\{x+y, ax\}$ και $\{ax, by\}$ είναι βάσεις του V, όπου $a, b \neq 0$.

20) Έστω οι υπόχωροι W_1 και W_2 του $\mathbb{F}^5$ με
$$W_1 = \{(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5) \in \mathbb{F}^5 : a_1 - a_3 - a_4 = 0\}$$
και
$$W_2 = \{(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5) \in \mathbb{F}^5 : a_2 = a_3 = a_4 \text{ και } a_1 + a_5 = 0\}.$$

Να βρεθεί μία βάση για τον W_1 και τον W_2 καθώς και οι αντίστοιχες διαστάσεις αυτών.

21) Να δειχθεί ότι το σύνολο όλων των άνω τριγωνικών $n \times n$ πινάκων είναι ένας υπόχωρος W του $\mathsf{M}_{n\times n}(\mathbb{F})$. Να βρεθεί μία βάση του W καθώς και η διάσταση αυτού.

Βιβλιογραφία

[1] S. Axler: *Linear Algebra Done Right*, 2nd Edition Springer, 1997.

[2] S. H. Friedberg - A. J. Insel - L. E. Spence: *Linear Algebra*, 4th Edition, Prentice Hall, 2003.

[3] Y. Katznelson - Y. R, Katznelson: *A (Terse) Introduction to Linear Algebra*, American Mathematical Society, 2008.

[4] S. Lipschutz - M. Lipson: *Linear Algebra*, 3rd Edition, Schaum's Outlines, 2003.

[5] H. E. Rose: *Linear Algebra: A Pure Mathematical Approach*, Birkhauser, 2002.

[6] F. Zhang: *Linear Algebra. Challenging Problems for Students*, 2nd Edition, The Johns Hopkings University Press, 2009.